VYSOKÁ ŠKOLA KARLA ENGLIŠE a.s.

Matematika 1 — **základy** lineární algebry a **funkcí**

Studijní materiály

Pro listování dokumentem NEpoužívejte kolečko myši nebo zvolte možnost *Full Screen*.

Brno 2013

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Determinanty a matice

Obsah kapitoly: Determinanty a matice

Determinanty

1. Zavedení pojmu determinant 2. řádu **7**
Definice 11
Cvičení 12

2. Zavedení pojmu determinant 3. řádu **14**
Definice 16
Subdeterminant D_{ij} 17
2.1. Stanovení determinantu 3. řádu rozvojem 17
2.2. Sarrusovo pravidlo pro výpočet determinantu 3. řádu 23
2.3. Cvičení 24

3. Determinanty vyšších řádů **27**
3.1. Stanovení determinantu k. řádu rozvojem 27
3.2. Úpravy determinantů 38
Trojúhelníkový tvar determinantu 41

Matice

4. Matice **49**
4.1. Speciální typy matic 50
Čtvercová matice řádu n 50
Řádková matice 50

Sloupcová matice 50
Nulová matice $\boldsymbol{0}$ 51
Jednotková matice $\boldsymbol{E}$ 51
Transponovaná matice $\boldsymbol{A}^T$ 51
Matice ve schodovitém (stupňovém, trojúhelníkovém) tvaru 52
Regulární matice 52
4.2. Hodnost matice 52
Ekvivalentní operace s maticemi 53
Cvičení 55

5. Operace s maticemi **61**
Rovnost matic: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ 61
Součin matice s číslem: $k \,.\, \boldsymbol{A}$ 62
Součet a rozdíl matic: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ 62
Násobení matic: $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ 67
Vlastnosti násobení matic 77
Cvičení 78

6. Inverzní matice **84**
6.1. Stanovení inverzní matice pomocí jednotkové matice 85
6.2. Stanovení inverzní matice pomocí adjungované matice 87
6.3. Příklad 89
Inverzní matice na základě definice 89
Inverzní matice pomocí úprav jednotkové matice 91
Inverzní matice pomocí adjungované matice 93
Řešení maticové rovnice 95

Historická poznámka

Jak vyplývá z našich současných znalostí [1] o matematických vědomostech ve starověku, mezi první řešitele soustav lineárních rovnic patřili Číňané. V knize *Aritmetika v devíti knihách* ze 2. století před naším letopočtem je uveden algoritmus (nazvaný *van čen*) řešení soustav lineárních rovnic, který je obdobou našeho převodu na *schodovitý (trojúhelníkový) tvar*.

Toto pravidlo, je sice vyloženo na konkrétním příkladu soustavy tří rovnic o třech neznámých, ale je naznačeno dostatečně obecně.

Rozšířilo se i v jiných zemích Východu a vedlo nakonec k pojmu determinantu.

[1] Škrášek, J., Tichý, Z. *Základy aplikované matematiky I.* Praha : SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha. 1983. Strana 222–223.

1. Zavedení pojmu determinant 2. řádu

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

1. Zavedení pojmu determinant 2. řádu

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Sčítací metodou vyloučíme neznámou y.

$$\begin{array}{rcll} a_{11}x + a_{12}y &=& b_1 & |.a_{22} \\ a_{21}x + a_{22}y &=& b_2 & |.(-a_{12}) \\ \hline a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y &=& b_1a_{22} & \\ -a_{21}a_{12}x - a_{12}a_{22}y &=& -b_2a_{12} & \\ \hline \end{array}$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

1. Zavedení pojmu determinant 2. řádu

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Sčítací metodou vyloučíme neznámou y.

$$\begin{array}{rcll} a_{11}x + a_{12}y &=& b_1 & |.a_{22} \\ a_{21}x + a_{22}y &=& b_2 & |.(-a_{12}) \\ \hline a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y &=& b_1a_{22} & \\ -a_{21}a_{12}x - a_{12}a_{22}y &=& -b_2a_{12} & \\ \hline (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x &=& b_1a_{22} - b_2a_{12} & \end{array}$$

Pokud bychom vyloučili neznámou x tak, že první rovnici vynásobíme členem $(-a_{21})$, druhou rovnici členem a_{11} a sečteme je, dostaneme:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

1. Zavedení pojmu determinant 2. řádu

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Sčítací metodou vyloučíme neznámou y.

$$\begin{array}{rl} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & |.a_{22} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & |.(-a_{12}) \\ \hline a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = b_1a_{22} & \\ -a_{21}a_{12}x - a_{12}a_{22}y = -b_2a_{12} & \\ \hline (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} & \end{array}$$

Pokud bychom vyloučili neznámou x tak, že první rovnici vynásobíme členem $(-a_{21})$, druhou rovnici členem a_{11} a sečteme je, dostaneme:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

Vidíme, že závorka na levé straně je v obou případech stejná.

1. Zavedení pojmu determinant 2. řádu

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Sčítací metodou vyloučíme neznámou y.

$$\begin{array}{rl} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & |.a_{22} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & |.(-a_{12}) \\ \hline a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = b_1a_{22} & \\ -a_{21}a_{12}x - a_{12}a_{22}y = -b_2a_{12} & \\ \hline (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} & \end{array}$$

Pokud bychom vyloučili neznámou x tak, že první rovnici vynásobíme členem $(-a_{21})$, druhou rovnici členem a_{11} a sečteme je, dostaneme:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

Vidíme, že závorka na levé straně je v obou případech stejná. Proto je namístě následující definice kdy ke čtvercovému schématu, (tvořenému pouze barevnými koeficienty u proměnných), které sestává ze dvou řádků a dvou sloupců, přiřazujeme určitý výraz tvořený prvky zapsanými do tohoto schématu.

A to ***rozdíl dvou součinů***, který je barevně zapsán do závorek, ze kterých vytkneme jednotlivé proměnné. Tento výraz nazveme determinantem druhého řádu.

Definice

Determinant 2. řádu je výraz $\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22} - \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{21}$
(hodnota, číslo),
který označujeme $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ nebo stručněji
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad .$$

Protože dle definice je determinant 2. řádu *rozdíl součinů vždy dvou prvků*, můžeme říci, že vlastní hodnota determinantu závisí na tom, ze kterých prvků a_{ij} je složen. Tedy například:
— jsou-li **prvky čísla**, je **determinant číslo**;
— jsou-li *prvky mnohočleny*, je *determinant mnohočlen*;
— jsou-li prvky goniometrické funkce, je determinant také funkcí složenou z goniometrických funkcí;
— ...
Nejčastěji se budeme setkávat s determinanty, které mají ve schématu pouze (reálná) čísla.

Hodnotu determinantu 2. řádu určíme snadno pomocí následujícího křížového pravidla:

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11\,+} & & {}_{-}a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{vmatrix}$$

. Pokud ve směru **shora dolů** násobíme **zleva doprava** (tak jak čteme), přiřadíme součinu **kladné znaménko**. V předchozím příkladu značeno modrou barvou.

Násobíme-li *zprava doleva*, opatříme součin *záporným znaménkem* (červeně).

Cvičení

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2$

2. $\begin{vmatrix} a-b & a-c \\ a+c & a+b \end{vmatrix} = (a-b) \cdot (a+b) - (a-c) \cdot (a+c) = a^2 - b^2 - (a^2 - c^2) = c^2 - b^2$

3. $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

4. Určete x tak, aby platilo: $\begin{vmatrix} x & 2x-1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$

Vyčíslíme determinant:

$$\begin{aligned} x \cdot 1 - (2x-1) \cdot 3 &= -2 \\ x - 6x + 3 &= -2 \quad | -3 \\ -5x &= -5 \quad | : (-5) \\ x &= 1 \end{aligned}$$

5. Řešte rovnici a proveďte zkoušku: $\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ 4 & -x \end{vmatrix} = -20$

Vyčíslíme determinant:

$$\begin{aligned} (x-2) \cdot (-x) - 3 \cdot 4 &= -20 \quad |.(-1) \\ x \cdot (x-2) + 12 &= 20 \quad | -20 \\ x^2 - 2x - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Řešíme kvadratickou rovnici dle vzorce: $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{array}$$

Zkouška pro $x = 4$: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot 4 = -8 - 12 = -20$

Zkouška pro $x = -2$: $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -8 - 12 = -20$

Determinant je většinou pouze jinak zapsané číslo.

Například platí: $\mathbf{2} = |-2| = 2! = \sqrt{4} = \binom{2}{1} = \log 100 = (2x)' = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \ldots$

Číslo **2** můžeme například vyjádřit jako:
absolutní hodnotu z čísla minus dva;
dvě faktoriál;
druhou odmocninu ze čtyř;
kombinační číslo dvě nad jednou;
logaritmus při základu deset z čísla sto;
derivaci členu $2x$ (podle x);
deteminant $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$;
...

Ačkoliv determinant 2. řádu je výraz (číslo), hovoří se často o řádcích či sloupcích determinantu [a], takže se termínem „determinant“ míní také sám symbol $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

[a] Správně bychom měli hovořit o řádcích či sloupcích schématu přiřazenému k danému determinantu.

2. Zavedení pojmu determinant 3. řádu

Podobně jako v předchozí kapitole řešme soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z &= b_1\\ a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z &= b_2\\ a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z &= b_3 \end{aligned}$$

Soustavu budeme řešit sčítací metodou tak, že osamostatníme neznámou[2] x.

$$\begin{array}{rll} a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z = b_1 & |.a_{22} & |.a_{32}\\ a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z = b_2 & |.(-a_{12}) & \\ a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z = b_3 & & |.(-a_{12})\\ \hline (a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12})\,x + (a_{13}\,a_{22} - a_{23}\,a_{12})\,z = b_1\,a_{22} - b_2\,a_{12} & |.(a_{33}\,a_{12} - a_{13}\,a_{32}) & \\ (a_{11}\,a_{32} - a_{31}\,a_{12})\,x + (a_{13}\,a_{32} - a_{33}\,a_{12})\,z = b_1\,a_{32} - b_3\,a_{12} & |.(a_{13}\,a_{22} - a_{23}\,a_{12}) & \\ \hline \end{array}$$

Vzhledem ke skutečnosti, že po součtu výše uvedených posledních dvou rovnic bude výsledná rovnice s jedinou neznámou x již poněkud rozsáhlá a nepřehledná, omezíme se pouze na její levou stranu, když ještě vytkneme neznámou.

$$(a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{12} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33}\,a_{12} - a_{11}\,a_{22}\,a_{13}\,a_{32} + a_{21}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{32} + a_{11}a_{32}a_{13}a_{22} -$$
$$- a_{31}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{22} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23}\,a_{12} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23}\,a_{12}) \cdot x = \ldots$$

Po vytknutí a sečtení

$$a_{12}\,(a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + a_{21}\,a_{13}\,a_{32} - a_{31}\,a_{13}\,a_{22} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} + a_{31}\,a_{23}\,a_{12}) \ldots x = \ldots$$

[2] Obdobně můžeme postupovat i pro neznámé y a z. Jen se změní prvek vytknutý před závorku, ale vlastní závorka zůstane stejná.

Nyní vzhledem k platnosti komutativního zákona při násobení (možnost záměny činitelů při součinu) přeskládáme pořadí členů v jednotlivých součinech podle řádkových indexů

$$a_{12}\,(a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31}) \cdot x = \ldots$$

Nyní vzhledem k platnosti komutativního zákona při sčítání (možnost záměny sčítanců při součtu) přeskládáme pořadí jednotlivých součinů podle znamének následovně:

$$a_{12}\,(a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}) \cdot x = \ldots$$

Vzhledem k tvaru poslední závorky a symbolicky zapsané původní soustavě je namístě (analogicky jako u determinantu 2. řádu) následující definice, kdy ke čtvercovému schématu řádu tři, nebo-li typu $(3\ ,\ 3)$ přiřazujeme určitý výraz. Tento výraz nazveme determinantem třetího řádu.

Definice

Determinant 3. řádu je výraz (hodnota, číslo)

$$\boldsymbol{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}},$$

který označujeme $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ nebo stručněji $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

— nebo-li stanovení jeho hodnoty.
Budeme postupovat následovně.

Vezmeme výraz (kterým jsme definovali determinant 3. řádu)

$$\boldsymbol{D} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

a pouze ho trochu přeskládáme tím způsobem, že před závorky vytkneme postupně prvky prvního řádku.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

a vyčíslíme:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Vidíme, že původně zadaný determinant 3. řádu jsme nahradili třemi determinanty 2. řádu, které jsme násobili prvky prvního řádku opatřenými vhodnými znaménky.

Stejně tak jsme mohli přeskládat výraz (kterým jsme definovali determinant 3. řádu) tak, že bychom vytkli před závorku postupně prvky druhého řádku, třetího řádku, prvního sloupce, druhého sloupce nebo třetího sloupce. Jen by se měnily příslušné determinanty 2. řádu ve vztazích analogických ke vztahu (1). Proto zavedeme následující definici.

