Ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Gaussovou eliminační metodou

Studijní materiály

Pro listování dokumentem NEpoužívejte kolečko myši
nebo zvolte možnost *Full Screen*.

Brno 2014

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Obsah

Soustavu m lineárních algebraických rovnic o n neznámých.

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1}$$

můžeme zapsat maticově

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{nebo ještě stručněji} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{2}$$

Řešením soustavy (1) nazýváme každý systém $k_1, k_2, \ldots, k_n$ (můžeme také říci každou matici $\boldsymbol{k}^T = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$), takový, že když čísla $k_1, k_2, \ldots, k_n$ dosadíme za neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_n$ do levých stran rovnic (1), jsou všechny tyto rovnice zároveň splněny.

Řešit soustavu (1) znamená najít *všechna* její řešení.

Frobeniova věta o řešení soustavy lineárních rovnic

Je-li $\boldsymbol{n}$ počet neznámých v soustavě (1) a označíme-li $\boldsymbol{h}$ hodnost matice soustavy (matice zcela ***vlevo***) ve vztahu (2) a $\boldsymbol{h_r}$ hodnost matice rozšířené (matice zcela ***vpravo***), potom

Nutnou a postačující podmínkou, aby soustava lineárních rovnic o $\boldsymbol{n}$ neznámých byla řešitelná, je, aby matice soustavy a rozšířená matice měly stejnou hodnost.

Důsledek ***Frobeniovy věty***:
$h \neq h_r$ soustava **nemá** řešení;
$h = h_r = n$ soustava má **právě jedno** řešení;
$h = h_r < n$ soustava má **nekonečně mnoho** řešení ($n - h$ neznámých můžeme vždy vhodně zvolit a ostatní pomocí nich vypočítat).

Někdy se tato výše uvedená věta [1] označuje také jako věta Kronecker–Capelli. Nyní si ukážeme jednu z metod na výpočet kořenů soustavy (1).

Gaussova (Jordanova) eliminační metoda — GEM

Tento postup je nazván po matematikovi, který ji poprvé podrobně popsal ve dvou krocích (chodech). Jinak již číňané hluboko před naším letopočtem používali podobný postup pro řešení speciálních *(neu-*

---

[1] V matematice se historicky ustálilo nazývat podobné výroky ***větou***. Ovšem stejně dobře bychom mohli použít například: *Frobenius řekl, tvrdil, napsal, dokázal že, ...*

měli použít obecně na libovolnou soustavu) soustav rovnic.

Zmíněnou metodu si odvodíme na následujícím příkladu, kdy budeme řešit soustavu tří lineárních algebraických rovnic o třech neznámých sčítací metodou, kterou znáte ze střední školy. Její princip spočívá v tom, že některou z rovnic vynásobíme vhodným ***nenulovým*** číslem a přičteme ji k jiné rovnici tak, aby se vyrušila (***eliminovala***) jedna proměnná.

- Například požadujeme, aby se proměnná ***x*** vyskytovala ***pouze v první*** rovnici.

  Tedy ji postupně vyloučíme ze druhé a třetí (*zbývajících*) rovnice tak, že ***první*** rovnici budeme postupně násobit vhodným nenulovým číslem a přičítat k ostatním rovnicím.

- Ve ***druhé*** fázi požadujeme, aby se proměnná ***y*** nevyskytovala ve třetí rovnici.

  Proto ***druhou*** rovnici vynásobíme vhodným číslem a přičteme ke třetí rovnici. Tímto způsobem ve třetí rovnici zůstane pouze neznámá ***z***, takže řešíme jednu rovnici o jedné neznámé.

  Kdybychom místo se ***druhou*** *rovnicí „pracovali“ (přičítali její nenulový násobek) s PRVNÍ rovnicí, dostali bychom ve třetí rovnici opět proměnnou* **x** *a to nechceme.*

- Vypočítanou hodnotu neznámé ***z*** dosadíme zpět do zbylých rovnic a tím najdeme i ostatní kořeny původního systému.

Nejprve ze druhé rovnice vypočítáme ***y*** a po jeho dosazení potom z první rovnice i ***x***.

