VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

BA091 - Základy deskriptivní geometrie

STUDIJNÍ TEXT

cvičení ZS 2020/2021

Lenka Rýparová

Brno

CVIČENÍ 2 - STŘEDOVÁ KOLINEACE A OSOVÁ AFINITA

1 Středová kolineace

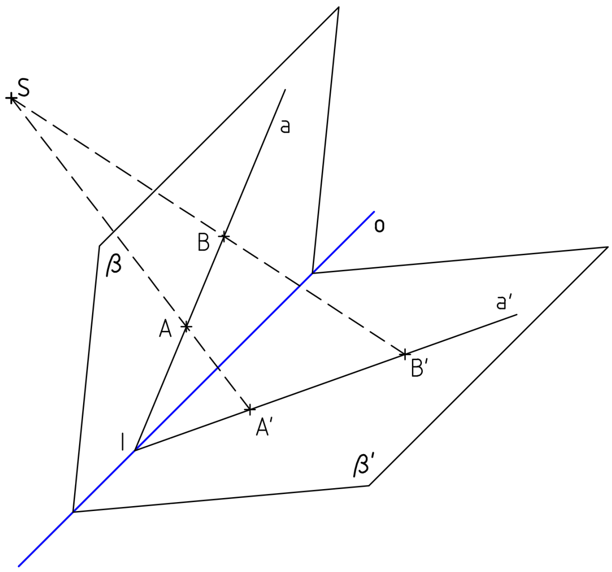


Schéma středové kolineace v prostoru.

Mějme dány různoběžné roviny β a β' v prostoru, označme jejich průsečnici o, dále zvolme bod S tak, aby neležel ani v jedné z rovin β, β'. Pak existuje vzájemně jednoznačné zobrazení, které převádí body a přímky roviny β na body a přímky roviny β', přičemž platí:

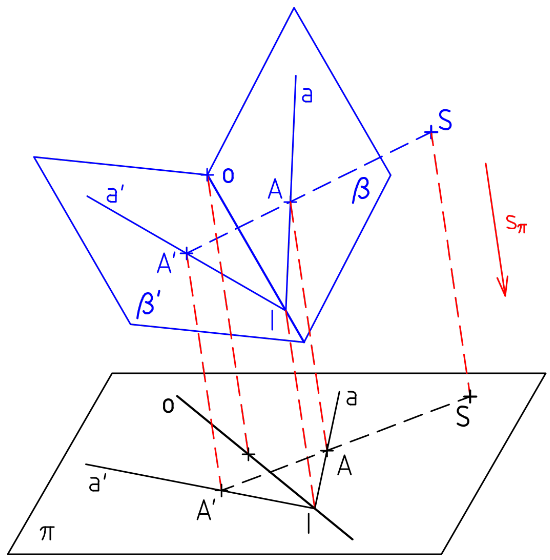
- Spojnice odpovídajících si bodů prochází bodem S.
- Průsečíky odpovídajících si přímek leží na přímce o.
- Zachovává se incidence bodů a přímek, tj. bod ležící na přímce se zobrazí opět do bodu ležícího na přímce.

Toto zobrazení nazveme *středovou kolineací* mezi dvěma různoběžnými rovinami, zn. $\mathcal{K}$, bod S *střed kolineace* a přímku o *osou kolineace*.

Středovou kolineaci mezi dvěma rovinami v prostoru převedeme na středovou kolineaci v rovině rovnoběžným promítnutím do libovolně zvolené roviny π (směr promítání nesmí být rovnoběžný s žádnou z uvažovaných rovin β a β').

Vlastnosti středové kolineace se po promítnutí do roviny zachovávají, tedy platí věta:

Věta 1.1. *Přímky odpovídající si ve středové kolineaci v rovině se protínají na ose kolineace, odpovídající si body leží na přímkách procházejících středem kolineace.*



Průmět středu kolineace je samodružným bodem středové kolineace v rovině, průmět osy kolineace je samodružnou přímkou kolineace v rovině.

Bod odpovídající nevlastnímu bodu přímky p' se nazývá úběžník přímky p.