Subdeterminant D_{ij} vznikne tak, když z původního determinantu $\boldsymbol{D}$ vypustíme (odstraníme) řádek $\boldsymbol{i}$ a sloupec $\boldsymbol{j}$.

Nyní již můžeme vztah (1) přepsat obecně následujícím způsobem.

2.1. Stanovení determinantu 3. řádu rozvojem

$$\boldsymbol{D} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \boldsymbol{D}_{ij} \qquad \text{rozvoj podle řádku } \boldsymbol{i} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{D} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \boldsymbol{D}_{ij} \qquad \text{rozvoj podle sloupce } \boldsymbol{j} \tag{3}$$

Cvičení

Určete hodnotu determinantu rozvojem podle *nějakého* ***řádku*** $\Longrightarrow$ vzorec (2).
Tedy ***řádkový*** index $\boldsymbol{i}$ bude pevně dán a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ se bude měnit.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \sum_{\forall j} (-1)^{i+j} \cdot a_{i;j} \cdot \boldsymbol{D}_{i;j} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} \cdot a_{i;j} \cdot \boldsymbol{D}_{i;j}$$

Cvičení

Determinant rozvineme /vzorec (2)/ podle **3. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se tedy rovná **3**
a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

1. sčítanec: $(-1)^{3+1} \cdot a_{3;1} \cdot \boldsymbol{D}_{3;1} \Longleftarrow$ 3. řádek / 1. sloupec

$$= (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+} \cdot \qquad + (-1)^{3+} \cdot$$

$$= (-1) \cdot [+(-1) \cdot (1) - (3) \cdot (8)] + \qquad +$$

$$=$$

Cvičení

Determinant rozvineme /vzorec (2)/ podle **3. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se tedy rovná **3**
a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

2. sčítanec: $(-1)^{3+2} \cdot a_{3;2} \cdot \boldsymbol{D}_{3;2} \Longleftarrow$ 3. řádek / 2. sloupec

$$= (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+} \quad \cdot$$

$$= (-1)\cdot[+(-1)\cdot(1) - (3)\cdot(8)\,] + [-(-2)]\cdot[+(2)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\,] +$$

$$=$$

Cvičení

Determinant rozvineme /vzorec (2)/ podle **3. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se tedy rovná **3**
a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

3. sčítanec: $(-1)^{3+3} \cdot a_{3;3} \cdot \boldsymbol{D}_{3;3} \Longleftarrow$ 3. řádek / 3. sloupec

$$= (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot [+(-1) \cdot (1) - (3) \cdot (8)\,] + [-(-2)] \cdot [+(2) \cdot (1) - (3) \cdot (1)\,] + (5) \cdot [+(2) \cdot (8) - (-1) \cdot (1)\,] =$$

$$=$$

Cvičení

Determinant rozvineme /vzorec (2)/ podle **3. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se tedy rovná **3**
a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \qquad (-1)^{3+} \cdot a_{3;} \cdot \boldsymbol{D}_{3;} \Longleftarrow 3.\text{ řádek /}$$

$$= (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot[+(-1)\cdot(1) - (3)\cdot(8)] + [-(-2)]\cdot[+(2)\cdot(1) - (3)\cdot(1)] + (5)\cdot[+(2)\cdot(8) - (-1)\cdot(1)] =$$

$$= (-1)\cdot(-1-24) + (+2)\cdot(2-3) + (5)\cdot(16+1) = (-1)\cdot(-25) + 2\cdot(-1) + 5\cdot(17) = 25 - 2 + 85 = 108$$

Zdánlivě nezapamatovatelný vztah z definice se dá celkem snadno vyjádřit (ovšem pouze pro determinant 3. řádu) pomocí následujícího [3] doplněného schématu.

2.2. Sarrusovo pravidlo pro výpočet determinantu 3. řádu

Hodnotu determinantu 3. řádu určíme snadno pomocí následujícího schématu:

$$\boldsymbol{D} = \left|\begin{array}{ccccc|cccc} a_{11_{+}} & & a_{12_{+}} & & {}_{-}a_{13_{+}} & & {}_{-}a_{11} & & {}_{-}a_{12} \\ & \searrow & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \swarrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \searrow & \\ a_{31}{}^{-} & & a_{32}{}^{-} & & {}^{+}a_{33}{}^{-} & & {}^{+}a_{31} & & {}^{+}a_{32} \end{array}\right.$$

kdy nejprve za determinat znovu opíšeme první a druhý sloupec a potom násobíme ve směru šipek, stejně jako u determinantu 2. řádu.

Pokud **shora dolů** násobíme **zleva doprava**, přiřadíme součinu **kladné znaménko**.

Násobíme-li trojici čísel *zprava doleva*, opatříme součin *záporným znaménkem*.

Stejného výsledku dosáhneme, jestliže pod determinant znovu opíšeme první a druhý řádek (třeba na papír, který přiložíme) a opět **shora dolů** násobíme trojici čísel **zleva doprava** s **kladným znaménkem**.

Násobíme-li *zprava doleva*, opatříme součin *záporným znaménkem*.

$$\boldsymbol{D} = \begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{a_{11}} & a_{12} & \multicolumn{1}{c}{a_{13}} \\ \multicolumn{1}{c}{a_{21}} & a_{22} & \multicolumn{1}{c}{a_{23}} \end{array}$$

Zdůrazněme, že uvedené pravidlo neplatí pro determinanty jiného řádu než 3. řádu!

[3] Francouzský matematik Pierre Frideric Sarrus (1798 – 1861).

2.3. Cvičení

1. Určete hodnotu determinantu $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix}$

Řešení: 1. Sarrusovo pravidlo

$$\boldsymbol{D} = 3 \cdot 5 \cdot (-3) + (-2) \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \cdot (-4) - 4 \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot (-4) - (-2) \cdot (-1) \cdot (-3) =$$
$$= -45 - 12 + 16 - 40 + 36 + 6 = -39$$

2. Rozvoj podle prvního řádku

$$\boldsymbol{D} = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$
$$= 3 \cdot (-15 + 12) + 2 \cdot (3 - 6) + 4 \cdot (4 - 10) = -9 - 6 - 24 = -39$$

3. Rozvoj podle druhého řádku

$$\boldsymbol{D} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (6 + 16) + 5 \cdot (-9 - 8) - 3 \cdot (-12 + 4) = 22 - 85 + 24 = -39$$

4. Rozvoj podle třetího řádku

$$\boldsymbol{D} = (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot (-6 - 20) + 4 \cdot (9 + 4) - 3 \cdot (15 - 2) = -52 + 52 - 39 = -39$$

5. Rozvoj podle prvního sloupce

$$\boldsymbol{D} = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-15 + 12) + 1 \cdot (6 + 16) + 2 \cdot (-6 - 20) = -9 + 22 - 52 = -39$$

6. Rozvoj podle druhého sloupce

$$\boldsymbol{D} = (-1)^{1+2} \cdot (-2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (3 - 6) + 5 \cdot (-9 - 8) + 4 \cdot (9 + 4) = -6 - 85 + 52 = -39$$

7. Rozvoj podle třetího sloupce

$$\boldsymbol{D} = (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (4 - 10) - 3 \cdot (-12 + 4) - 3 \cdot (15 - 2) = -24 + 24 - 39 = -39$$

2. Určete hodnotu determinantu $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

Řešení Sarrusovým pravidlem

$$\boldsymbol{D} = 1 \cdot 0 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 6 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \cdot 4 = 27$$

3. Určete hodnotu determinantu $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Řešení rozvojem podle třetího (obsahuje dvě nuly) sloupce

$$\boldsymbol{D} = 0 + 0 + (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (2 + 4) = 18$$

4. Určete hodnotu neznámé x tak, aby platilo: $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix} = -2x$

Řešení Sarrusovým pravidlem

$$\begin{aligned} -x^3 - x + x^3 - x &= -2x \\ -2x &= -2x \quad | + 2x \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Daný vztah platí pro libovolné x.

3. Determinanty vyšších řádů

Připomeňme, že dříve jsme zavedli pojem **subdeterminant** $\boldsymbol{D}_{ij}$ a následně ukázali výpočet determinantu 3. řádu rozvojem podle libovolné jeho řady (vhodného řádku či vhodného sloupce). Tyto vztahy platí i pro determinanty vyšších řádů.

Hodnotu determinantů vyšších řádů určíme analogicky se vztahy (2) a (3).

3.1. Stanovení determinantu *k*. řádu rozvojem

$$\boldsymbol{D} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \boldsymbol{D}_{ij} \qquad \text{rozvoj podle řádku } \boldsymbol{i} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{D} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \boldsymbol{D}_{ij} \qquad \text{rozvoj podle sloupce } \boldsymbol{j} \tag{5}$$

Oproti vztahům (2) a (3) došlo k jediné změně. Horní mez symbolu suma není číslo TŘI ale konstanta $\boldsymbol{k}$, která je ***řádem*** determinantu.

Cvičení

Určete hodnotu determinantu rozvojem podle *nějakého* ***řádku*** $\Longrightarrow$ vzorec (4).
Tedy ***řádkový*** index $\boldsymbol{i}$ bude pevně dán a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ se bude měnit.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \sum_{\forall j} (-1)^{i+j} \cdot a_{i;j} \cdot \boldsymbol{D}_{i;j} = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{i+j} \cdot a_{i;j} \cdot \boldsymbol{D}_{i;j}$$

Cvičení

Determinant rozvineme /vzorec (4)/ podle **4. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se tedy rovná **4**
a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3, 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

1. sčítanec: $(-1)^{4+1} \cdot a_{4;1} \cdot \boldsymbol{D}_{4;1} \Longleftarrow$ 4. řádek / 1. sloupec

$$= (-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+} \cdot \qquad + (-1)^{4+} \cdot$$

$$+(-1)^{4+} \cdot$$

$$= (1)\cdot[+(-1)\cdot(1)\cdot(-1) + (8)\cdot(0)\cdot(3) + (-3)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-3) - (1)\cdot(0)\cdot(-1) - (-1)\cdot(0)\cdot(8)\,]+$$

$+$

$+ \quad +$

$=$

Cvičení

Determinant rozvineme /vzorec (4)/ podle **4. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se tedy rovná **4**
a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3, 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

2. sčítanec: $(-1)^{4+2} \cdot a_{4;2} \cdot \boldsymbol{D}_{4;2} \Longleftarrow$ 4. řádek / 2. sloupec

$$= (-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+} \quad \cdot$$

$$+(-1)^{4+} \quad \cdot$$

$$= (1)\cdot[+(-1)\cdot(1)\cdot(-1) + (8)\cdot(0)\cdot(3) + (-3)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-3) - (1)\cdot(0)\cdot(-1) - (-1)\cdot(0)\cdot(8)\,]+$$
$$+(-2)\cdot[+(2)\cdot(1)\cdot(-1) + (1)\cdot(0)\cdot(3) + (-4)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-4) - (1)\cdot(0)\cdot(2) - (-1)\cdot(0)\cdot(1)\,]+$$
$$+ \quad +$$
$$=$$

Cvičení

Determinant rozvineme /vzorec (4)/ podle **4. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se tedy rovná **4**
a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3, 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

3. sčítanec: $(-1)^{4+3} \cdot a_{4;3} \cdot \boldsymbol{D}_{4;3} \Longleftarrow$ 4. řádek / 3. sloupec

$$= (-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot (0) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{4+} \quad \cdot$$

$$= (1)\cdot[+(-1)\cdot(1)\cdot(-1) + (8)\cdot(0)\cdot(3) + (-3)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-3) - (1)\cdot(0)\cdot(-1) - (-1)\cdot(0)\cdot(8)\,]+$$
$$+(-2)\cdot[+(2)\cdot(1)\cdot(-1) + (1)\cdot(0)\cdot(3) + (-4)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-4) - (1)\cdot(0)\cdot(2) - (-1)\cdot(0)\cdot(1)\,]+$$
$$+0+$$
$$=$$

Vidíme, že v pořadí třetí subdeterminant jsme vůbec nemuseli sestavovat a vyčíslovat, protože prvek $a_{4;3} = 0$ a tím pádem celý součin je také roven NULE.