Vše si ukážeme na následujícím příkladu.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

$$x + 2y - 2z = 0$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad \mid \cdot(-2) \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ -y + 6z &= 9 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad | \cdot(-2) \cdot(-3)\\ 2x + 3y + 2z &= 9\\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0\\ -y + 6z &= 9\\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 0 \quad \mid \cdot(-2)\ \cdot(-3)\\ 2x+3y+2z &= 9\\ 3x+7y-8z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 0\\ -y+6z &= 9\\ y-2z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 0 \quad /1\\ -y+6z &= 9 \quad /2 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{array}{rrl} x + 2y - 2z = & 0 & \mid \cdot(-2)\ \cdot(-3) \\ 2x + 3y + 2z = & 9 & \\ 3x + 7y - 8z = & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} x + 2y - 2z = & 0 & \\ -y + 6z = & 9 & \mid \cdot(1) \\ y - 2z = & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} x + 2y - 2z = & 0 & /1 \\ -y + 6z = & 9 & /2 \\ 4z & 8 & / \end{array}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 0 & &\mid \cdot(-2)\ \cdot(-3)\\ 2x+3y+2z &= 9\\ 3x+7y-8z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 0\\ -y+6z &= 9 & &\mid \cdot(1)\\ y-2z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 0 & &/1\\ -y+6z &= 9 & &/2\\ 4z &= 8 & &/3 \Rightarrow z = 2 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé $\boldsymbol{z}$

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x+2y-2z&=0 \quad \Big|\ \cdot(-2)\ \cdot(-3)\\ 2x+3y+2z&=9\\ 3x+7y-8z&=-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y-2z&=0\\ -y+6z&=9 \quad \Big|\ \cdot(1)\\ y-2z&=-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y-2z&=0 \quad /1\\ -y+6z&=9 \quad /2\\ 4z&=8 \quad /3 \Rightarrow z=2 \end{aligned}$$

$$-y+6\cdot 2=9 \quad /2$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z***
a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{array}{rl} x + 2y - 2z = 0 & \mid \cdot(-2)\ \cdot(-3) \\ 2x + 3y + 2z = 9 & \\ 3x + 7y - 8z = -1 & \end{array}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

$$\begin{array}{rl} x + 2y - 2z = 0 & \\ -y + 6z = 9 & \mid \cdot(1) \\ y - 2z = -1 & \end{array}$$

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

$$\begin{array}{rl} x + 2y - 2z = 0 & /1 \\ -y + 6z = 9 & /2 \\ 4z = 8 & /3 \Rightarrow z = 2 \end{array}$$

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z***
a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

$$-y + 6 \cdot 2 = 9 \quad /2$$

Vypočítáme ***y***

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x+2y-2z&=0 \quad \mid \cdot(-2)\ \cdot(-3)\\ 2x+3y+2z&=9\\ 3x+7y-8z&=-1 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

$$\begin{aligned} x+2y-2z&=0\\ -y+6z&=9 \quad \mid \cdot(1)\\ y-2z&=-1 \end{aligned}$$

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

$$\begin{aligned} x+2y-2z&=0 \quad /1\\ -y+6z&=9 \quad /2\\ 4z&=8 \quad /3 \Rightarrow z=2 \end{aligned}$$

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z*** a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

$$-y+6\cdot 2=9 \quad /2 \Rightarrow y=3$$

Vypočítáme ***y*** a (včetně ***z***) dosadíme do první rovnice.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 0 \quad | \cdot(-2) \cdot(-3) \\ 2x+3y+2z &= 9 \\ 3x+7y-8z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 0 \\ -y+6z &= 9 \quad | \cdot(1) \\ y-2z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 0 \quad /1 \\ -y+6z &= 9 \quad /2 \\ 4z &= 8 \quad /3 \Rightarrow z = 2 \end{aligned}$$

$$-y+6\cdot 2 = 9 \quad /2 \Rightarrow y = 3$$

$$x+2\cdot 3-2\cdot 2 = 0 \quad /1$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z***
a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.
Vypočítáme ***y*** a (včetně ***z***) dosadíme do první rovnice.
Potom již můžeme určit hodnotu zbývající proměnné ***x***.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x+2y-2z&=0 \quad \big|\ \cdot(-2)\ \ \cdot(-3)\\ 2x+3y+2z&=9\\ 3x+7y-8z&=-1\end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

$$\begin{aligned} x+2y-2z&=0\\ -y+6z&=9 \quad \big|\ \cdot(1)\\ y-2z&=-1\end{aligned}$$