Přímka odpovídající nevlastní přímce jednoho pole (např. nečárkované soustavy bodů) se nazývá *úběžnice druhého pole* (tj. čárkované soustavy bodů). Úběžnice obou polí jsou rovnoběžné s osou o, (neb nevlastní přímka roviny a jí odpovídající vlastní přímka se protínají v nevlastním bodě osy o).

Středová kolineace může být zadána např. takto: $\mathcal{K}(S, o, u_\infty \to u')$, $\mathcal{K}(S, o, v'_\infty \to v)$, $\mathcal{K}(S, o, A \to A')$, $\mathcal{K}(o, A \to A', B \to B')$ apod.

2 Osová afinita

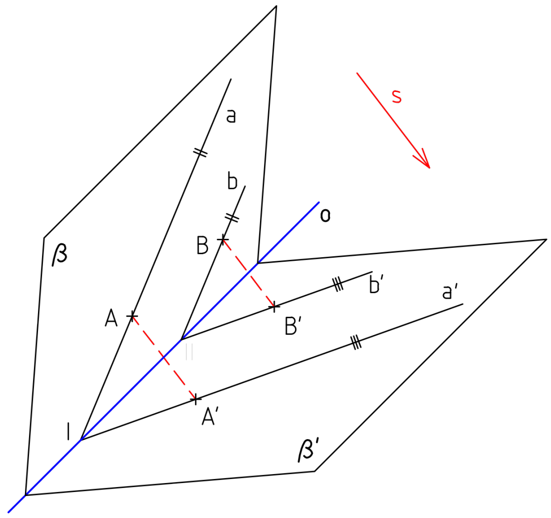


Schéma osové afinity v prostoru k.

Osová afinita $\mathcal{A}$ mezi dvěma různoběžnými rovinami β a β' je speciálním případem středové kolineace mezi dvěma různoběžnými rovinami, kdy střed S kolineace je nevlastní bod (budeme mluvit o *směru afinitiy* $\vec{s}$).

Podobně jako pro kolineaci platí pro afinitu následující vlastnosti:

Věta 2.1. *Navzájem odpovídající si body leží na přímkách rovnoběžných se směrem* $\vec{s}$ *afinity* $\mathcal{A}$.

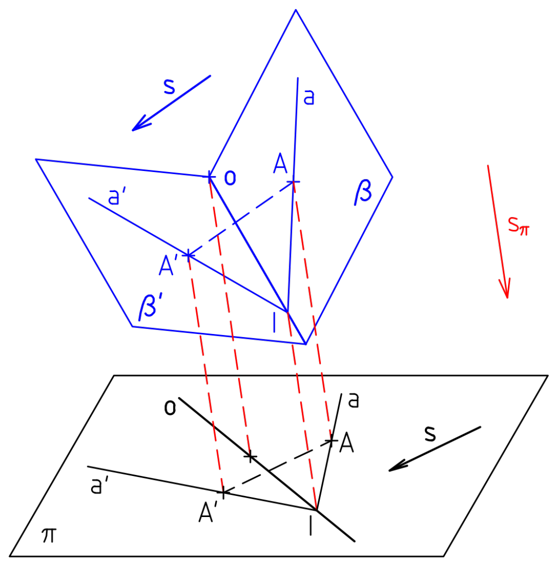
Věta 2.2. *Odpovídající si přímky se protínají na ose* o *afinity* $\mathcal{A}$ *v samodružných bodech.*

Věta 2.3. *Osová afinita zachovává dělící poměr, rovnoběžnost přímek.*

Osovou afinity mezi dvěma různoběžnými rovinami v prostoru převedeme na osovou afinitu v rovině rovnoběžným promítnutím do libovolně zvolené roviny π (směr promítání nesmí být rovnoběžný s žádnou z uvažovaných rovin β a β').

Všechny vlastnosti afinity se rovnoběžným promítáním zachovávají, tj. platí všechny výše uvedené věty.

