Ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Hodnost matice

Studijní materiály

Pro listování dokumentem NEpoužívejte kolečko myši
nebo zvolte možnost *Full Screen*.

Brno 2014

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Matice ve schodovitém (stupňovém, trojúhelníkovém) tvaru má vždy **pod** prvním nenulovým prvkem (bráno zleva) v daném sloupci a všech předchozích samé nuly.

Například $A = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ je matice ve schodovitém tvaru.

Hodnost matice

Hodnost matice je počet nenulových řádků (tj. řádků, ve který se vyskytuje alespoň jeden prvek různý od nuly) matice ve schodovitém tvaru.

Tedy uvedená matice $\boldsymbol{A}$ má hodnost: $h \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3\,.$ Což zapisujeme $h\,(\boldsymbol{A}) = 3$ nebo jenom $h\,\boldsymbol{A} = 3\,.$

Elementární úpravy matice jsou takové, při kterých se nemění hodnost matice.

Elementární úpravy matice nazýváme též ***Ekvivalentní operace s maticemi***.

Jsou analogické s úpravami prováděnými při řešení soustavy rovnic sčítací (součtovou) metodou.

Hodnost matice se nemění:

1. vyměníme-li v matici řádky za sloupce $\Longrightarrow$ transponování matice;
2. vyměníme-li navzájem dva řádky,
   vyměníme-li navzájem dva sloupce;
3. vynásobíme-li kterýkoliv řádek nenulovým číslem $k \neq 0$,
   vynásobíme-li kterýkoliv sloupec nenulovým číslem $k \neq 0$;
4. přičteme-li nenulový ***k***–násobek $(k \neq 0)$ libovolného řádku k jinému řádku,
   přičteme-li nenulový **k**–*násobek* $(k \neq 0)$ *libovolného sloupce k jinému sloupci*;
5. přidáme-li nový řádek, který je nenulovým násobkem libovolného řádku,
   přidáme-li nový sloupec, který je nenulovým násobkem libovolného sloupce;
6. vynecháme-li řádek, který je nenulovým násobkem libovolného řádku,
   vynecháme-li sloupec, který je nenulovým násobkem libovolného sloupce;

Provedeme-li s maticí $\boldsymbol{A}$ libovolnou elementární (ekvivalentní) úpravu, dostaneme novou matici $\boldsymbol{B}$, což zapíšeme $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

Přičítání nenulového násobku libovolného řádku k jinému řádku můžeme zobecnit následujícím způsobem. *Vezmeme nenulové násobky libovolných řádků (každý řádek může být násoben jiným nenulovým číslem). Jejich součet, který nazýváme* ***lineární kombinací*** *těchto řádků vytvoří nový řádek, který teprve přičteme k jinému řádku.*

Ve smyslu předchozího zobecnění, můžeme některé z uvedených elementárních operací rozšířit následovně:

4. přičteme-li k libovolnému řádku lineární kombinaci ostatních řádků,
   přičteme-li k libovolnému sloupci lineární kombinaci ostatních sloupců;

5. přidáme-li nový řádek, který je lineární kombinací libovolných řádků,
   přidáme-li nový sloupec, který je lineární kombinací libovolných sloupců;

6. vynecháme-li řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků,
   vynecháme-li sloupec, který je lineární kombinací ostatních sloupců;

Při určování **hodnosti matice** $\boldsymbol{A}$ postupujeme tak, že matici $\boldsymbol{A}$ za použití elementárních úprav s řádky převedeme na matici $\boldsymbol{B}$ $(\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B})$, která je ve stupňovém (schodovitém) tvaru. Vypustíme řádky obsahující samé nuly a počet zbylých řádků pak odpovídá hodnosti matice $\boldsymbol{A}$.

1. pozn. Na řádky se dobrovolně omezíme pouze z důvodů analogie řešení soustavy lineárních rovnic sčítací (součtovou) metodou. Při určování hodnosti matice můžeme samozřejmě pracovat i s jejími sloupci, což ale přináší zvýšené riziko zavlečení chyb při výpočtu.

2. pozn. Zobecnění na lineární kombinace lze nahradit několika postupnými kroky, kdy budeme násobit pouze jediný řádek.

Pro větší přehlednost na pravé straně matice budeme zaznamenávat prováděné operace, kdy malými římskými číslicemi označujeme příslušný řádek. Zápis $ii + i \cdot (-2)$ potom znamená, že ***první řádek vynásobíme mínus dvěma a přičteme ke druhému řádku*** nebo jinak *od druhého (ii) řádku odečteme dvojnásobek (−2) prvního (i) řádku*.

Cvičení

1. Vypočtěte hodnost matice $\quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 13 & 6 \end{bmatrix}$

Řešení:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 13 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ ii + i \cdot (-2) \\ iii + i \cdot (-1) \\ iv + i \cdot (-5) \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ iii + ii \\ iv + ii \cdot (-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad h\,(\boldsymbol{A}) = 2.$$

2. Stanovte hodnost matice $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{bmatrix}$

Řešení: $$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ ii + i \cdot (-2) \\ iii + i \cdot (2) \\ iv + i \cdot (-1) \end{array} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ iii \\ ii \\ iv + iii \cdot (-1) \end{array} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad h\,(\boldsymbol{B}) = 3.$$

Případně můžeme použít také následující naznačení prováděných operací:

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ ii + i \cdot (-2) \\ iii + i \cdot (2) \\ iv + i \cdot (-1) \end{array} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{bmatrix} \begin{array}{ccc} (-2) & (2) & (-1) \\ & & \\ & & \\ & & \end{array}$$

3. Určete hodnost matice $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 10 \end{bmatrix}$

Řešení:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ii + i \cdot (-2) \\ iii + i \cdot (-3) \\ iv + i \cdot (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ iii + ii \cdot (-2) \\ iv + ii \cdot (-3) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad h\,(\boldsymbol{C}) = 2.$$

4. Určete hodnost matice $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Řešení:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} iii \\ ii \\ i \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 16 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ii + i \cdot (-1) \\ iii + i \cdot (-2) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -9 & 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ iii + ii \cdot (3) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad h\,(\boldsymbol{D}) = 2.$$

5. Určete hodnost matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 10 & 5 & 30 \end{bmatrix}$

Řešení: $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 10 & 5 & 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ii + i \cdot (-3) \\ iii + ii \cdot (-4) \\ iv + ii \cdot (-5) \end{matrix} \sim$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & -13 & -10 & -2 & -6 \\ 0 & -15 & -41 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -45 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ii + iii \cdot (-1) \\ \\ iv : (-45) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 31 & 1 & 14 \\ 0 & -15 & -41 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ii + iv \cdot (-30) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & -15 & -41 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ iii + ii \cdot (8) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & -33 & 5 & 92 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ iii \\ iv \\ ii + iii \cdot (-2) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -33 & 5 & 92 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 67 & -9 & -170 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ iv + iii \cdot (-67) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -33 & 5 & 92 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -170 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad h\left(\boldsymbol{A}\right) = 4.$$

6. Určete hodnost matice $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & \lambda \end{bmatrix}$

Řešení: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & \lambda \end{bmatrix} iii + i \cdot (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} iii + ii \cdot (-2) \sim$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \quad \Rightarrow \quad h(\boldsymbol{B}) = 2 \\ \lambda \neq 5 \quad \Rightarrow \quad h(\boldsymbol{B}) = 3 \end{cases}$$