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

$$\begin{aligned} x+2y-2z&=0 \quad /1\\ -y+6z&=9 \quad /2\\ 4z&=8 \quad /3 \Rightarrow z=2\end{aligned}$$

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z*** a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

$$-y+6\cdot 2=9 \quad /2 \Rightarrow y=3$$

Vypočítáme ***y*** a (včetně ***z***) dosadíme do první rovnice.

$$x+2\cdot 3-2\cdot 2=0 \quad /1 \Rightarrow x=-2$$

Potom již můžeme určit hodnotu zbývající proměnné ***x***.

První část výpočtu (která je psána černě — ***přímý chod***), můžeme pomocí matic zapsat následovně

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&0\\2&3&2&9\\3&7&-8&-1\end{array}\right]\begin{array}{l}\cdot(-2)\ \ \cdot(-3)\\ \\ \\ \end{array}$$

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= \ \ 0 \quad \Big| \ \cdot(-2)\ \cdot(-3)\\ 2x+3y+2z &= \ \ 9 \\ 3x+7y-8z &= -1 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= \ \ 0 \\ -y+6z &= \ \ 9 \quad \Big| \ \cdot(1)\\ y-2z &= -1 \end{aligned}$$

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= \ \ 0 \quad /1\\ -y+6z &= \ \ 9 \quad /2\\ 4z &= \ \ 8 \quad /3 \Rightarrow z=2 \end{aligned}$$

$$-y+6\cdot 2 = \ \ 9 \quad /2 \Rightarrow y=3$$

$$x+2\cdot 3-2\cdot 2 = \ \ 0 \quad /1 \Rightarrow x=-2$$

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z*** a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

Vypočítáme ***y*** a (včetně ***z***) dosadíme do první rovnice.

Potom již můžeme určit hodnotu zbývající proměnné ***x***.

První část výpočtu (která je psána černě — ***přímý chod***), můžeme pomocí matic zapsat následovně

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 9\\ 3 & 7 & -8 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l}\cdot(-2)\ \cdot(-3)\\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 6 & 9\\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(1)\\ \\ \end{array}$$

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 0 \quad \mid \cdot(-2)\ \cdot(-3)\\ 2x+3y+2z &= 9\\ 3x+7y-8z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 0\\ -y+6z &= 9 \quad \mid \cdot(1)\\ y-2z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 0 \quad /1\\ -y+6z &= 9 \quad /2\\ 4z &= 8 \quad /3 \Rightarrow z=2 \end{aligned}$$

$$-y+6\cdot 2 = 9 \quad /2 \Rightarrow y=3$$

$$x+2\cdot 3-2\cdot 2 = 0 \quad /1 \Rightarrow x=-2$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z***
a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.
Vypočítáme ***y*** a (včetně ***z***) dosadíme do první rovnice.
Potom již můžeme určit hodnotu zbývající proměnné ***x***.

První část výpočtu (která je psána černě — ***přímý chod***), můžeme pomocí matic zapsat následovně

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 9\\ 3 & 7 & -8 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2)\ \cdot(-3)\\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 6 & 9\\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(1)\\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 6 & 9\\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

a pomocí Frobeniovy věty (o hodnostech matic) rozhodnout o existenci a počtu řešení.

Při provádění zpětného chodu také můžeme rozhodnout o existenci a počtu řešení.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x+2y-2z&=0 \quad \big|\ \cdot(-2)\ \cdot(-3)\\ 2x+3y+2z&=9\\ 3x+7y-8z&=-1\end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

$$\begin{aligned} x+2y-2z&=0\\ -y+6z&=9 \quad \big|\ \cdot(1)\\ y-2z&=-1\end{aligned}$$

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

$$\begin{aligned} x+2y-2z&=0 \quad /1\\ -y+6z&=9 \quad /2\\ 4z&=8 \quad /3 \Rightarrow z=2\end{aligned}$$

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z*** a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

$$-y+6\cdot 2=9 \quad /2 \Rightarrow y=3$$

Vypočítáme ***y*** a (včetně ***z***) dosadíme do první rovnice.

$$x+2\cdot 3-2\cdot 2=0 \quad /1 \Rightarrow x=-2$$

Potom již můžeme určit hodnotu zbývající proměnné ***x***.