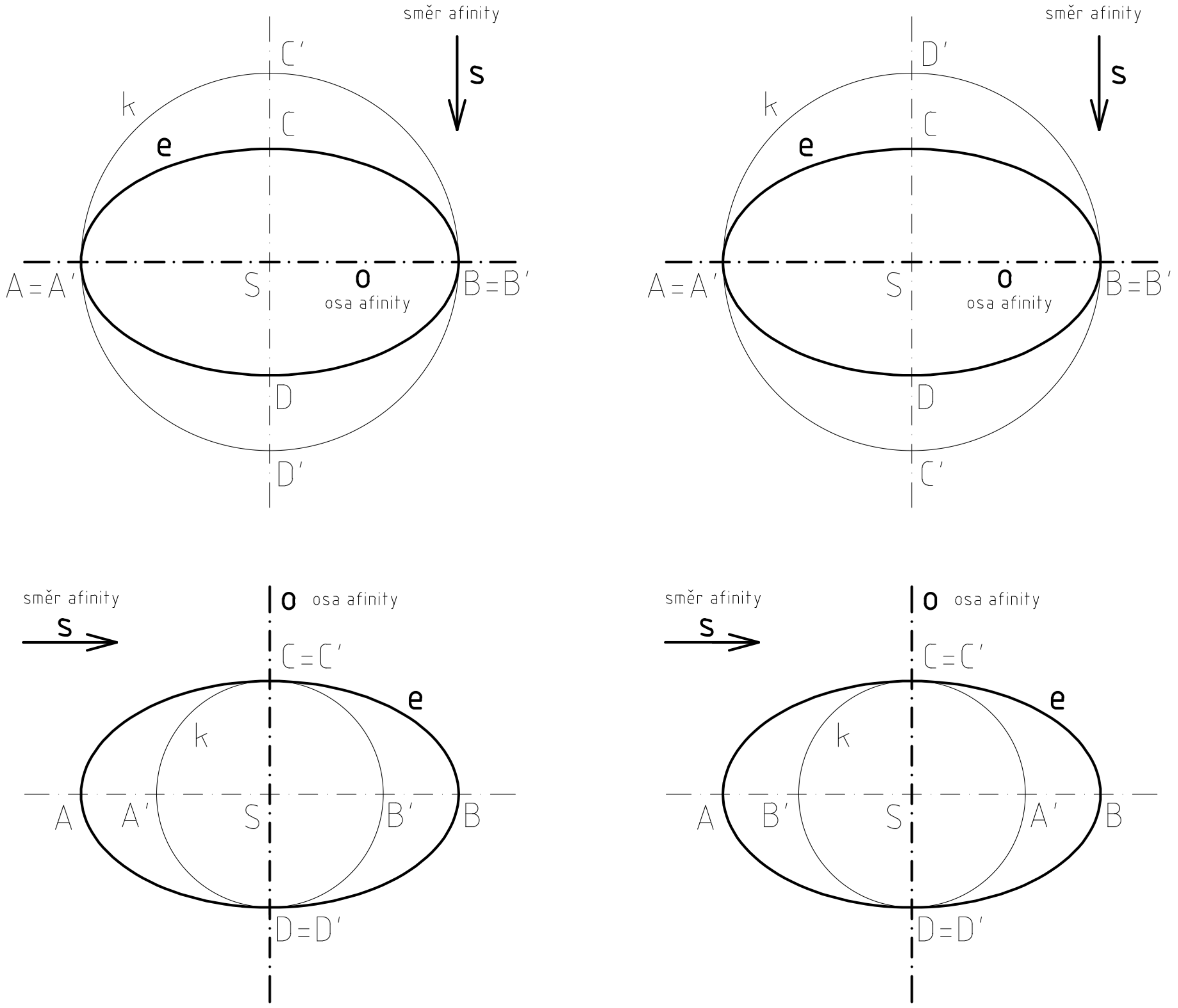
Afinita v rovině může být zadána např. takto:
$\mathcal{A}\,(o, A \to A')$, $\mathcal{A}\,(A \to A', B \to B', C \to C')$,
$\mathcal{A}\,(o, p \to p', \vec{s})$, apod.