Cvičení

Determinant rozvineme /vzorec (4)/ podle **4. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se tedy rovná **4**
a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3, 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \qquad \text{4. sčítanec:} \quad (-1)^{4+4} \cdot a_{4;4} \cdot \boldsymbol{D}_{4;4} \Longleftarrow \text{4. řádek / 4. sloupec}$$

$$= (-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot (0) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{4+4} \cdot (5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (1)\cdot[+(-1)\cdot(1)\cdot(-1) + (8)\cdot(0)\cdot(3) + (-3)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-3) - (1)\cdot(0)\cdot(-1) - (-1)\cdot(0)\cdot(8)\,]+$$

$$+(-2)\cdot[+(2)\cdot(1)\cdot(-1) + (1)\cdot(0)\cdot(3) + (-4)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-4) - (1)\cdot(0)\cdot(2) - (-1)\cdot(0)\cdot(1)\,]+$$

$$+0 + (5)\cdot[+(2)\cdot(8)\cdot(0) + (1)\cdot(-3)\cdot(0) + (-4)\cdot(-1)\cdot(1) - (0)\cdot(8)\cdot(-4) - (1)\cdot(-3)\cdot(2) - (0)\cdot(-1)\cdot(1)\,] =$$

$$=$$

Vidíme, že v pořadí třetí subdeterminant jsme vůbec nemuseli sestavovat a vyčíslovat, protože prvek $a_{4;3} = 0$ a tím pádem celý součin je také roven NULE.

Cvičení

Determinant rozvineme /vzorec (4)/ podle **4. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se tedy rovná **4** a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3, 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \qquad (-1)^{4+} \cdot a_{4;} \cdot \boldsymbol{D}_{4;} \Longleftarrow 4.\ \text{řádek} \ /$$

$$= (-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot (0) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{4+4} \cdot (5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (1)\cdot[+(-1)\cdot(1)\cdot(-1) + (8)\cdot(0)\cdot(3) + (-3)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-3) - (1)\cdot(0)\cdot(-1) - (-1)\cdot(0)\cdot(8)\,]+$$
$$+(-2)\cdot[+(2)\cdot(1)\cdot(-1) + (1)\cdot(0)\cdot(3) + (-4)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-4) - (1)\cdot(0)\cdot(2) - (-1)\cdot(0)\cdot(1)\,]+$$
$$+0 + (5)\cdot[+(2)\cdot(8)\cdot(0) + (1)\cdot(-3)\cdot(0) + (-4)\cdot(-1)\cdot(1) - (0)\cdot(8)\cdot(-4) - (1)\cdot(-3)\cdot(2) - (0)\cdot(-1)\cdot(1)\,] =$$

$$= (1)\cdot(+1 + 0 - 0 + 9 + 0 + 0) + (-2)\cdot(-2 + 0 - 0 + 12 - 0 + 0) + (5)\cdot(+0 - 0 + 4 + 0 + 6 + 0) =$$
$$= 1\cdot(10) - 2\cdot(10) + 5\cdot(10) = 10 - 20 + 50 = 40$$

Vidíme, že v pořadí třetí subdeterminant jsme vůbec nemuseli sestavovat a vyčíslovat, protože prvek $a_{4;3} = 0$ a tím pádem celý součin je také roven NULE.

Proto je nejvýhodnější, zvolit si rozvoj podle toho řádku či sloupce, který obsahuje nejvíce nul. V tomto případě počítat rozvoj podle třetího sloupce (viz další strana).

Cvičení

Určete hodnotu determinantu rozvojem podle 3. sloupce

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0+(-1)^{2+3}\cdot(1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}+0+0 = (-1)\cdot(-30+24-1-9-4-20) = 40$$

Cvičení

Určete determinant $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 6 & 28 & 33 & 8 & 25 \\ 10 & 40 & 54 & 13 & 32 \\ 3 & 13 & 17 & 4 & 11 \\ 12 & 48 & 65 & 16 & 43 \\ 8 & 37 & 46 & 11 & 39 \end{vmatrix}$

Řešení: daný determinant rozvineme například podle 1. sloupce.

$$\boldsymbol{D} = 6 \cdot \boldsymbol{D}_{11} - 10 \cdot \boldsymbol{D}_{21} + 3 \cdot \boldsymbol{D}_{31} - 12 \cdot \boldsymbol{D}_{41} + 8 \cdot \boldsymbol{D}_{51} \qquad (6)$$

kde

$$\boldsymbol{D}_{11} = \begin{vmatrix} 40 & 54 & 13 & 32 \\ 13 & 17 & 4 & 11 \\ 48 & 65 & 16 & 43 \\ 37 & 46 & 11 & 39 \end{vmatrix} =$$

$$= 40 \cdot \overset{\mathcal{A}}{\begin{vmatrix} 17 & 4 & 11 \\ 65 & 16 & 43 \\ 46 & 11 & 39 \end{vmatrix}} - 13 \cdot \overset{\mathcal{B}}{\begin{vmatrix} 54 & 13 & 32 \\ 65 & 16 & 43 \\ 46 & 11 & 39 \end{vmatrix}} + 48 \cdot \overset{\mathcal{C}}{\begin{vmatrix} 54 & 13 & 32 \\ 17 & 4 & 11 \\ 46 & 11 & 39 \end{vmatrix}} - 37 \cdot \overset{\mathcal{D}}{\begin{vmatrix} 54 & 13 & 32 \\ 17 & 4 & 11 \\ 65 & 16 & 43 \end{vmatrix}} =$$

$$= 40 \cdot \mathcal{A} - 13 \cdot \mathcal{B} + 48 \cdot \mathcal{C} - 37 \cdot \mathcal{D} = 40 \cdot 108 - 13 \cdot 241 + 48 \cdot (-55) - 37 \cdot (-40) = 27$$

$$\boldsymbol{D}_{21} = \begin{vmatrix} 28 & 33 & 8 & 25 \\ 13 & 17 & 4 & 11 \\ 48 & 65 & 16 & 43 \\ 37 & 46 & 11 & 39 \end{vmatrix} =$$

$$= 28 \cdot \overset{\mathcal{A}}{\begin{vmatrix} 17 & 4 & 11 \\ 65 & 16 & 43 \\ 46 & 11 & 39 \end{vmatrix}} - 13 \cdot \overset{\mathcal{E}}{\begin{vmatrix} 33 & 8 & 25 \\ 65 & 16 & 43 \\ 46 & 11 & 39 \end{vmatrix}} + 48 \cdot \overset{\mathcal{F}}{\begin{vmatrix} 33 & 8 & 25 \\ 17 & 4 & 11 \\ 46 & 11 & 39 \end{vmatrix}} - 37 \cdot \overset{\mathcal{G}}{\begin{vmatrix} 33 & 8 & 25 \\ 17 & 4 & 11 \\ 65 & 16 & 43 \end{vmatrix}} =$$

$$= 28 \cdot \mathcal{A} - 13 \cdot \mathcal{E} + 48 \cdot \mathcal{F} - 37 \cdot \mathcal{G} = 28 \cdot 108 - 13 \cdot 2 + 48 \cdot (-26) - 37 \cdot 40 = 270$$

$$\boldsymbol{D}_{31} = \begin{vmatrix} 28 & 33 & 8 & 25 \\ 40 & 54 & 13 & 32 \\ 48 & 65 & 16 & 43 \\ 37 & 46 & 11 & 39 \end{vmatrix} =$$

$$= 28 \cdot \overset{\mathcal{B}}{\begin{vmatrix} 54 & 13 & 32 \\ 65 & 16 & 43 \\ 46 & 11 & 39 \end{vmatrix}} - 40 \cdot \overset{\mathcal{E}}{\begin{vmatrix} 33 & 8 & 25 \\ 65 & 16 & 43 \\ 46 & 11 & 39 \end{vmatrix}} + 48 \cdot \overset{\mathcal{H}}{\begin{vmatrix} 33 & 8 & 25 \\ 54 & 13 & 32 \\ 46 & 11 & 39 \end{vmatrix}} - 37 \cdot \overset{\mathcal{I}}{\begin{vmatrix} 33 & 8 & 25 \\ 54 & 13 & 32 \\ 65 & 16 & 43 \end{vmatrix}} =$$

$$= 28 \cdot \mathcal{B} - 40 \cdot \mathcal{E} + 48 \cdot \mathcal{H} - 37 \cdot \mathcal{I} = 28 \cdot 241 - 40 \cdot 2 + 48 \cdot (-57) - 37 \cdot 90 = 602$$

$$\boldsymbol{D}_{41} = \begin{vmatrix} 28 & 33 & 8 & 25 \\ 40 & 54 & 13 & 32 \\ 13 & 17 & 4 & 11 \\ 37 & 46 & 11 & 39 \end{vmatrix} =$$

$$= 28 \cdot \overset{\mathcal{C}}{\begin{vmatrix} 54 & 13 & 32 \\ 17 & 4 & 11 \\ 46 & 11 & 39 \end{vmatrix}} - 40 \cdot \overset{\mathcal{F}}{\begin{vmatrix} 33 & 8 & 25 \\ 17 & 4 & 11 \\ 46 & 11 & 39 \end{vmatrix}} + 13 \cdot \overset{\mathcal{H}}{\begin{vmatrix} 33 & 8 & 25 \\ 54 & 13 & 32 \\ 46 & 11 & 39 \end{vmatrix}} - 37 \cdot \overset{\mathcal{J}}{\begin{vmatrix} 33 & 8 & 25 \\ 54 & 13 & 32 \\ 17 & 4 & 11 \end{vmatrix}} =$$

$$= 28 \cdot \mathcal{C} - 40 \cdot \mathcal{F} + 13 \cdot \mathcal{H} - 37 \cdot \mathcal{J} = 28 \cdot (-55) - 40 \cdot (-26) + 13 \cdot (-57) - 37 \cdot (-30) = -131$$

$$\boldsymbol{D}_{51} = \begin{vmatrix} 28 & 33 & 8 & 25 \\ 40 & 54 & 13 & 32 \\ 13 & 17 & 4 & 11 \\ 48 & 65 & 16 & 43 \end{vmatrix} =$$

$$= 28 \cdot \overset{\mathcal{D}}{\begin{vmatrix} 54 & 13 & 32 \\ 17 & 4 & 11 \\ 65 & 16 & 43 \end{vmatrix}} - 40 \cdot \overset{\mathcal{G}}{\begin{vmatrix} 33 & 8 & 25 \\ 17 & 4 & 11 \\ 65 & 16 & 43 \end{vmatrix}} + 13 \cdot \overset{\mathcal{I}}{\begin{vmatrix} 33 & 8 & 25 \\ 54 & 13 & 32 \\ 65 & 16 & 43 \end{vmatrix}} - 48 \cdot \overset{\mathcal{J}}{\begin{vmatrix} 33 & 8 & 25 \\ 54 & 13 & 32 \\ 17 & 4 & 11 \end{vmatrix}} =$$

$$= 28 \cdot \mathcal{D} - 40 \cdot \mathcal{G} + 13 \cdot \mathcal{I} - 48 \cdot \mathcal{J} = 28 \cdot (-40) - 40 \cdot 40 + 13 \cdot 90 - 48 \cdot (-30) = -110$$

a po dosazení do (6) dostaneme:

$$\boldsymbol{D} = 6 \cdot 27 - 10 \cdot 270 + 3 \cdot 602 - 12 \cdot (-131) + 8 \cdot (-110) = -40$$

Vidíme, že vyčíslení determinantu 5. řádu není zrovna jednoduché; vede na pět determinantů 4. řádu a každý determinant 4. řádu vede na čtyři determinanty 3. řádu. Celkem musíme určit 10 determinantů 3. řádu, protože každý z determinantů 3. řádů se vyskytuje při výpočtu dvou různých determinantů 4. řádu, jak bylo ukázáno v předchozím příkladu. Například subdeterminant $\mathcal{F}$ byl použit při výpočtu subdeterminantu $\boldsymbol{D}_{21}$ i subdeterminantu $\boldsymbol{D}_{41}$.

Proto je výhodné použít některých operací s determinanty, které nemění jejich hodnotu [4] a pokud možno zjednodušují vyčíslení determinantů.

3.2. Úpravy determinantů

Za všechny jmenujme alespoň tuto nejpoužívanější.

Determinant se nezmění, přičteme-li k jedné jeho řadě libovolný **nenulový** násobek řady s ní rovnoběžné.

Nyní si pomocí této vlastnosti zkusme znovu spočítat předchozí příklad.

Určete determinant $$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 6 & 28 & 33 & 8 & 25 \\ 10 & 40 & 54 & 13 & 32 \\ 3 & 13 & 17 & 4 & 11 \\ 12 & 48 & 65 & 16 & 43 \\ 8 & 37 & 46 & 11 & 39 \end{vmatrix}$$

[4] Případně pouze mění znaménko determinantu, či umožňují za určitých podmínek vytknout výraz před determinant.

Řešení: prováděné úpravy budeme značit ZA a NAD determinantem, kdy římské číslice označují příslušnou řadu (řádek či sloupec).