První část výpočtu (která je psána černě — ***přímý chod***), můžeme pomocí matic zapsat následovně

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&0\\2&3&2&9\\3&7&-8&-1\end{array}\right] \begin{array}{l}\cdot(-2)\ \cdot(-3)\\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&0\\0&-1&6&9\\0&1&-2&-1\end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(1)\\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&0\\0&-1&6&9\\0&0&4&8\end{array}\right]$$

a pomocí Frobeniovy věty (o hodnostech matic) rozhodnout o existenci a počtu řešení.

A pokud řešení existuje, pak poslední matici (odspodu nahoru) opět přepíšeme do rovnic (***zpětný chod***) a řešíme tak, jak je to popsáno červenou barvou.

Při provádění zpětného chodu také můžeme rozhodnout o existenci a počtu řešení.

Gaussova metoda postupných eliminací je postup, kdy rozšířenou matici soustavy (2 vpravo) převádíme na stupňový (schodovitý, trojúhelníkový) tvar ⟹ nazýváme **přímý chod**.

Poté takto upravenou matici znovu přepíšeme jako soustavu rovnic a postupně vyčíslujeme jednotlivé neznámé. Tento proces určování neznámých nazýváme **zpětný chod**.

Pokud se nespokojíme se stupňovitým tvarem rozšířené matice soustavy, ale nejenom **pod** ale i **nad** prvním nenulovým prvkem v každém řádku úpravou získáme nuly a navíc každý řádek vydělíme jediným nenulovým prvkem daného řádku (v řádku matice soustavy tak bude pouze jedna jednička a jinak samé nuly; případné další nenulové prvky převedeme do rozšířené matice soustavy), nazýváme tento postup **Jordanovou metodou**. Jde vlastně o modifikaci Gaussovy eliminační metody, kdy převádíme matici soustavy pomocí elementárních úprav na matici jednotkovou.

Je třeba upozornit na fakt, že u soustavy, která má nekonečně mnoho řešení, ne vždy můžeme volit parametr za libovolnou neznámou. Například řešme soustavu

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 4 \\ -4x + 3y + 6z &= 7 \end{aligned} \tag{3}$$

Napišme rozšířenou matici soustavy (3), kterou ekvivalentními úpravami (ekvivalentní soustavy mají stejná řešení) budeme převádět na stupňový tvar. Chceme-li při výpočtech současně provádět i zkoušku správnosti prováděných výpočtů, přidáme ještě další sloupec obsahující součet daného řádku. To ale v tomto jednoduchém případě není nutné.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 6 & 7 \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot 2 \\ \rfloor \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

Přepíšeme-li tuto matici nazpět jako soustavu rovnic

$$\begin{array}{rl} 2x + y - 3z = & 4 \\ 5y \qquad = & 15 \end{array}$$

pak ze druhé rovnice plyne $y = 3$. Tedy za $\boldsymbol{y}$ si nemůžeme volit parametr.
Ale můžeme volit například $x = 3p + 2$. Dosadíme-li za $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ do první rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3p + 2) + (3) - 3z &= 4 \\ 6p + 4 + 3 - 3z &= 4 \\ 6p + 7 - 3z &= 4 \quad | + 3z - 4 \\ 6p + 3 &= 3z \quad | : 3 \\ 2p + 1 &= z \end{aligned}$$

Kořeny zadané soustavy rovnic jsou:

$$\begin{aligned} x &= 3p + 2 \\ y &= 3 \\ z &= 2p + 1 \end{aligned}$$

Pak pro každé reálné $\boldsymbol{p}$, které si zvolíme, dostaneme řešení dané soustavy.

$$p = 0 \qquad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$p = 1 \qquad \begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 3 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

Řešme soustavu

$$\begin{aligned} x - 2y - 5z &= 2 \\ 2x + 3y - z &= -1 \\ -8x - 19y - 5z &= 7 \end{aligned} \tag{4}$$

Malými římskými číslicemi budeme v dalším označovat řádky matice.