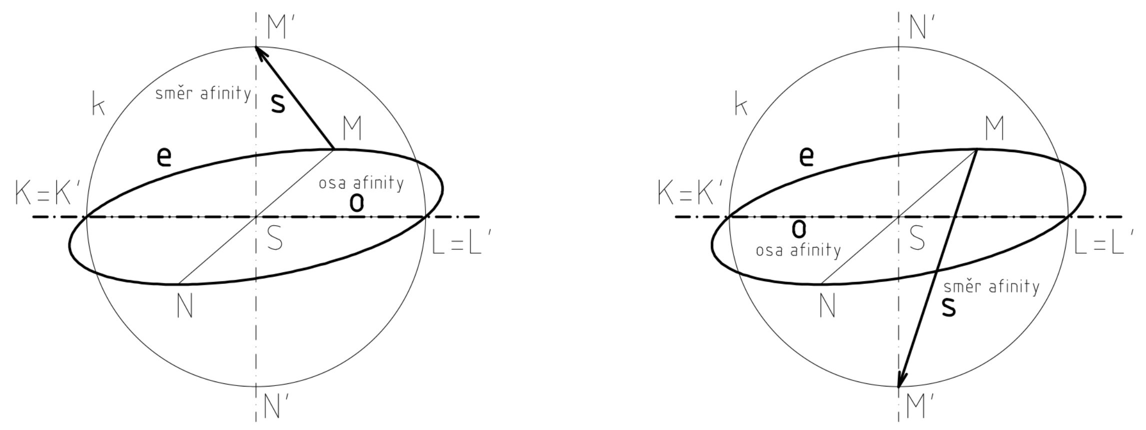
Osovou afinitou lze řešit některé konstrukční úlohy (např. úlohy o elipse). Zvolíme-li afinitu tak, že se daná elipsa zobrazí na kružnici, řada konstrukcí se tím zjednoduší.

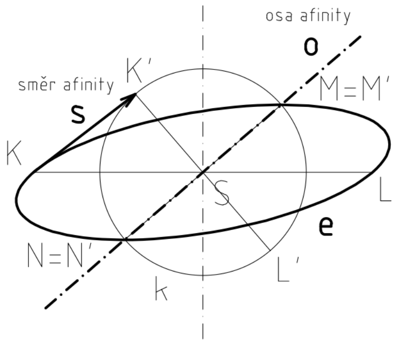
Možnosti volby afinní kružnice k zadané elipse

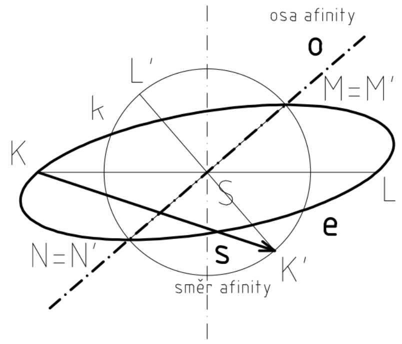
1. Elipsa zadaná pomocí hlavní osy AB a vedlejší osy CD:



2. Elipsa zadaná pomocí sdružených průměrů KL a MN.





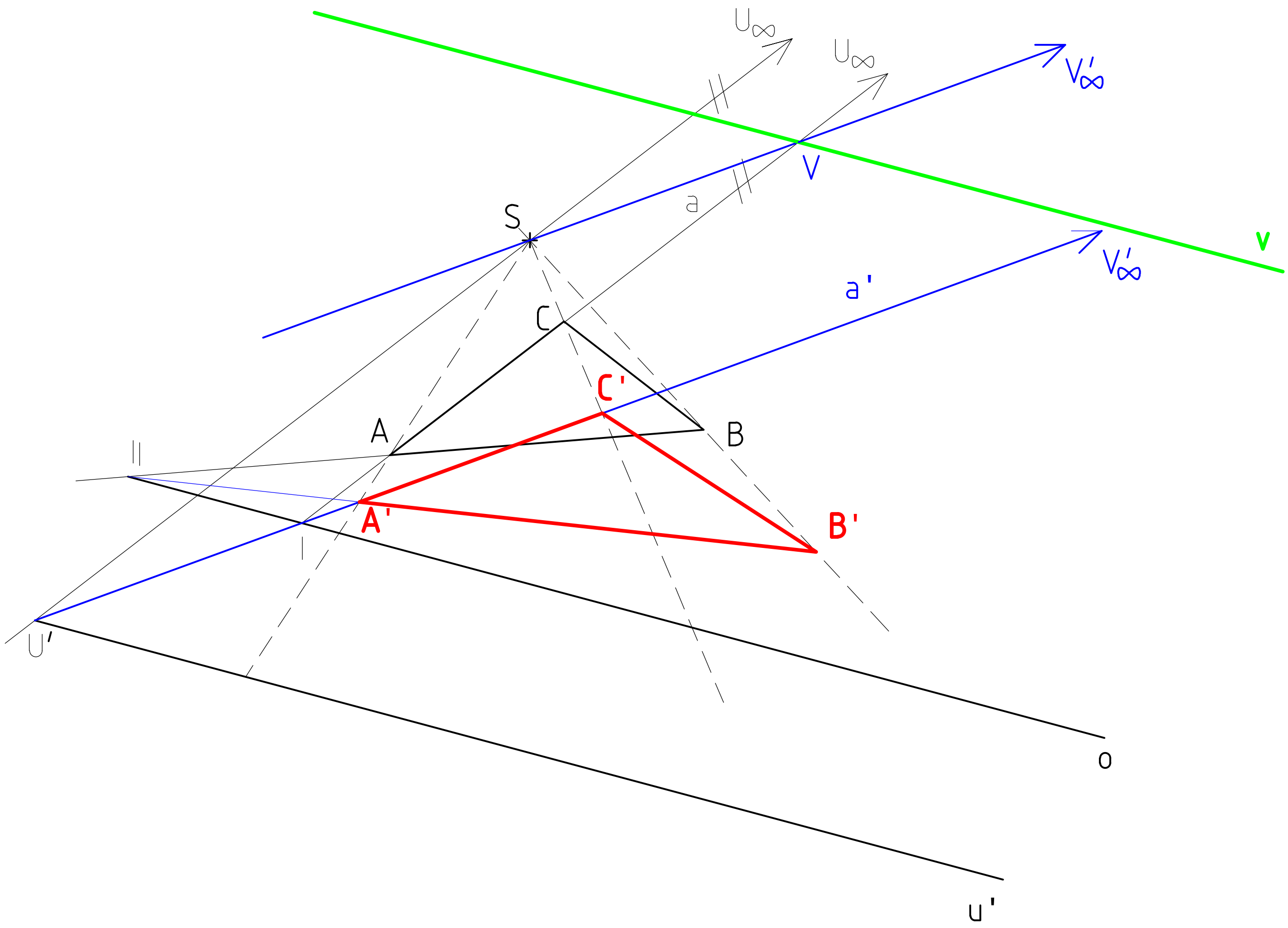


Využití: konstukce tečen elipsy z bodu/rovnoběžně se směrem, průsečík přímky s elipsou apod.

C V I Č E N Í   2

STŘEDOVÁ KOLINEACE

1. V kolineaci $K(S, o, u_\infty \rightarrow u')$ sestrojte obraz trojúhelníka ABC. Najděte úběžnici v ($v'_\infty \rightarrow v$).