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 6 & 28 & 33 & 8 & 25 \\ 10 & 40 & 54 & 13 & 32 \\ 3 & 13 & 17 & 4 & 11 \\ 12 & 48 & 65 & 16 & 43 \\ 8 & 37 & 46 & 11 & 39 \end{vmatrix} \; ii + (-3).iii \quad = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & ii - i & & iv - i & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 6 & 28 & 33 & 8 & 25 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 13 & 17 & 4 & 11 \\ 12 & 48 & 65 & 16 & 43 \\ 8 & 37 & 46 & 11 & 39 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} i & & iii - 3i & & v + i \end{array} \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 22 & 15 & 2 & 31 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 8 & 1 & 14 \\ 12 & 36 & 29 & 4 & 55 \\ 8 & 29 & 22 & 3 & 47 \end{vmatrix} \overset{\text{rozvoj 2.ř.}}{=} (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 22 & 15 & 2 & 31 \\ 10 & 8 & 1 & 14 \\ 36 & 29 & 4 & 55 \\ 29 & 22 & 3 & 47 \end{vmatrix} \begin{array}{l} i - 2ii \\ ii \\ iii - 4ii \\ iv - 3ii \end{array} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 10 & 8 & 1 & 14 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{rozvoj 3.s.}}{=} (-1) \cdot (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-3) \cdot 5 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-4) \cdot (-2) - 3 \cdot (-3) \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) -$$
$$- (-1) \cdot (-4) \cdot 5 = -30 - 1 + 24 - 9 - 4 - 20 = -40$$

Je zřejmé, že tento postup je mnohem méně pracný, než předchozí.

(horní) Trojúhelníkový tvar determinantu

(horní) Trojúhelníkový tvar determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 5 & & \\ & & 8 & \\ & & & 10 \end{vmatrix}$$

Hlavní diagonála: $a_{1;1}$, $a_{2;2}$, $a_{3;3}$, … , $a_{n;n}$

(horní) Trojúhelníkový tvar determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & & & 4 \\ & 5 & 6 & \\ & 0 & 8 & \\ 0 & & & 10 \end{vmatrix}$$

Hlavní diagonála: $a_{1;1}$, $a_{2;2}$, $a_{3;3}$, … , $a_{n;n}$

Vedlejší diagonála

(horní) Trojúhelníkový tvar determinantu $\Leftarrow$ **pod hlavní diagonálou jsou pouze *NULY*!**

Všechny ostatní prvky mohou být naprosto libovolné.

$$\begin{vmatrix} 1 & & & 4 \\ 0 & 5 & 6 & \\ 0 & 0 & 8 & \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

Hlavní diagonála: $a_{1;1}$, $a_{2;2}$, $a_{3;3}$, … , $a_{n;n}$

(horní) Trojúhelníkový tvar determinantu $\Longleftarrow$ **pod hlavní diagonálou jsou pouze *NULY*!**

Všechny ostatní prvky mohou být naprosto libovolné.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

Hlavní diagonála: $a_{1;1}$, $a_{2;2}$, $a_{3;3}$, ... , $a_{n;n}$

Hodnotu determinantu 4. řádu určíme **rozvojem podle 1. sloupce** $\Longleftarrow$ má nejvíce nul

(horní) Trojúhelníkový tvar determinantu $\Leftarrow$ **pod hlavní diagonálou jsou pouze *NULY*!**

Všechny ostatní prvky mohou být naprosto libovolné.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = [1] \cdot \left\{ \qquad \qquad \right\} =$$

Hlavní diagonála: $a_{1;1}$, $a_{2;2}$, $a_{3;3}$, … , $a_{n;n}$

Hodnotu determinantu 4. řádu určíme **rozvojem podle 1. sloupce** $\Leftarrow$ má nejvíce nul
(nebo můžeme počítat rozvojem podle *4. řádku* – má také hodně nul).

Hodnotu determinantu 3. řádu určíme opět **rozvojem opět podle 1. sloupce** (nebo 3. řádku).

(horní) Trojúhelníkový tvar determinantu $\Longleftarrow$ **pod hlavní diagonálou jsou pouze *NULY*!**

Všechny ostatní prvky mohou být naprosto libovolné.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = [1] \cdot \left\{ (-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \right\} =$$

Hlavní diagonála: $a_{1;1}$, $a_{2;2}$, $a_{3;3}$, … , $a_{n;n}$

Hodnotu determinantu 4. řádu určíme **rozvojem podle 1. sloupce** $\Longleftarrow$ má nejvíce nul
(nebo můžeme počítat rozvojem podle *4. řádku* – má také hodně nul).

Hodnotu determinantu 3. řádu určíme opět **rozvojem opět podle 1. sloupce** (nebo 3. řádku).

Hodnotu determinantu 2. řádu určíme **křížovým pravidlem**.

$= [1] \cdot [5] \cdot [\qquad\qquad\qquad] =$

(horní) Trojúhelníkový tvar determinantu $\Leftarrow$ **pod hlavní diagonálou jsou pouze *NULY*!**

Všechny ostatní prvky mohou být naprosto libovolné.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = [1] \cdot \left\{ (-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \right\} =$$

Hlavní diagonála: $a_{1;1}$, $a_{2;2}$, $a_{3;3}$, … , $a_{n;n}$

Hodnotu determinantu 4. řádu určíme **rozvojem podle 1. sloupce** $\Leftarrow$ má nejvíce nul
(nebo můžeme počítat rozvojem podle *4. řádku* – má také hodně nul).

Hodnotu determinantu 3. řádu určíme opět **rozvojem opět podle 1. sloupce** (nebo 3. řádku).

Hodnotu determinantu 2. řádu určíme **křížovým pravidlem**.

$$= [1] \cdot [5] \cdot [8 \cdot 10 - 9 \cdot 0] =$$

(horní) Trojúhelníkový tvar determinantu $\Leftarrow$ **pod hlavní diagonálou jsou pouze *NULY*!**

Všechny ostatní prvky mohou být naprosto libovolné.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = [1] \cdot \left\{ (-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \right\} =$$

Hlavní diagonála: $a_{1;1}$, $a_{2;2}$, $a_{3;3}$, … , $a_{n;n}$

Hodnotu determinantu 4. řádu určíme **rozvojem podle 1. sloupce** $\Leftarrow$ má nejvíce nul
(nebo můžeme počítat rozvojem podle *4. řádku* – má také hodně nul).

Hodnotu determinantu 3. řádu určíme opět **rozvojem opět podle 1. sloupce** (nebo 3. řádku).

Hodnotu determinantu 2. řádu určíme **křížovým pravidlem.**

$$= [1] \cdot [5] \cdot [8 \cdot 10 - 9 \cdot 0] = [1] \cdot [5] \cdot [8 \cdot 10] = 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10$$

Hodnotu determinantu (ve schodovitém tvaru),

který má pod hlavní diagonálou pouze nuly,

vypočteme jako součin prvků stojících v hlavní diagonále.

4. Matice

Matice typu (m,n) je uspořádaná soustava $m \times n$ členů zapsaných ve tvaru *tabulky* do $\boldsymbol{m}$ řádků a $\boldsymbol{n}$ sloupců. Obecně jde o prvky zapsané do obdélníkového schématu. Značíme ji

$$\boldsymbol{A}(m,n) = \begin{bmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & \dots & a_{1;j} & \dots & a_{1;n} \\ a_{2;1} & a_{2;2} & \dots & a_{2;j} & \dots & a_{2;n} \\ & & \vdots & & & \\ a_{i;1} & a_{i;2} & \dots & a_{i;j} & \dots & a_{i;n} \\ & & \vdots & & & \\ a_{m;1} & a_{m;2} & \dots & a_{m;j} & \dots & a_{m;n} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Čísla $\boldsymbol{a}_{i;j}$ nazýváme ***prvky*** *matice* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{i}$ nazýváme *řádkovým indexem*, $\boldsymbol{j}$ nazýváme *sloupcovým indexem*.

Spojnice prvků s týmž řádkovým indexem, tedy $a_{1;1}, a_{2;2}, a_{3;3}, \dots, a_{r;r}$ kde $r = \min(m,n)$ nazýváme *hlavní úhlopříčkou* (diagonálou) *matice* $\boldsymbol{A}$ [5].

Někdy se pro matici $\boldsymbol{A}(a_{i;j})$ typu (m,n) používá i označení $\boldsymbol{A}(a_{i;j})_m^n$ nebo jenom $(a_{i;j})_m^n$, případně pouze $\boldsymbol{A}$.

Pojem matice lze definovat i pro prvky jiného charakteru, než jsou čísla. Jsou-li však $\boldsymbol{a}_{ij}$ čísla, hovoříme o **číselné** matici. A to buď reálné matici nebo komplexní matici podle toho, je-li $a_{ij} \in \mathcal{R}$ nebo $a_{ij} \in \mathcal{K}$. Dále se budeme zabývat jen reálnými maticemi.

---

[5] Úhlopříčka ve vlastním slova smyslu je to ovšem jen při $m = n$.

4.1. Speciální typy matic

Čtvercová matice řádu ***n*** má stejný počet řádků a sloupců.

Například matice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ je čtvercová.

Pokud je $m \neq n$, hovoříme o *obdélníkové* matici, nebo jen o matici.

Řádková matice typu $(1, n)$ je tvořena pouze jedním řádkem.

Například řádková matice $[\ 1\ 2\ ]$ je typu $(1, 2)$.

Sloupcová matice typu $(m, 1)$ je tvořena pouze jedním sloupcem.

Například matice $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ a matice $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ jsou sloupcové matice typu $(2, 1)$.

Nulová matice $\boldsymbol{0}$ má všechny prvky rovny nule.

$$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Jednotková matice $\boldsymbol{E}$ je čtvercová matice, která má

v hlavní úhlopříčce (diagonále) pouze **jedničky** a *mimo* ni *nuly*.

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Transponovaná matice $\boldsymbol{A}^T$ k matici $\boldsymbol{A}$ vznikne tak, když řádky matice $\boldsymbol{A}$ napíšeme do sloupců matice $\boldsymbol{A}^T$.

Například první matice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ je transponovaná vzhledem ke druhé matici.

Stejně tak platí: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^T$ Je zřejmé, že $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$.

Říkáme, že jedna matice vznikla vznikla transpozicí matice druhé.

Matice ve schodovitém (stupňovém, trojúhelníkovém) tvaru má vždy **pod** prvním nenulovým prvkem (bráno zleva) v daném sloupci a všech předchozích samé nuly.

Například $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ je matice ve schodovitém tvaru.

Regulární matice $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu $\boldsymbol{n}$ taková, že determinant k ní přiřazený ($\det \boldsymbol{A}$) je různý od nuly $\Longrightarrow$ $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

Matice, která má přiřazený determinant roven nule, se nazývá **singulární**.

4.2. Hodnost matice

Hodnost matice je počet nenulových řádků (tj. řádků, ve který se vyskytuje alespoň jeden prvek různý od nuly) matice ve schodovitém tvaru.

Tedy následující matice má hodnost: $h \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3\,.$

Což pro matici $\boldsymbol{A}$ zapisujeme jako $h\,(\boldsymbol{A}) = 3$ nebo jenom $h\,\boldsymbol{A} = 3\,.$

Ekvivalentní operace s maticemi jsou takové, při kterých se nemění hodnost matice.

Ekvivalentní operace s maticemi nazýváme též ***Elementární úpravy matice***.

Jsou analogické s úpravami prováděnými při řešení soustavy rovnic sčítací (součtovou) metodou.

Hodnost matice se nemění:

1. vyměníme-li v matici řádky za sloupce $\Longrightarrow$ transponování matice;
2. vyměníme-li navzájem dva řádky,
   vyměníme-li navzájem dva sloupce;
3. vynásobíme-li kterýkoliv řádek nenulovým číslem $k \neq 0$,
   vynásobíme-li kterýkoliv sloupec nenulovým číslem $k \neq 0$;
4. přičteme-li nenulový $\boldsymbol{k}$–násobek $(k \neq 0)$ libovolného řádku k jinému řádku,
   přičteme-li nenulový $\mathbf{k}$*–násobek* $(k \neq 0)$ *libovolného sloupce k jinému sloupci*;
5. přidáme-li nový řádek, který je nenulovým násobkem libovolného řádku,
   přidáme-li nový sloupec, který je nenulovým násobkem libovolného sloupce;
6. vynecháme-li řádek, který je nenulovým násobkem libovolného řádku,
   vynecháme-li sloupec, který je nenulovým násobkem libovolného sloupce;

Provedeme-li s maticí $\boldsymbol{A}$ libovolnou ekvivalentní (elementární) úpravu, dostaneme novou matici $\boldsymbol{B}$, což zapíšeme $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

Přičítání nenulového násobku libovolného řádku k jinému řádku můžeme zobecnit následujícím způsobem. *Vezmeme nenulové násobky libovolných řádků (každý řádek může být násoben jiným nenulovým číslem). Jejich součet, který nazýváme **lineární kombinací** těchto řádků vytvoří nový řádek, který teprve přičteme k jinému řádku.*

Ve smyslu předchozího zobecnění, můžeme některé z uvedených elementárních operací rozšířit následovně:

4. přičteme-li k libovolnému řádku lineární kombinaci ostatních řádků,
   přičteme-li k libovolnému sloupci lineární kombinaci ostatních sloupců;
5. přidáme-li nový řádek, který je lineární kombinací libovolných řádků,
   přidáme-li nový sloupec, který je lineární kombinací libovolných sloupců;
6. vynecháme-li řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků,
   vynecháme-li sloupec, který je lineární kombinací ostatních sloupců;

Při určování **hodnosti matice** $\boldsymbol{A}$ postupujeme tak, že matici $\boldsymbol{A}$ za použití elementárních úprav s řádky převedeme na matici $\boldsymbol{B}$ $(\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B})$, která je ve stupňovém (schodovitém) tvaru. Vypustíme řádky obsahující samé nuly a počet zbylých řádků pak odpovídá hodnosti matice $\boldsymbol{A}$.