Symbol ***ii* + *i* . (– 2)** pak popisuje, že:
první řádek vynásobíme mínus dvěma a přičteme ke druhému řádku;
nebo jinak řečeno:
od druhého řádku odečteme dvojnásobek prvního řádku.

$$\begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -2 & -5 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 3 \\ -8 & -19 & -5 & 7 & -25 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ ii + i \cdot (-2) \sim \\ iii + i \cdot (8) \end{array}$$

$$\Sigma$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -2 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 7 & 9 & -5 & 11 \\ 0 & -35 & -45 & 23 & -57 \end{array}\right] \; iii + ii \cdot (5) \quad \sim \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -2 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 7 & 9 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$h = 2 < h_r = 3$ tedy podle Frobeniovy věty daná soustava **nemá řešení.**

Pokud bychom přímo prováděli zpětný chod, tak poslední rovnice by byla

$$\begin{aligned} 0\,x + 0\,y + 0\,z &= -2 \\ 0 &\neq -2 \end{aligned}$$

což evidentně nemá řešení.

Cvičení

1. **Řešte soustavu lineárních rovnic**

$$\begin{array}{rcr} x + 2y & = & 3 \\ 4x + 5y & = & 6 \end{array} \tag{5}$$

Řešení: 1. Gaussovou metodou postupných eliminací

Přímý chod

$$\left[\begin{array}{cc|c|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \end{array}\right] ii - i \cdot (4) \sim \left[\begin{array}{cr|r|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right]$$

Zpětný chod

$$\begin{array}{rcr} x + 2y & = & 3 \\ -3y & = & -6 \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{rcl} x + 2 \cdot (2) & = & 3 \\ y & = & 2 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{rcr} x & = & -1 \\ y & = & 2 \end{array}$$

Řešení: 2. Jordanovou metodou (modifikace Gaussovy metody)

$$\left[\begin{array}{cc|c|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \end{array}\right] ii + i \cdot (-4) \sim \left[\begin{array}{cr|r|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right] ii : (-3) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] i + ii \cdot (-2) \sim \left[\begin{array}{cc|r|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{rcr} x & = & -1 \\ y & = & 2 \end{array}$$

2. **Řešte soustavu lineárních rovnic**

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 9 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 9x_4 & = & 3 \end{array} \tag{6}$$

Řešení: 1. Gaussovou metodou postupných eliminací

Přímý chod:
$$\left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 9 & 10 \\ 2 & -1 & 4 & 9 & 3 & 17 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ ii + i \cdot (-2) \\ iii + i \cdot (-1) \\ iv + i \cdot (-2) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & 9 & 7 \\ 0 & -7 & 8 & 7 & 3 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ iii + ii \cdot (-3) \\ iv + ii \cdot (-7) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ iv + iii \cdot (-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

Zpětný chod:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - 6x_4 &= 9 \\ 6x_4 &= -6 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice plyne $x_4 = -1\,.$

Tuto hodnotu dosadíme do předposlední rovnice: $x_3 - 6\cdot(-1) = 9$ $x_3 = 3\,.$

Obě spočítané hodnoty dosadíme do druhé rovnice: $-x_2 + (3) + (-1) = 0$ $x_2 = 2\,.$

Všechny hodnoty dosadíme do první rovnice: $x_1 + 3\cdot(2) - 2\cdot(3) + (-1) = 0$ $x_1 = 1\,.$

$$\boldsymbol{X}^T = (\,1\,;2\,;3\,;-1\,)$$

Řešení: 2. Jordanovou metodou

Výše uvedený zpětný chod můžeme provádět přímo v již upravené matici, kterou převedeme na matici jednotkovou. Tento postup (modifikaci Gaussovy metody) nazýváme jak již bylo dříve uvedeno **metodou Jordanovou.**

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ iii + iv\cdot(1) \\ iv : (6) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} i + iv \cdot (-1) \\ ii + iv \cdot (-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} i + iii \cdot (2) \\ ii + iii \cdot (-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} i + ii \cdot (3) \\ ii \cdot (-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{X} = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{array}\right]$$