Ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Inverzní matice

Výpočet Jordanovou metodou

Studijní materiály

Pro listování dokumentem NEpoužívejte kolečko myši
nebo zvolte možnost *Full Screen*.

Brno 2014

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Inverzní matice

Nejprve řešme rovnici $a\,x = b$, kde $a \neq 0$, b jsou reálná čísla.

$$\begin{aligned} a \cdot x &= b \qquad | \cdot a^{-1} \quad \text{(násobíme zleva)} \\ a^{-1} \cdot (a \cdot x) &= a^{-1} \cdot b \\ (a^{-1} \cdot a) \cdot x &= a^{-1} \cdot b \qquad \text{(asociativní zákon)} \\ \underbrace{(\frac{1}{a} \cdot a)}_{1} \cdot x &= a^{-1} \cdot b \\ x &= a^{-1} \cdot b \qquad \text{(protože: } 1 \cdot x = x) \end{aligned}$$

Analogická situace nastává i při řešení maticové rovnice $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, kde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou dané matice a $\boldsymbol{X}$ je matice s neznámými prvky.

Pokud by existovala matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ s vlastností $\boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{E}$ je jednotková matice, mohli bychom danou maticovou rovnici řešit takto:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{B} \qquad | \bullet \boldsymbol{A}^{-1} \quad \text{(násobíme zleva)} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \bullet (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{B} \\ \underbrace{(\boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{A})}_{\boldsymbol{E}} \bullet \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{B} \qquad \text{(asociativní zákon)} \\ \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{B} \qquad \text{(protože: } \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}) \end{aligned}$$

Je proto přirozená následující definice:

Inverzní matice A^{-1} k (regulární) matici A je matice splňující následující vztah:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Z uvedeného vztahu je zřejmé, že inverzní matice existuje jenom ke čtvercové a regulární [1] matici.

Pro určení inverzní matice k matici $\boldsymbol{A}$ existuje několik různých metod, z nichž jedna (nazvaná Jordanova) je následující. Napíšeme matici $[\, \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E} \mid \sum \,]$ takto:

- do levého pole napíšeme matici $\boldsymbol{A}$, ke které hledáme inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}$;
- do prostředního pole napíšeme jednotkovou matici $\boldsymbol{E}$;
- do pravého pole připojíme kontrolní sloupec $\sum$, ve kterém je součet všech čísel daného řádku.

Takto zapsanou matici upravujeme za pomoci **pouze řádkových** elementárních úprav [2] (které jsou analogické s úpravami prováděnými při řešení soustavy rovnic součtovou metodou) tak dlouho, až v levém poli dostaneme jednotkovou matici $\boldsymbol{E}$. V prostředním poli pak bude hledaná inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$. Vztah mezi původní maticí a upravenou budeme označovat $\sim$.

Provedeme-li příslušnou řádkovou elementární úpravu i v kontrolním sloupci, musí se součet v příslušném řádku shodovat s nově vzniklým číslem v kontrolním sloupci.

[1] K singulární matici inverzní matice neexistuje.

[2] Elementární úpravy (ekvivalentní úpravy matice) jsou objasněny v souboru diskutujícím *Hodnost matice*.

Pro větší přehlednost na pravé straně matice budeme zaznamenávat prováděné operace s tím, že malými římskými číslicemi označíme příslušný řádek. Zápis $ii + i \cdot (-3)$ tedy vyjadřuje, že: *každý prvek prvního řádku vynásobíme* ***mínus třemi*** *a přičteme k odpovídajícímu prvku druhého řádku*.

Příklad: Vypočtěte inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\,\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E} \mid \sum\,] =$

$$= \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]\begin{array}{l} ii \\ i \\ iii \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ ii + i \cdot (-2) \sim \\ iii + i \cdot (1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ iii \\ ii \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ iii + ii \cdot (-4) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 & -10 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ ii + iii \cdot (1) \sim \\ iii \cdot (-1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right]\begin{array}{l} i + ii \cdot (1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right] = [\,\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1} \mid \sum\,]$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Zkoušku, to jest výpočet součinu matic $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}$ a součinu

$\boldsymbol{A}^{-1}\bullet\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}$ ponecháváme čtenáři.

Příklad

Určete inverzní matici $\boldsymbol{B}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\3&2&0&0\\1&1&3&4\\2&-1&2&3\end{bmatrix}$

Řešení $[\,\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{E}\,|\,\sum\,]\sim[\,\boldsymbol{E}\,|\,\boldsymbol{B}^{-1}\,|\,\sum\,]$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|c}2&1&0&0&1&0&0&0&4\\3&2&0&0&0&1&0&0&6\\1&1&3&4&0&0&1&0&10\\2&-1&2&3&0&0&0&1&7\end{array}\right]\begin{array}{l}iii\\i+iii\cdot(-2)\\ii+iii\cdot(-3)\\iv+iii\cdot(-2)\end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc|c}1&1&3&4&0&0&1&0&10\\0&-1&-6&-8&1&0&-2&0&-16\\0&-1&-9&-12&0&1&-3&0&-24\\0&-3&-4&-5&0&0&-2&1&-13\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ii\cdot(-1)\\iii+ii\cdot(-1)\\iv+ii\cdot(-3)\end{array}\sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 14 & 19 & -3 & 0 & 4 & 1 & 35 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ iv + iii \cdot (5) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -8 & 5 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ iv \cdot (-1) \\ iii + iv \cdot (-3) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 & -5 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 23 & -14 & 2 & -3 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} i + iv \cdot (4) \\ ii + iv \cdot (8) \\ iii + iv \cdot (1) \\ iv \cdot (-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 92 & -56 & 9 & -12 & 38 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 183 & -112 & 18 & -24 & 72 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 31 & -19 & 3 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -23 & 14 & -2 & 3 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{l} i + iii \cdot (-3) \\ ii + iii \cdot (-6) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 31 & -19 & 3 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -23 & 14 & -2 & 3 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{l} i + ii \cdot (-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 31 & -19 & 3 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -23 & 14 & -2 & 3 & -7 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Příklad

Řešte maticovou rovnici $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Řešení. Maticovou rovnici budeme řešit analogicky jako bychom postupovali při řešení rovnice $a \cdot x \cdot b = c$, kde a, b, c jsou čísla a x neznámá.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{C} \quad | \bullet \boldsymbol{A}^{-1} \text{ (zleva);} \quad \bullet \boldsymbol{B}^{-1} \text{ (zprava)} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{B}^{-1} &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{B}^{-1} \\ (\boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{A}) \bullet \boldsymbol{X} \bullet (\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{B}^{-1}) &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{B}^{-1} \end{aligned}$$

Nyní určíme příslušné inverzní matice Jordanovou metodou.

$$A^{-1}: \left[\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} i + ii \cdot (-1) \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} i \cdot (-1) \\ ii + i \cdot (3) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} i + ii \cdot (1) \\ ii \cdot (-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}: \left[\begin{array}{cc|cc|c} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ ii + i \cdot (2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} ii \cdot (-1) \\ i \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ ii + i \cdot (3) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -9 \end{array}\right] \begin{array}{l} i + ii \cdot (-1) \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ ii \cdot (-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 9 \end{array}\right] \Rightarrow \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Potom $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{B}^{-1}$, kde $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ je:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 12 & -14 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}$$

Ověření, že $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, tedy $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$
ponecháváme čtenáři.