1. pozn. Na řádky se dobrovolně omezíme pouze z důvodů analogie řešení soustavy lineárních rovnic sčítací (součtovou) metodou. Při určování hodnosti matice můžeme samozřejmě pracovat i s jejími sloupci, což ale přináší zvýšené riziko zavlečení chyb při výpočtu.

2. pozn. Zobecnění na lineární kombinace lze nahradit několika postupnými kroky, kdy budeme násobit pouze jediný řádek.

Pro větší přehlednost na pravé straně matice budeme zaznamenávat prováděné operace, kdy římské číslice označují příslušný řádek. Zápis $ii + (-2).i$ potom znamená, že od druhého (ii) řádku odečteme dvojnásobek (-2) prvního (i) řádku.

Cvičení

1. Vypočtěte hodnost matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 13 & 6 \end{bmatrix}$

Řešení:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 13 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ ii + (-2).i \\ iii + (-1).i \\ iv + (-5).i \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ iii + ii \\ iv + (-1).ii \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad h(\boldsymbol{A}) = 2.$$

2. Stanovte hodnost matice $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{bmatrix}$

Řešení:

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ ii + (-2).i \\ iii + 2.i \\ iv + (-1).i \end{array} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ iii \\ ii \\ iv + (-1).iii \end{array} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad h\,(\boldsymbol{B}) = 3.$$

Případně můžeme použít také následující naznačení prováděných operací:

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ ii + (-2).i \\ iii + 2.i \\ iv + (-1).i \end{array} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{bmatrix} \begin{array}{ccc} (-2) & (2) & (-1) \end{array}$$

3. Určete hodnost matice $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 10 \end{bmatrix}$

Řešení: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ii + (-2).i \\ iii + (-3).i \\ iv + (-1).i \end{matrix} \sim$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ iii + (-2).ii \\ iv + (-3).ii \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad h\,(\boldsymbol{C}) = 2.$$

4. Určete hodnost matice $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Řešení: $$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} iii \\ ii \\ i \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 16 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ ii + (-1).i \\ iii + (-2).i \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -9 & 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ iii + 3.ii \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow h(\boldsymbol{D}) = 2.$$

5. Určete hodnost matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 10 & 5 & 30 \end{bmatrix}$

Řešení: $$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 10 & 5 & 30 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ ii + (-3).i \\ iii + (-4).ii \\ iv + (-5).ii \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & -13 & -10 & -2 & -6 \\ 0 & -15 & -41 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -45 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ ii + (-1).iii \\ \\ iv : (-45) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 31 & 1 & 14 \\ 0 & -15 & -41 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ ii + (-30).iv \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & -15 & -41 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ iii + 8.ii \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & -33 & 5 & 92 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ iii \\ iv \\ ii + (-2).iii \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -33 & 5 & 92 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 67 & -9 & -170 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ iv + (-67).iii \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -33 & 5 & 92 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -170 \end{bmatrix} \implies h(\boldsymbol{A}) = 4.$$

6. Určete hodnost matice $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & \lambda \end{bmatrix}$

Řešení: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & \lambda \end{bmatrix} iii + (-1).i \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} iii + (-2).ii \sim$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \lambda = 5 & \Rightarrow \quad h(\boldsymbol{B}) = 2 \\ \lambda \neq 5 & \Rightarrow \quad h(\boldsymbol{B}) = 3 \end{cases}$$

5. Operace s maticemi

Podobně jako s čísly zavádíme i s maticemi početní operace s příslušnými pravidly.

Rovnost matic: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ Dvě matice $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})$, $\boldsymbol{B} = (b_{i,j})$ téhož typu (m,n) jsou si rovny (píšeme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$), právě když platí: $a_{i,j} = b_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, nebo-li $a_{i,j} = b_{i,j}$; $\forall\, i, j$.

Symbol $\forall i, j$ čteme **pro každé** i, j.

Z této definice a ze známých vlastností reálných čísel vyplývají tyto vlastnosti [6] rovnosti matic:

1. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ reflexivnost
2. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ symetrie
3. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$ tranzitivnost

Každá rovnost mezi maticemi je stručným zápisem právě jedné soustavy rovností mezi příslušnými prvky (čísly). Například:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ t \\ 3-4t \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1+t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= 3-4t \end{aligned}$$

[6] *Relace*, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní, se nazývá **ekvivalence**.

Součin matice s číslem: $\boldsymbol{k \cdot A}$ je matice stejného typu jako násobená matice, jejíž všechny prvky jsou tímto číslem násobeny.

Například

$$(-2)\cdot\begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot(-3) & (-2)\cdot 6 \\ (-2)\cdot 2 & (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -12 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Součet a rozdíl matic: $\boldsymbol{A+B}$, $\boldsymbol{A-B}$. **Součtem matic** $\boldsymbol{A}=(a_{i,j})$, $\boldsymbol{B}=(b_{i,j})$ téhož typu (m,n) rozumíme matici $\boldsymbol{C}=(c_{i,j})$ stejného typu, jejíž prvky jsou: $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$, $\forall i,j$ (píšeme: $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$).

Analogicky **rozdílem matic** $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ téhož typu rozumíme matici $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, pro kterou platí: $c_{i,j}=a_{i,j}-b_{i,j}$, $\forall i,j$. Jinak řečeno: rozdíl dvou matic určíme jako součet těchto matic, z nichž druhá je vynásobena číslem **−1**.

Například

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 5 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

Z uvedených definic a ze známých vlastností reálných čísel vyplývají následující vlastnosti [7] pro libovolné matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ téhož typu a libovolná čísla k, k_1, k_2 :

- pro sčítání matic (kde $\boldsymbol{0}$ je nulová matice stejného typu jako matice $\boldsymbol{A}$)

1. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ komutativní zákon
2. $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$ asociativní zákon pro součet matic
3. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$
4. $\forall \boldsymbol{A}\ \exists(-\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = (-\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$

Vztah č.4 čteme: Ke každé ($\forall$) matici $\boldsymbol{A}$ existuje ($\exists$) matice, kterou nazýváme maticí opačnou k matici $\boldsymbol{A}$ a označujeme $-\boldsymbol{A}$, pro kterou platí (:), že jejich součet je nulová matice ($\boldsymbol{0}$).

- pro násobení matic číslem:

5. $1 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$
6. $k_1 \cdot (k_2 \cdot \boldsymbol{A}) = (k_1 k_2) \cdot \boldsymbol{A}$ asociativní zákon pro násobení matice číslem
7. $(k_1 + k_2) \cdot \boldsymbol{A} = k_1 \cdot \boldsymbol{A} + k_2 \cdot \boldsymbol{A}$ distributivní zákony pro
8. $k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k \cdot \boldsymbol{A} + k \cdot \boldsymbol{B}$ násobení matice číslem

[7] Struktura vyhovující požadavkům 1.– 4. se nazývá **komutativní grupa vzhledem ke sčítání.**
Struktura vyhovující všem požadavkům 1.– 8. se nazývá **vektorový prostor.**

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, kterou požadujeme zapsat symbolicky, kde $\boldsymbol{A}$ je matice koeficientů, $\boldsymbol{X}$ je (sloupcová) matice neznámých a $\boldsymbol{B}$ matice pravých stran.

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{matrix}$$

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, kterou požadujeme zapsat symbolicky, kde $\boldsymbol{A}$ je matice koeficientů, $\boldsymbol{X}$ je (sloupcová) matice neznámých a $\boldsymbol{B}$ matice pravých stran.

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{matrix}$$

Nyní zaveďme násobení matic $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X}$ tak, aby platilo: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix}$

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, kterou požadujeme zapsat symbolicky, kde $\boldsymbol{A}$ je matice koeficientů, $\boldsymbol{X}$ je (sloupcová) matice neznámých a $\boldsymbol{B}$ matice pravých stran.

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{matrix}$$

Nyní zaveďme násobení matic $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X}$ tak, aby platilo: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix}$

Násobení matic: $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$. Součinem matice $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_m^n$ a matice $\boldsymbol{B} = (b_{i,j})_n^p$ **v daném pořadí** je matice $\boldsymbol{C} = (c_{i,j})_m^p$, pro jejíž prvky platí: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$ pro každé $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, p$.

Definice říká, že chceme-li určit prvek součinu dvou matic $\boldsymbol{c}_{i,j}$, musíme ***každý*** člen ***i. řádku*** *první* matice (vlevo – levý index) ***vynásobit*** členem ***j. sloupce*** *druhé* matice (vpravo – pravý index) se ***stejným pořadím*** (první×první + druhý×druhý + …+ poslední×poslední) a tyto ***součiny sečíst***.

Příklad násobení dvou matic: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 4x + 5y \end{bmatrix}$

Pomůžeme si například takto zapsaným postupem:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} x + 2y \\ 4x + 5y \end{bmatrix} \end{array}$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} =$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} =$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ & & & \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & \\ -1 & \\ 2 & \\ -2 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (3)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(-2)\cdot(2)+(4)\cdot(-2) & \\ & \end{bmatrix}$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ & & & \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} & 3 \\ & 2 \\ & -1 \\ & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (3)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(-2)\cdot(2)+(4)\cdot(-2) & (3)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(-2)\cdot(-1)+(4)\cdot(-2) \\ & \end{bmatrix}$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} & & & \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & \\ -1 & \\ 2 & \\ -2 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 3 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (3)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(-2)\cdot(2)+(4)\cdot(-2) & (3)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(-2)\cdot(-1)+(4)\cdot(-2) \\ (2)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(0)\cdot(2)+(-1)\cdot(-2) & \end{bmatrix}$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} & & & \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} & 3 \\ & 2 \\ & -1 \\ & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (3)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(-2)\cdot(2)+(4)\cdot(-2) & (3)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(-2)\cdot(-1)+(4)\cdot(-2) \\ (2)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(0)\cdot(2)+(-1)\cdot(-2) & (2)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(0)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) \end{bmatrix}$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (3)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(-2)\cdot(2)+(4)\cdot(-2) & (3)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(-2)\cdot(-1)+(4)\cdot(-2) \\ (2)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(0)\cdot(2)+(-1)\cdot(-2) & (2)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(0)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) \end{bmatrix}$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B}\bullet\boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (3)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(-2)\cdot(2)+(4)\cdot(-2) & (3)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(-2)\cdot(-1)+(4)\cdot(-2) \\ (2)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(0)\cdot(2)+(-1)\cdot(-2) & (2)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(0)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\bullet\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -6 \\ 4 & 1 & -4 & 9 \\ -10 & -4 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1)\cdot(3)+(3)\cdot(2) & (1)\cdot(1)+(3)\cdot(1) & (1)\cdot(-2)+(3)\cdot(0) & (1)\cdot(4)+(3)\cdot(-1) \\ (-1)\cdot(3)+(2)\cdot(2) & (-1)\cdot(1)+(2)\cdot(1) & (-1)\cdot(-2)+(2)\cdot(0) & (-1)\cdot(4)+(2)\cdot(-1) \\ (2)\cdot(3)+(-1)\cdot(2) & (2)\cdot(1)+(-1)\cdot(1) & (2)\cdot(-2)+(-1)\cdot(0) & (2)\cdot(4)+(-1)\cdot(-1) \\ (-2)\cdot(3)+(-2)\cdot(2) & (-2)\cdot(1)+(-2)\cdot(1) & (-2)\cdot(-2)+(-2)\cdot(0) & (-2)\cdot(4)+(-2)\cdot(-1) \end{bmatrix}$$

1. Již z uvedeného příkladu vidíme, že pro násobení matic obecně neplatí komutativní zákon (o záměně činitelů).

   Matice $\boldsymbol{A}$ je typu $(2,4)$, matice $\boldsymbol{B}$ je typu $(4,2)$. Proto:

   - první vypočítaný součin $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ je typu $(2,4)(4,2) = (2,2)$,
   - kdežto druhý vypočítaný součin $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$ je typu $(4,2)(2,4) = (4,4)$.