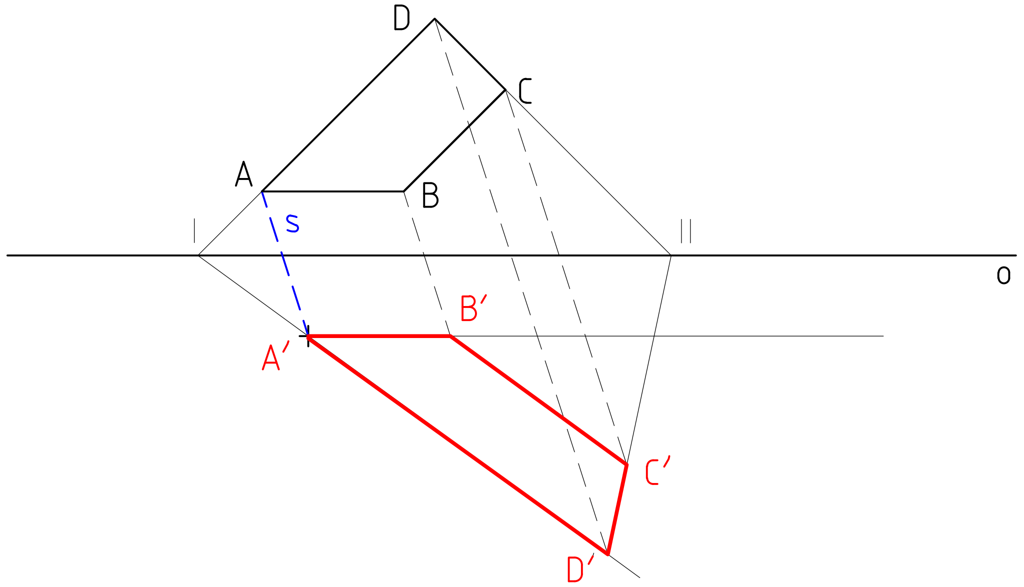
Postup:

1. I, $I = \overleftrightarrow{AC} \cap o$
2. U_∞, U_∞ nevlastní bod přímky $\overleftrightarrow{AC}$
3. U', $U' = u' \cap \overleftrightarrow{SU_\infty}$
4. a', $a' = \overleftrightarrow{U'I}$
5. A', $A' = a' \cap \overleftrightarrow{SA}$
6. C', $C' = a' \cap \overleftrightarrow{SC}$
7. II, $II = \overleftrightarrow{AB} \cap o$
8. B', $B' = \overleftrightarrow{SB} \cap IIA$
9. $\triangle A'B'C'$

