



FAKULTA ústav  
STAVEBNÍ matematiky  
a deskriptivní geometrie

# DERIVACE

aplikace, vlastnosti, vzorce; neurčité výrazy

Studijní materiály

Protože (vlastní) derivace  $f'$  funkce  $f(x)$  v  $x_0$  je **vlastní** limita <sup>1</sup>  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ,  
pak tečna a normála ke grafu funkce  $f(x)$  v bodě  $[x_0; y_0]$  mají následující rovnice:

Tečna:  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Normála:  $y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$  pro  $f'(x_0) \neq 0$ .

Dále pro první a druhou derivaci a původní funkci platí:

Když  $f'(x_0) > 0$  funkce  $f(x)$  v okolí bodu  $[x_0; y_0]$  **roste** ↗

Když  $f'(x_0) < 0$  funkce  $f(x)$  v okolí bodu  $[x_0; y_0]$  **klesá** ↘

Když  $f''(x_0) > 0$  funkce  $f(x)$  je v okolí bodu  $[x_0; y_0]$  **konVexní** ∪ (graf je NAD tečnou)

Když  $f''(x_0) < 0$  funkce  $f(x)$  je v okolí bodu  $[x_0; y_0]$  **konkÁvní** ∩ (graf je POD tečnou)

<sup>1</sup> Graficky viz: KUBEN, J., ŠARMANOVÁ, P. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. Ostrava : Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2006, 351 s. ISBN 80-248-1192-8.

([http://home1.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/dp/animace/kap07/kap7\\_anim1.swf](http://home1.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/dp/animace/kap07/kap7_anim1.swf))

## Další vlastnosti (prvních) derivací

- Pokud má funkce  $f(x)$  derivaci  $f'(x_0)$  ve vlastním bodě  $x_0$ , musí být definovaná v tomto bodě  $x_0$  a nějakém jeho okolí.
- Pokud má funkce  $f(x)$  **vlastní** derivaci  $f'(x_0)$  ve **vlastním** bodě  $x_0$ , musí být v tomto bodě **spojitá**.

Analogické tvrzení platí pro jednostranné derivace a jednostranné spojitosti.

Opačné tvrzení nemusí platit!

Funkce  $f(x)$  spojitá v bodě  $x_0$  nemusí mít v tomto bodě derivaci  $f'(x_0)$ .

- Pokud má funkce  $f(x)$  **nevlastní** derivaci  $f'(x_0) = \pm\infty$  v nějakém bodě  $x_0$ , pak může být v tomto bodě spojitá, ale nemusí.
- Pokud funkce  $f(x)$  v nějakém bodě  $x_0$  nemá derivaci /  $f'(x_0)$  neexistuje/, pak může, ale nemusí být v tomto bodě spojitá.

$(\text{konst.})' = 0$  Pokud jsou funkce **definovány** a derivace jsou **vlastní**, pak:

$$[k \cdot f(x)]' = k \cdot [f(x)]' \quad \text{kde } k \text{ je libovolné konečné číslo (konstanta)}$$

$$[f(x) + g(x)]' = [f(x)]' + [g(x)]'$$

$$[f(x) - g(x)]' = [f(x)]' - [g(x)]'$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = [f(x)]' \cdot g(x) + f(x) \cdot [g(x)]'$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{[f(x)]' \cdot g(x) - f(x) \cdot [g(x)]'}{[g(x)]^2} \quad \text{kde } g(x) \neq 0$$

$$x' = 1 \quad [(\quad)^n]' = n \cdot (\quad)^{n-1} \cdot (\quad)'$$

$n$  je reálné čís., pak musí být  $(\quad) > 0$   
 $n$  je celé číslo, pak musí být  $(\quad) \neq 0$   
 $n$  je přirozené č., pak musí být  $(\quad)$  reálné č.