2. Je-li například $\boldsymbol{A}$ typu $(2,4)$ a matice $\boldsymbol{B}$ je typu $(4,5)$, pak součin $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ existuje a je to matice typu $(2,4)(4,5) = (2,5)$, kdežto součin $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$ vůbec není definován (neexistuje).

3. **Násobení matic tedy nemá naprosto stejné vlastnosti, jako násobení čísel**.

   Další odlišnosti si ukážeme ve cvičení k této kapitole.

4. Jsou-li matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{0}$ (nulová) a $\boldsymbol{E}$ (jednotková) ***čtvercové matice stejného řádu***, platí:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A},$$

   jak snadno zjistíme vynásobením.

Vlastnosti násobení matic

Násobení matic dává poněkud odlišné výsledky, než které dostáváme při násobení čísel, jak bylo naznačeno v předchozí poznámce.
Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ jsou matice a $\boldsymbol{k}$ číslo. Potom:

1. Obecně **neplatí komutativní zákon** o záměně činitelů. Tedy *nelze předpokládat* (viz první a druhý bod předchozí poznámky), že vždy platí $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$. Toto funguje pouze u čtvercových matic. A navíc pouze u některých. Tyto pak nazveme **zaměnitelné**.

Spíše platí: $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$

2. Z rovnosti $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ nemůžeme usuzovat, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ nebo $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$. Pokud součin dvou matic je roven nulové matici, nutně z toho neplyne, že alespoň jedna z nich je také nulová, jak je ukázáno v příkladech 2. a) a 6.

3. Z rovnosti $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ nemůžeme usuzovat, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ nebo $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, jak je ukázáno v příkladu 2. b) i když řešením kvadratické rovnice $x^2 = x$ je právě *jednička* a *nula*.

4. Při násobení matic nelze krátit, jak je ukázáno v příkladu 3.

5. $(\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}) \bullet \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \bullet (\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C})$ asociativní zákon (o sdružování činitelů).

6. $k \cdot (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}) = (k \cdot \boldsymbol{A}) \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \bullet (k \cdot \boldsymbol{B})$ asociativní zákon pro násobení součinu matic číslem.

7. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \bullet \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C}$ distributivní zákon, kdy závorka je vlevo.

8. $\boldsymbol{A} \bullet (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{C}$ distributivní zákon, kdy závorka je vpravo.

Cvičení

1. Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ Určete $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B}\bullet\boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 18 \\ 27 & 19 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 18 \\ 27 & 19 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A} \quad \Longrightarrow$ Matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou zaměnitelné.

2. Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Vypočtěte: a) $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$
b) $\boldsymbol{A}^2$

Řešení a)

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

Z rovnosti $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ nevyplývá, že by alespoň jedna z matic $\boldsymbol{A}$ nebo $\boldsymbol{B}$ musela být nulová. Nebo jinak: součinem dvou nenulových matic může být nulová matice.

Řešení b)

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

Z rovnosti $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$) nevyplývá, že by matice $\boldsymbol{A}$ musela být jednotková nebo nulová.

3. Jsou dány matice $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Vypočtěte $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{C}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Z rovnosti $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{C}$ nelze činit závěr, že $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. **Při násobení matic proto nemůžeme krátit.**

4. Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Vypočtěte $2 \cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ a $-\frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{A} + 3 \cdot \boldsymbol{B}$.

Řešení:

$$2 \cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -4 & 0 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ -4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{A} + 3 \cdot \boldsymbol{B} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 6 & 18 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & \frac{11}{2} & 16 \\ 1 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

5. Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Vypočtěte $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$.

Řešení: $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3 + 1.2 + 1.1 & 2.1 + 1.1 + 1.0 \\ 3.3 + 0.2 + 1.1 & 3.1 + 0.1 + 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$

6. Jsou dány matice $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ Vypočtěte $\boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{D}$.

Řešení: $\boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. Je dána matice $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ Vypočtěte $\boldsymbol{A}^5$.

Řešení: $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A})\bullet\{(\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A})\bullet\boldsymbol{A}\}=$

$$=\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\right)\bullet\left\{\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\right)\bullet\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\right\}=$$

$$=\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\right)\bullet\left\{\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

8. Jsou dány matice $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ Vypočtěte $\boldsymbol{B}\bullet\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\bullet\boldsymbol{B}$.

Řešení: $\boldsymbol{B}\bullet\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\bullet\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

6. Inverzní matice

Nejprve řešme rovnici $a\,x = b$, kde $a \neq 0$, b jsou reálná čísla.

$$\begin{aligned}
a \cdot x &= b \qquad | \cdot a^{-1} && \text{(násobíme zleva)}\\
a^{-1} \cdot (a \cdot x) &= a^{-1} \cdot b && \\
(a^{-1} \cdot a) \cdot x &= a^{-1} \cdot b && \text{(asociativní zákon)}\\
\underbrace{(\frac{1}{a} \cdot a)}_{1} \cdot x &= a^{-1} \cdot b && \\
x &= a^{-1} \cdot b && \text{(protože: } 1 \cdot x = x)
\end{aligned}$$

Analogická situace nastává i při řešení maticové rovnice $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, kde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou dané matice a $\boldsymbol{X}$ je matice s neznámými prvky. Pokud by existovala matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ s vlastností $\boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{E}$ je jednotková matice, mohli bychom danou maticovou rovnici, za využití výsledků uvedených v kapitole *Operace s maticemi* (a to 5. vlastnosti na straně 77 a 4. poznámky na straně 76) řešit takto:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{B} \qquad | \bullet \boldsymbol{A}^{-1} && \text{(násobíme zleva)}\\
\boldsymbol{A}^{-1} \bullet (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{B} && \\
\underbrace{(\boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{A})}_{\boldsymbol{E}} \bullet \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{B} && \text{(asociativní zákon)} \quad \textit{5. vlastnost}\\
\boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{B} && \text{(protože: } \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}) \quad \textit{4. poznámka}
\end{aligned}$$

Je proto přirozená následující definice:

Inverzní matice A^{-1} k (regulární) matici A je matice splňující následující vztah:

$$A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Z uvedeného vztahu je zřejmé, že inverzní matice existuje jenom k regulární [8] čtvercové matici.

Pro určení inverzní matice k matici $\boldsymbol{A}$ existuje několik různých metod, z nichž jedna je následující. Napíšeme matici $[\,\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E} \mid \sum\,]$ takto:

- do levého pole napíšeme matici $\boldsymbol{A}$, ke které hledáme inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}$;
- do prostředního pole napíšeme jednotkovou matici $\boldsymbol{E}$;
- do pravého pole připojíme kontrolní sloupec $\sum$, ve kterém je součet všech čísel daného řádku.

Takto zapsanou matici upravujeme za pomoci **pouze řádkových** elementárních úprav [9] (které jsou analogické s úpravami prováděnými při řešení soustavy rovnic součtovou metodou) tak dlouho, až v levém poli dostaneme jednotkovou matici $\boldsymbol{E}$. V prostředním poli pak bude hledaná inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$. Vztah mezi původní maticí a upravenou budeme (tak jako dříve) označovat $\sim$.

Provedeme-li příslušnou řádkovou elementární úpravu i v kontrolním sloupci, musí se opět součet v příslušném řádku shodovat s nově vzniklým číslem v kontrolním sloupci.

[8] K singulární matici inverzní matice neexistuje.

[9] Elementární úpravy (ekvivalentní úpravy matice) byly zavedeny na straně 53 v kapitole nazvané *Hodnost matice*.

Pro větší přehlednost na pravé straně matice budeme zaznamenávat prováděné operace s tím, že malými římskými číslicemi označíme příslušný řádek. Zápis $ii + (-3).i$ tedy vyjadřuje, že: *každý prvek prvního řádku vynásobíme* ***mínus třemi*** *a přičteme k odpovídajícímu prvku druhého řádku*.

Vypočtěte inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [\, \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E} \mid \sum \,] =$

$$= \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} ii \\ i \\ iii \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ ii + (-2).i \sim \\ iii + i \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ iii \\ ii \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ iii + (-4).ii \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ ii + iii \sim \\ (-1).iii \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} i + ii \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right] = [\, \boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1} \mid \sum \,]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right] = [\, \boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1} \mid \sum \,] \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Zkoušku, to jest výpočet součinu matic $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}$ a součinu $\boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}$ ponecháváme čtenáři.

Další způsob určení inverzní matice

Jestliže čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ je tvořena prvky $a_{i;j}$, což jsme dříve označovali $\boldsymbol{A}(a_{i;j})$, pak její **matice algebraických doplňků** $\boldsymbol{D}_A$ je tvořena determinanty $\det \boldsymbol{D}_{i;j}$, tedy $\boldsymbol{D}_A(\det \boldsymbol{D}_{i;j})$, které sestrojíme následujícím způsobem:

Postup sestavení matice algebraických doplňků $\boldsymbol{D}_A$ Z původní matice vynecháme řádek $\boldsymbol{i}$ a sloupec $\boldsymbol{j}$ a z toho co zbude sestavíme determinant, který navíc opatříme znaménkem $(-1)^{i+j}$.

Potom platí následující vztah, který nebudeme dokazovat:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{D}_A^T \qquad = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \cdot \operatorname{adj} \boldsymbol{D}$$

Hodnota determinantu tvořeného jediným prvkem (determinant má jeden řádek a jeden sloupec) je rovna právě tomuto prvku.

Transponovanou matici algebraických doplňků nazýváme ***adjungovaná matice***, tedy $\boldsymbol{D}_A^T = \operatorname{adj} \boldsymbol{D}$

Vypočtěte inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ pomocí adjungované matice.

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +(2)\cdot(-1)\cdot(1) + (1)\cdot(2)\cdot(3) + (-1)\cdot(2)\cdot(0) - (3)\cdot(-1)\cdot(-1) -$$
$$-(0)\cdot(2)\cdot(2) - (1)\cdot(2)\cdot(1) = -2 + 6 - 3 - 2 = \mathbf{-1}$$

$$D_{1;1} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad D_{1;2} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad D_{1;3} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_{2;1} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad D_{2;2} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad D_{2;3} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$D_{3;1} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_{3;2} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_{3;3} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\cdot\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-1}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

6.3. Příklad

Určete inverzní matici $\boldsymbol{B}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

1. Řešení — dle definice $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{E}$. Označme $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}$.

Potom po rozepsání a úpravě výše uvedeného vztahu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

dostaneme následující soustavu lineárních algebraických rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 + y_1 &= 1 && (1) \\ 2x_2 + y_2 &= 0 && (2) \\ 2x_3 + y_3 &= 0 && (3) \\ 2x_4 + y_4 &= 0 && (4) \\ 3x_1 + 2y_1 &= 0 && (5) \\ 3x_2 + 2y_2 &= 1 && (6) \\ 3x_3 + 2y_3 &= 0 && (7) \\ 3x_4 + 2y_4 &= 0 && (8) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + y_1 + 3u_1 + 4v_1 &= 0 && (9)\\
x_2 + y_2 + 3u_2 + 4v_2 &= 0 && (10)\\
x_3 + y_3 + 3u_3 + 4v_3 &= 1 && (11)\\
x_4 + y_4 + 3u_4 + 4v_4 &= 0 && (12)\\
2x_1 - y_1 + 2u_1 + 3v_1 &= 0 && (13)\\
2x_2 - y_2 + 2u_2 + 3v_2 &= 0 && (14)\\
2x_3 - y_3 + 2u_3 + 3v_3 &= 0 && (15)\\
2x_4 - y_4 + 2u_4 + 3v_4 &= 1 && (16)
\end{aligned}
$$

kde například z:

(1) a (5) dostaneme $x_1 = 2$ a $y_1 = -3$
(2) a (6) dostaneme $x_2 = -1$ a $y_2 = 2$
(3) a (7) dostaneme $x_3 = 0$ a $y_3 = 0$
(4) a (8) dostaneme $x_4 = 0$ a $y_4 = 0$

a po dosazení těchto hodnot do zbývajících rovnic pokračujeme v určování ostatních neznámých.

$$
\begin{aligned}
3u_1 + 4v_1 &= 1 && (9)\\
3u_2 + 4v_2 &= -1 && (10)\\
3u_3 + 4v_3 &= 1 && (11)\\
3u_4 + 4v_4 &= 0 && (12)\\
2u_1 + 3v_1 &= -7 && (13)\\
2u_2 + 3v_2 &= 4 && (14)\\
2u_3 + 3v_3 &= 0 && (15)\\
2u_4 + 3v_4 &= 1 && (16)
\end{aligned}
$$

pak z:

(9) a (13) dostaneme $u_1 = 31$ a $v_1 = -23$
(10) a (14) dostaneme $u_2 = -19$ a $v_2 = 14$
(11) a (15) dostaneme $u_3 = 3$ a $v_3 = -2$
(12) a (16) dostaneme $u_4 = -4$ a $v_4 = 3$