C V I Č E N Í 2

OSOVÁ AFINITA

1. V afinitě Af $(A \rightarrow A', o)$ sestrojte obraz čtyřúhelníka ABCD.

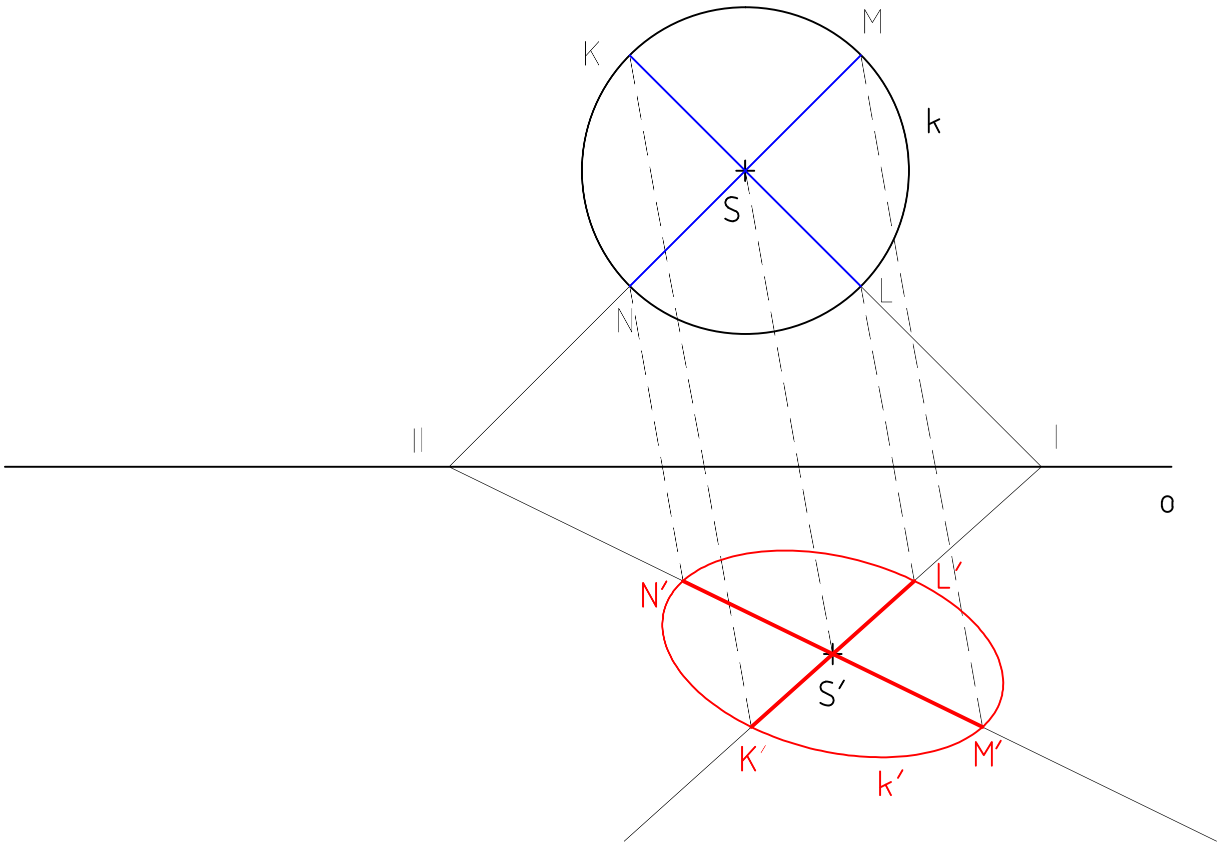


Postup:

1. I, I = $\overleftrightarrow{AD} \cap o$
2. D', D' $\in \overleftrightarrow{IA'}$: $\overleftrightarrow{DD'} \parallel \overleftrightarrow{AA'} (=\vec{s})$
3. II, II $= \overleftrightarrow{DC} \cap o$
4. C', C' $\in \overleftrightarrow{IID'}$: $\overleftrightarrow{CC'} \parallel \vec{s}$
5. B', $\overleftrightarrow{B'A'} \parallel \overleftrightarrow{BA} \parallel o$, $\overleftrightarrow{BB'} \parallel \vec{s}$
6. A'B'C'D'