$$[e^{(\quad)}]' = e^{(\quad)} \cdot (\quad)'$$

$$[\sin(\quad)]' = \cos(\quad) \cdot (\quad)'$$

$$[\arcsin(\quad)]' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\quad)^2}} \cdot (\quad)'$$

$$[k^{(\quad)}]' = k^{(\quad)} \cdot \ln k \cdot (\quad)'$$

$$[\cos(\quad)]' = -\sin(\quad) \cdot (\quad)'$$

$$[\arccos(\quad)]' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\quad)^2}} \cdot (\quad)'$$

$$[\ln(\quad)]' = \frac{1}{(\quad)} \cdot (\quad)'$$

$$[\operatorname{tg}(\quad)]' = \frac{1}{[\cos(\quad)]^2} \cdot (\quad)'$$

$$[\operatorname{arctg}(\quad)]' = \frac{1}{1 + (\quad)^2} \cdot (\quad)'$$

$$[\log_a(\quad)]' = \frac{1}{(\quad) \cdot \ln a} \cdot (\quad)'$$

$0 < a \neq 1$

$$[\operatorname{cotg}(\quad)]' = \frac{-1}{[\sin(\quad)]^2} \cdot (\quad)'$$

$$[\operatorname{arccotg}(\quad)]' = \frac{-1}{1 + (\quad)^2} \cdot (\quad)'$$

## L'Hospitalovo pravidlo

Pokud je splněna jedna z podmínek

$$\text{buď} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 ,$$

$$\text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \quad / \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ je libovolná, nebo nemusí existovat} /$$

a navíc existuje  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  pak také existuje  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  a platí:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

L'Hospitalovo pravidlo říká, že se limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  dá v případě, že se jedná o limitu typu  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  nebo typu  $\left[ \frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty} \right]$  nahradit limitou  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

za předpokladu, že tato druhá limita existuje (může být i nevlastní).

U l'Hospitalova pravidla je obvyklé vícenásobné použití. Dostaneme-li po derivování opět limitu podílu a jsou-li splněny výše uvedené podmínky, můžeme znovu zderivovat čitatele a jmenovatele atd.

## Neurčité výrazy

$\{x\}$  má význam, že se přibližujeme libovolně blízko (těsně) k výrazu  $x$ .

$kkc$  je **konečné** (vlastní) **kladné číslo** ( $kkc > 0$ )

## NEURČITÉ VÝRAZY

$$\{0\} + \{0\} = \{0\}$$

$$\{\infty\} + \{\infty\} = \{\infty\}$$

$$\{0\} + \{\infty\} = \{\infty\}$$

$$\{\infty\} - \{\infty\}$$

$$\{0\} + kkc = \{kkc\}$$

$$\{\infty\} + kkc = \{\infty\}$$

$$\frac{\{0\}}{\{\infty\}} = \{0\}$$

$$\{0\} \cdot \{0\} = \{0\}$$

$$\{\infty\} \cdot \{\infty\} = \{\infty\}$$

$$\frac{\{\infty\}}{\{0^+\}} = \{\infty\}$$

$$\{0\} \cdot \{\infty\}$$

$$\{0\} \cdot kkc = \{0\}$$

$$\{\infty\} \cdot kkc = \{\infty\}$$

$$\frac{\{\infty\}}{\{0^-\}} = \{-\infty\}$$

$$\{1\}^{\{\infty\}}$$

$$\{0\}^{kkc} = \{0\}$$

$$\{\infty\}^{kkc} = \{\infty\}$$

$$\{0\}^{\{\infty\}} = \{0\}$$

$$\{\infty\}^{\{0\}}$$

$$(kkc)^{\{0\}} = \{1\}$$

$$(kkc > 1)^{\{\infty\}} = \{\infty\}$$

$$(kkc < 1)^{\{\infty\}} = \{0\}$$

$$\{0\}^{\{0\}}$$

$$\frac{\{0\}}{kkc} = \{0\}$$

$$\frac{\{\infty\}}{kkc} = \{\infty\}$$

$$\frac{kkc}{\{\infty\}} = \{0\}$$

$$\frac{\{0\}}{\{0\}}$$

$$\frac{kkc}{\{0^+\}} = \{\infty\}$$

$$\frac{kkc}{\{0^-\}} = \{-\infty\}$$

$$\frac{\{\infty\}}{\{\infty\}}$$