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Řešení — úpravami jednotkové matice $[\,\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{E} \mid \sum\,] \sim [\,\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{B}^{-1} \mid \sum\,]$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} iii \\ i + (-2).iii \\ ii + (-3).iii \\ iv + (-2).iii \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & -6 & -8 & 1 & 0 & -2 & 0 & -16 \\ 0 & -1 & -9 & -12 & 0 & 1 & -3 & 0 & -24 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & 0 & 0 & -2 & 1 & -13 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-1).ii \\ iii + (-1).ii \\ iv + (-3).ii \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 14 & 19 & -3 & 0 & 4 & 1 & 35 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ iv + 5.iii \end{array} \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{rrrr|rrrr|r} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -8 & 5 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ (-1).iv \\ iii+(-3).iv \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{rrrr|rrrr|r} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 & -5 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 23 & -14 & 2 & -3 & 7 \end{array}\right]\begin{array}{l} i+4.iv \\ ii+8.iv \\ iii+iv \\ (-1).iv \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{rrrr|rrrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 & 92 & -56 & 9 & -12 & 38 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 183 & -112 & 18 & -24 & 72 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 31 & -19 & 3 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -23 & 14 & -2 & 3 & -7 \end{array}\right]\begin{array}{l} i+(-3).iii \\ ii+(-6).iii \\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{rrrr|rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 31 & -19 & 3 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -23 & 14 & -2 & 3 & -7 \end{array}\right]\begin{array}{l} i+(-1).ii \\ \\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{rrrr|rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 31 & -19 & 3 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -23 & 14 & -2 & 3 & -7 \end{array}\right] \Rightarrow \quad \boldsymbol{B}^{-1}=\left[\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Řešení — pomocí determinantu a algebraických doplňků: $\boldsymbol{B}^{-1} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{D}_B^T$

$$\det \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{rozv. 1. ř.}}{=} (-1)^{1+1} \cdot (2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (18 - 16) - (27 - 24) = 4 - 3 = 1$$

$$D_{1;1} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \qquad D_{1;2} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$D_{1;3} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 31 \qquad D_{1;4} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -23$$

$$D_{2;1} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \qquad D_{2;2} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$D_{2;3} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -19 \qquad D_{2;4} = (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

$$D_{3;1} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_{3;2} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -0$$

$$D_{3;3} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_{3;4} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$D_{4;1} = (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -0 \qquad D_{4;2} = (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_{4;3} = (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 \qquad D_{4;4} = (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{B}} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 31 & -23 \\ -1 & 2 & -19 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Příklad: Řešte maticovou rovnici $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Řešení — jeden způsob Označme prvky neznámé matice $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ jako v předchozím příkladu [10].

Potom po roznásobení zadaného vztahu

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + 1x_2 & 2y_1 + 1y_2 \\ 3x_1 + 2x_2 & 3y_1 + 2y_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6x_1 - 3x_2 + 10y_1 + 5y_2 & 4x_1 + 2x_2 - 6y_1 - 3y_2 \\ -9x_1 - 6x_2 + 15y_1 + 10y_2 & 6x_1 + 4x_2 - 9y_1 - 6y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

dostaneme následující soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} -6x_1 - 3x_2 + 10y_1 + 5y_2 &= -2 \\ 4x_1 + 2x_2 - 6y_1 - 3y_2 &= 4 \\ -9x_1 - 6x_2 + 15y_1 + 10y_2 &= 3 \\ 6x_1 + 4x_2 - 9y_1 - 6y_2 &= -1 \end{aligned}$$

přičemž řešení takových soustav lineárních rovnic bude probíráno později.

[10] Pozorný čtenář zajisté zaznamenal, že v předchozím příkladu jsme $\boldsymbol{x}_i$ zapisovali do řádků a nyní je píšeme do sloupců. Je to záměr, abyste si uvědomili, že na vlastní výpočet nemá volba značení vliv.

Řešení — další způsob. Budeme řešit maticovou rovnici analogicky jako bychom postupovali při řešení rovnice $a \cdot x \cdot b = c$, kde a, b, c jsou čísla a x neznámá.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{C} \quad | \bullet \boldsymbol{A}^{-1} \text{ (zleva);} \quad \bullet \boldsymbol{B}^{-1} \text{ (zprava)} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{B}^{-1} &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{B}^{-1} \\ (\boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{A}) \bullet \boldsymbol{X} \bullet (\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{B}^{-1}) &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{B}^{-1} \end{aligned}$$

Nyní určíme příslušné inverzní matice. Zopakujeme si a procvičíme dva způsoby.

$\boldsymbol{A}^{-1}$: pomocí elementárních úprav matice $\boldsymbol{A}$ společně s jednotkovou maticí $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{A}^{-1}: \left[\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} i + (-1).ii \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rr|rr|r} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-1).i \\ ii + 3.i \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} i + ii \\ (-1).ii \end{array} \sim \left[\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{B}^{-1}$: pomocí adjungované matice, což je transponovaná matice algebraických doplňků (subdeterminantů s patřičným znaménkem) matice $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\cdot(-3) & (-1)^{1+2}\cdot(5) \\ (-1)^{2+1}\cdot(2) & (-1)^{2+2}\cdot(-3) \end{bmatrix}^T = \frac{1}{9-10} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Potom

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 12 & -14 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}$$

Ověření, že $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, tedy $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

ponecháváme čtenáři.

Soustavy lineárních algebraických rovnic

Obsah kapitoly: Soustavy lineárních algebraických rovnic

1. Soustavy lineárních algebraických rovnic **100**

1.1. Speciální typy soustav 102

Nehomogenní soustava lineárních algebraických rovnic 102

Homogenní soustava lineárních algebraických rovnic 102

Ekvivalentní soustavy lineárních algebraických rovnic 103

1.2. Frobeniova věta o řešení soustavy lineárních rovnic 103

2. Hledání kořenů soustavy lineárních algebraických rovnic **104**

2.1. Gaussova (Jordanova) eliminační metoda — GEM 104

Odvození metody 106

Popis metody 122

Cvičení — GEM, Jordan 124

2.2. Cramerovo pravidlo 128

Cvičení — Cramerovo pravidlo 129

2.3. Řešení soustav lineárních algebraických rovnic pomocí inverzní matice 130

Cvičení — Pomocí inverzní matice 131

1. Soustavy lineárních algebraických rovnic

Ze střední školy dovedeme řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Víme, že například řešením soustavy

$$\begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ x - y &= 3 \end{aligned} \tag{8}$$

(a to jediným) je $x = 2$ a $y = -1$. Toto řešení najdeme například tak, že úpravou druhé rovnice osamostatníme x $(x = 3 + y)$ a dosadíme do první rovnice.

Soustava

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 6x - 3y &= 7 \end{aligned} \tag{9}$$

nemá žádné řešení. Splňují-li totiž čísla x , y první z rovnic (9), nesplňují druhou rovnici. Pokud platí první z rovnic $2x - y = 3$, pak platí i její trojnásobek $6x - 3y = 9$. A v tom případě nemůže platit $6x - 3y = 7$. Říkáme, že *soustava (9) není řešitelná* nebo že *nemá řešení*.

Soustava

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 6x - 3y &= 9 \end{aligned} \tag{10}$$

je řešitelná. Řešením je například $x = 2$, $y = 1$, ale také například $x = 1$, $y = -1$ nebo $x = 3$, $y = 3$. Tedy soustava (10) není řešitelná jednoznačně.

Otázky řešitelnosti lineárních rovnic mají v matematice a jejích aplikacích velký význam. V právě uvedených příkladech jsme o řešitelnosti daných soustav snadno rozhodli. V případě soustav o větším počtu neznámých není již otázka řešitelnosti zdaleka tak přehledná. Jedním z hlavních úkolů lineární algebry je najít jednak jednoduchá kritéria, na základě kterých lze rozhodnout o řešitelnosti takových soustav, jednak účinné metody, jak tyto soustavy řešit.

V předchozích kapitolách jsme k tomuto problému vybudovali potřebný aparát. Ten nyní využijeme pro řešení soustavy $\boldsymbol{m}$ lineárních rovnic o $\boldsymbol{n}$ neznámých.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2 & +\dots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2 & +\dots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2 & +\dots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{11}$$

Případně zapsanou maticově

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{nebo} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{12}$$

Řešením soustavy (11) nazýváme každý systém $k_1, k_2, \dots, k_n$ (můžeme také říci každou matici $\boldsymbol{k}^T = [k_1, k_2, \dots, k_n]$), takový, že když čísla $k_1, k_2, \dots, k_n$ dosadíme za neznámé $x_1, x_2, \dots, x_n$ do levých stran rovnic (11), jsou všechny tyto rovnice zároveň splněny.

Řešit soustavu (11) znamená najít *všechna* její řešení.

1.1. Speciální typy soustav

Nehomogenní soustava lineárních algebraických rovnic Vztahem 11 jsme zavedli pojem soustavy lineárních algebraických rovnic. Pokud je soustava uvedena takto obecně, kdy nic nevíme o tvaru pravých stran $b_1, b_2, \dots, b_m$ hovoříme o nehomogenní soustavě lineárních algebraických rovnic.

Homogenní soustava lineárních algebraických rovnic má všechny pravé strany rovny nule. Tedy $\boldsymbol{b}_i = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, m$ nebo

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je matice soustavy, $\boldsymbol{X}$ je sloupcová matice (sloupcový vektor) neznámých a $\boldsymbol{0}$ je nulová sloupcová matice (sloupcový vektor) jejíž všechny prvky (jehož všechny souřadnice) jsou rovny nule.

Homogenní soustava

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{13}$$

má vždy alespoň jedno řešení, a to tzv. *triviální řešení* $\Rightarrow$ $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$

Řešit soustavu (13), znamená najít *všechna* její *netriviální* řešení.

Ekvivalentní soustavy lineárních algebraických rovnic o stejném počtu neznámých (nikoliv nutně o stejném počtu rovnic) **mají stejné řešení**.

Jinak řečeno: každé řešení první soustavy je zároveň řešením druhé soustavy, a naopak, každé řešení druhé soustavy je řešením první soustavy.

1.2. Frobeniova věta o řešení soustavy lineárních rovnic

Je-li $\boldsymbol{n}$ počet neznámých v soustavě (11) a označíme-li $\boldsymbol{h}$ hodnost matice soustavy (matice zcela ***vlevo***) ve vztahu (12) a $\boldsymbol{h_r}$ hodnost matice rozšířené (matice zcela ***vpravo***), potom

Nutnou a postačující podmínkou, aby soustava lineárních rovnic o $\boldsymbol{n}$ neznámých byla řešitelná, je, aby matice soustavy a rozšířená matice měly stejnou hodnost.

Důsledek ***Frobeniovy věty***:	$h \neq h_r$	soustava **nemá** řešení;
	$h = h_r = n$	soustava má **právě jedno** řešení;
	$h = h_r < n$	soustava má **nekonečně mnoho** řešení ($n - h$ neznámých můžeme vždy vhodně zvolit a ostatní pomocí nich vypočítat).

Někdy se tato výše uvedená věta [11] označuje také jako věta Kronecker–Capelli.

[11] V matematice se historicky ustálilo nazývat podobné výroky ***větou***. Ovšem stejně dobře bychom mohli použít například: *Frobenius řekl, tvrdil, napsal, dokázal že, ...*

2. Hledání kořenů soustavy lineárních algebraických rovnic

2.1. Gaussova (Jordanova) eliminační metoda — GEM

Tento postup je nazván po matematikovi, který ji poprvé podrobně popsal ve dvou krocích (chodech). Jinak již číňané hluboko před naším letopočtem používali podobný postup pro řešení speciálních *(neuměli použít obecně na libovolnou soustavu)* soustav rovnic.