C V I Č E N Í   2

2. V afinitě Af (S→S', o) sestrojte obraz kružnice k(S,r) – obecný způsob přes libovolné sdružené průměry.

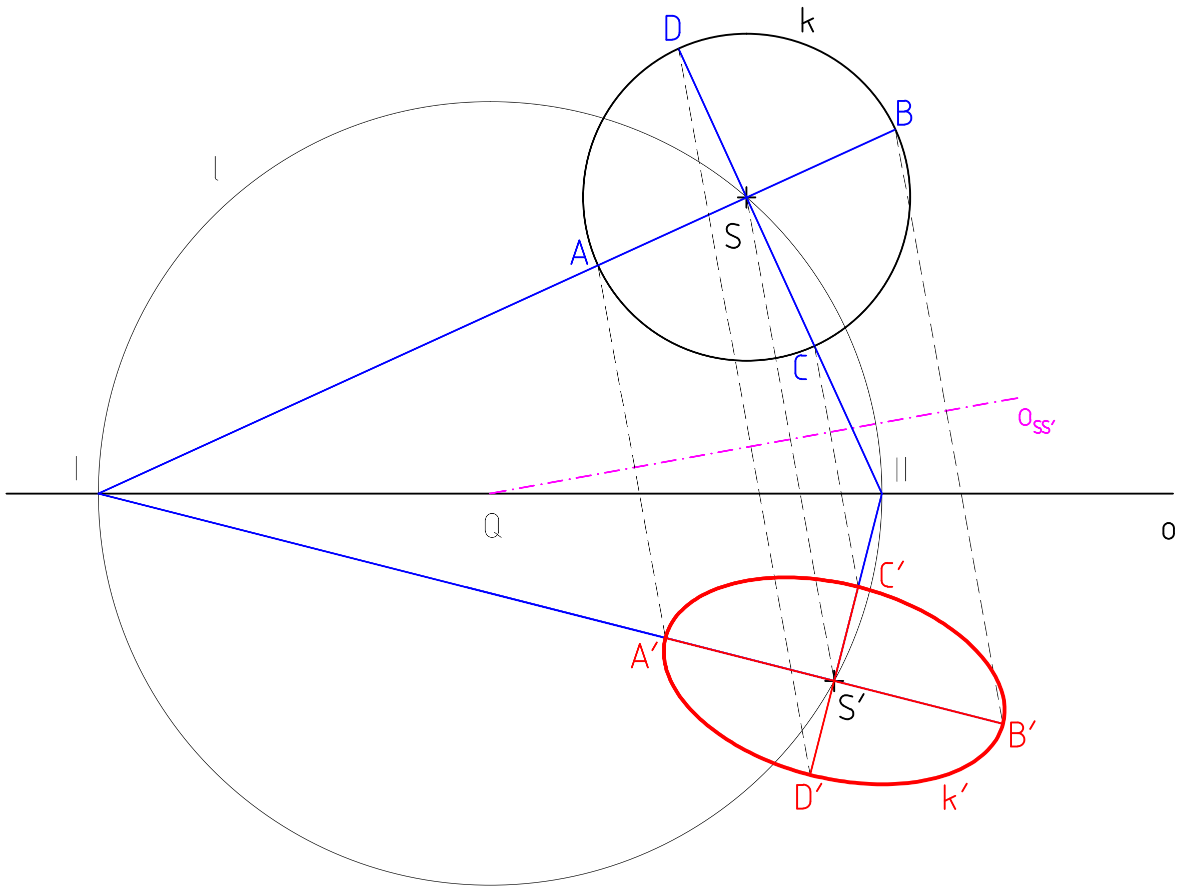


Postup:

1. Zvolíme lib. sdružené průměry KL, MN na kružnici k (lib. navzájem kolmé)
2. I, I=$\overleftrightarrow{KL} \cap o$
3. II, II=$\overleftrightarrow{MN} \cap o$
4. N', N'$\in \overleftrightarrow{IIS'}$, $\overleftrightarrow{NN'} \parallel \overleftrightarrow{SS'}$(=$\vec{s}$... směr afinity)
5. M', M'$\in \overleftrightarrow{IIS'}$, $\overleftrightarrow{MM'} \parallel \overleftrightarrow{SS'}$
6. K', K'$\in \overleftrightarrow{IS'}$, $\overleftrightarrow{KK'} \parallel \overleftrightarrow{SS'}$
7. L', L'$\in \overleftrightarrow{IS'}$, $\overleftrightarrow{LL'} \parallel \overleftrightarrow{SS'}$
8. K'L'M'N'... sdružené průměry elipsy k'
9. pomocí Rytzovy konstrukce vyrýsujeme k'

C V I Č E N Í   2

3. V afinitě Af(S→S', o) sestrojte hlavní a vedlejší průměry elipsy, která je afinním obrazem kružnice k(S, r). Elipsu vyrýsujte.



Postup:

1. $o_{SS'}$, $o_{SS'}$... osa úsečky $\overline{SS'}$
2. Q, Q $\in$ o $\cap$ $o_{SS'}$
3. l, l(Q,|QS|)
4. I, II; l $\cap$ o={I,II}
5. A, B; $\overleftrightarrow{SI}$ $\cap$ k={A,B}
6. C, D; $\overleftrightarrow{SII}$ $\cap$ k={C,D}
7. A', A' $\in$ $\overleftrightarrow{IS'}$: $\overleftrightarrow{AA'}$ II $\overleftrightarrow{SS'}$
8. B', B' $\in$ $\overleftrightarrow{IS'}$: $\overleftrightarrow{BB'}$ II $\overleftrightarrow{SS'}$
9. C', C' $\in$ $\overleftrightarrow{IIS'}$: $\overleftrightarrow{CC'}$ II $\overleftrightarrow{SS'}$
10. D', D' $\in$ $\overleftrightarrow{IIS'}$: $\overleftrightarrow{DD'}$ II $\overleftrightarrow{SS'}$
11. Elipsu vyrýsujeme pomocí hyperoskulačních kružnic
12. k'