Zmíněnou metodu si odvodíme na následujícím příkladu, kdy budeme řešit soustavu tří lineárních algebraických rovnic o třech neznámých sčítací metodou, kterou znáte ze střední školy. Její princip spočívá v tom, že některou z rovnic vynásobíme vhodným ***nenulovým*** číslem a přičteme ji k jiné rovnici tak, aby se vyrušila jedna proměnná. Když to provedeme ještě jednou, převedeme soustavu tří lineárních algebraických rovnic o třech neznámých na soustavu dvou lineárních algebraických rovnic o dvou neznámých. Postup analogicky zopakujeme a získáme jednu rovnici o jedné neznámé. Tu vyřešíme a hodnotu neznámé dosadíme zpět do zbylých rovnic a tím najdeme i ostatní kořeny původního systému.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

$$x + 2y - 2z = 0$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad | \cdot(-2) \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ -y + 6z &= 9 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad \mid \cdot(-2) \cdot(-3) \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ -y + 6z &= 9 \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad | \cdot(-2) \cdot(-3) \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ -y + 6z &= 9 \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad /1 \\ -y + 6z &= 9 \quad /2 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad | \cdot(-2) \cdot(-3) \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ -y + 6z &= 9 \quad | \cdot(1) \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad /1 \\ -y + 6z &= 9 \quad /2 \\ 4z \quad & \quad 8 \quad / \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad | \cdot(-2) \cdot(-3) \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ -y + 6z &= 9 \quad | \cdot(1) \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad /1 \\ -y + 6z &= 9 \quad /2 \\ 4z &= 8 \quad /3 \Rightarrow z = 2 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z***

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad \mid \cdot(-2) \cdot(-3) \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ -y + 6z &= 9 \quad \mid \cdot(1) \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad /1 \\ -y + 6z &= 9 \quad /2 \\ 4z &= 8 \quad /3 \Rightarrow z = 2 \end{aligned}$$

$$-y + 6 \cdot 2 = 9 \quad /2$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z*** a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad | \cdot(-2) \cdot(-3) \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ -y + 6z &= 9 \quad | \cdot(1) \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad /1 \\ -y + 6z &= 9 \quad /2 \\ 4z &= 8 \quad /3 \Rightarrow z = 2 \end{aligned}$$

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z*** a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

$$-y + 6 \cdot 2 = 9 \quad /2$$

Vypočítáme ***y***

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad \mid \cdot(-2) \cdot(-3)\\ 2x + 3y + 2z &= 9\\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0\\ -y + 6z &= 9 \quad \mid \cdot(1)\\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad /1\\ -y + 6z &= 9 \quad /2\\ 4z &= 8 \quad /3 \Rightarrow z = 2 \end{aligned}$$

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé $\boldsymbol{z}$ a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

$$-y + 6 \cdot 2 = 9 \quad /2 \Rightarrow y = 3$$

Vypočítáme $\boldsymbol{y}$ a (včetně $\boldsymbol{z}$) dosadíme do první rovnice.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad | \cdot(-2) \cdot(-3) \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ -y + 6z &= 9 \quad | \cdot(1) \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad /1 \\ -y + 6z &= 9 \quad /2 \\ 4z &= 8 \quad /3 \Rightarrow z = 2 \end{aligned}$$

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z*** a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

$$-y + 6 \cdot 2 = 9 \quad /2 \Rightarrow y = 3$$

Vypočítáme ***y*** a (včetně ***z***) dosadíme do první rovnice.

$$x + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 0 \quad /1$$

Potom již můžeme určit hodnotu zbývající proměnné ***x***.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad | \cdot(-2) \cdot(-3) \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ -y + 6z &= 9 \quad | \cdot(1) \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad /1 \\ -y + 6z &= 9 \quad /2 \\ 4z &= 8 \quad /3 \Rightarrow z = 2 \end{aligned}$$

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé $\boldsymbol{z}$ a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

$$-y + 6 \cdot 2 = 9 \quad /2 \Rightarrow y = 3$$

Vypočítáme $\boldsymbol{y}$ a (včetně $\boldsymbol{z}$) dosadíme do první rovnice.

$$x + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 0 \quad /1 \Rightarrow x = -2$$

Potom již můžeme určit hodnotu zbývající proměnné $\boldsymbol{x}$.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad \mid \cdot(-2)\ \cdot(-3) \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ -y + 6z &= 9 \quad \mid \cdot(1) \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad /1 \\ -y + 6z &= 9 \quad /2 \\ 4z &= 8 \quad /3 \Rightarrow z = 2 \end{aligned}$$

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z*** a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

$$-y + 6 \cdot 2 = 9 \quad /2 \Rightarrow y = 3$$

Vypočítáme ***y*** a (včetně ***z***) dosadíme do první rovnice.

$$x + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 0 \quad /1 \Rightarrow x = -2$$

Potom již můžeme určit hodnotu zbývající proměnné ***x***.

První část výpočtu (která je psána černě — ***přímý chod***), můžeme pomocí matic zapsat následovně

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 9 \\ 3 & 7 & -8 & -1 \end{array}\right] \cdot(-2)\ \cdot(-3)$$

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad | \cdot(-2) \cdot(-3) \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ -y + 6z &= 9 \quad | \cdot(1) \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad /1 \\ -y + 6z &= 9 \quad /2 \\ 4z &= 8 \quad /3 \Rightarrow z = 2 \end{aligned}$$

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z*** a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

$$-y + 6 \cdot 2 = 9 \quad /2 \Rightarrow y = 3$$

Vypočítáme ***y*** a (včetně ***z***) dosadíme do první rovnice.

$$x + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 0 \quad /1 \Rightarrow x = -2$$

Potom již můžeme určit hodnotu zbývající proměnné ***x***.

První část výpočtu (která je psána černě — ***přímý chod***), můžeme pomocí matic zapsat následovně

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 9 \\ 3 & 7 & -8 & -1 \end{array}\right] \cdot(-2) \cdot(-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \cdot(1)$$

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad \mid \cdot(-2)\ \cdot(-3)\\ 2x + 3y + 2z &= 9\\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0\\ -y + 6z &= 9 \quad \mid \cdot(1)\\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad /1\\ -y + 6z &= 9 \quad /2\\ 4z &= 8 \quad /3 \Rightarrow z = 2 \end{aligned}$$

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z*** a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

$$-y + 6 \cdot 2 = 9 \quad /2 \Rightarrow y = 3$$

Vypočítáme ***y*** a (včetně ***z***) dosadíme do první rovnice.

$$x + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 0 \quad /1 \Rightarrow x = -2$$

Potom již můžeme určit hodnotu zbývající proměnné ***x***.

První část výpočtu (která je psána černě — ***přímý chod***), můžeme pomocí matic zapsat následovně

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 9\\ 3 & 7 & -8 & -1 \end{array}\right] \cdot(-2)\ \cdot(-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 6 & 9\\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \cdot(1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 6 & 9\\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

a pomocí Frobeniovy věty (o hodnostech matic) rozhodnout o existenci a počtu řešení.

Při provádění zpětného chodu také můžeme rozhodnout o existenci a počtu řešení.

GEM — Gaussova eliminační metoda

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad \mid \cdot(-2)\ \cdot(-3) \\ 2x + 3y + 2z &= 9 \\ 3x + 7y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

Při řešení uvedené soustavy rovnic budeme první rovnici přičítat k ostatním rovnicím, proto ji opíšeme.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \\ -y + 6z &= 9 \quad \mid \cdot(1) \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Potom dvojnásobek první rovnice odečteme od druhé rovnice a trojnásobek první rovnice odečteme od třetí rovnice.

První a druhou rovnici opět opíšeme a druhou rovnici přičteme ke třetí rovnici.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 \quad /1 \\ -y + 6z &= 9 \quad /2 \\ 4z &= 8 \quad /3 \Rightarrow z = 2 \end{aligned}$$

Nyní ze třetí rovnice určíme hodnotu neznámé ***z*** a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice.

$$-y + 6 \cdot 2 = 9 \quad /2 \Rightarrow y = 3$$

Vypočítáme ***y*** a (včetně ***z***) dosadíme do první rovnice.

$$x + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 0 \quad /1 \Rightarrow x = -2$$

Potom již můžeme určit hodnotu zbývající proměnné ***x***.

První část výpočtu (která je psána černě — ***přímý chod***), můžeme pomocí matic zapsat následovně

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 9 \\ 3 & 7 & -8 & -1 \end{array}\right] \cdot(-2)\ \cdot(-3) \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \cdot(1) \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

a pomocí Frobeniovy věty (o hodnostech matic) rozhodnout o existenci a počtu řešení.

A pokud řešení existuje, pak poslední matici (odspodu nahoru) opět přepíšeme do rovnic (***zpětný chod***) a řešíme tak, jak je to popsáno červenou barvou.

Při provádění zpětného chodu také můžeme rozhodnout o existenci a počtu řešení.

Gaussova metoda postupných eliminací je postup, kdy rozšířenou matici soustavy převádíme na stupňový tvar $\Longrightarrow$ nazýváme **přímý chod**.

Poté takto upravenou matici znovu přepíšeme jako soustavu rovnic a postupně vyčíslujeme jednotlivé neznámé. Tento proces určování neznámých nazýváme **zpětný chod**.

Pokud se nespokojíme se stupňovitým tvarem rozšířené matice soustavy, ale nejenom **pod** ale i **nad** prvním nenulovým prvkem v každém řádku úpravou získáme nuly a navíc každý řádek vydělíme jediným nenulovým prvkem daného řádku v matici soustavy, nazýváme tento postup **Jordanovou metodou**. Jde vlastně o modifikaci Gaussovy eliminační metody, kdy převádíme matici soustavy pomocí elementárních úprav na matici jednotkovou.

Je třeba upozornit na fakt, že u soustavy, která má nekonečně mnoho řešení, ne vždy můžeme volit parametr za libovolnou neznámou. Například řešme soustavu

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 4 \\ -4x + 3y + 6z &= 7 \end{aligned} \tag{14}$$

Napišme rozšířenou matici soustavy (14), kterou ekvivalentními úpravami (ekvivalentní soustavy mají stejná řešení) budeme převádět na stupňový tvar. Chceme-li při výpočtech současně provádět i zkoušku správnosti prováděných výpočtů, přidáme ještě další sloupec obsahující součet daného řádku. To ale v tomto jednoduchém případě není nutné.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 6 & 7 \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot 2 \\ \rfloor \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

Přepíšeme-li tuto matici nazpět jako soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 4 \\ 5y \phantom{{}-3z} &= 15 \end{aligned}$$

pak ze druhé rovnice plyne $y = 3$. Tedy za $\boldsymbol{y}$ si nemůžeme volit parametr. Ale můžeme volit například $x = 3p + 2$. Dosadíme-li za $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ do první rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3p + 2) + (3) - 3z &= 4 \\ 6p + 4 + 3 - 3z &= 4 \\ 6p + 7 - 3z &= 4 \quad \mid + 3z - 4 \\ 6p + 3 &= 3z \quad \mid : 3 \\ 2p + 1 &= z \end{aligned}$$

Kořeny zadané soustavy rovnic jsou:

$$\begin{aligned} x &= 3p + 2 \\ y &= 3 \\ z &= 2p + 1 \end{aligned}$$

Pak pro každé reálné $\boldsymbol{p}$, které si zvolíme, dostaneme řešení dané soustavy.

$$p = 0 \qquad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$p = 1 \qquad \begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 3 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

Řešme soustavu

$$\begin{aligned} x - 2y - 5z &= 2 \\ 2x + 3y - z &= -1 \\ -8x - 19y - 5z &= 7 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\quad \Sigma \\ \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -2 & -5 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 3 \\ -8 & -19 & -5 & 7 & -25 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} ii + (-2).i \\ iii + 8.i \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -2 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 7 & 9 & -5 & 11 \\ 0 & -35 & -45 & 23 & -57 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ iii + 5.ii \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -2 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 7 & 9 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$h = 2 < h_r = 3$ tedy podle Frobeniovy věty daná soustava **nemá řešení**.

Cvičení — GEM, Jordan

1. **Řešte soustavu lineárních rovnic**

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 4x + 5y &= 6 \end{aligned} \tag{16}$$

Řešení 1. Gaussovou metodou postupných eliminací

Přímý chod

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \end{array}\right]_{ii-4.i} \sim \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right]$$

Zpětný chod

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ -3y &= -6 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Řešení 2. Jordanovou metodou (modifikace Gaussovy m.)

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \end{array}\right]_{ii-4.i} \sim \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right] : (-3) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]^{i-2.ii} \sim \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]^{i-2.ii} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

2. **Řešte soustavu lineárních rovnic**

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 9 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 9x_4 & = & 3 \end{array} \tag{17}$$

Řešení 1. Gaussovou metodou postupných eliminací

Přímý chod: $\left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 9 & 10 \\ 2 & -1 & 4 & 9 & 3 & 17 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ ii-2.i \\ iii-i \\ iv-2.i \end{array} \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -3 & 9 & 7 \\ 0 & -7 & 8 & 7 & 3 & 11 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ iii-3.ii \\ iv-7.ii \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ iv-iii \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|r|r} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

Zpětný chod:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - 6x_4 &= 9 \\ 6x_4 &= -6 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice plyne $x_4 = -1$.
Tuto hodnotu dosadíme do předposlední rovnice: $x_3 - 6 \cdot (-1) = 9$ $x_3 = 3$.
Obě spočítané hodnoty dosadíme do druhé rovnice: $-x_2 + (3) + (-1) = 0$ $x_2 = 2$.
Všechny hodnoty dosadíme do první rovnice: $x_1 + 3 \cdot (2) - 2 \cdot (3) + (-1) = 0$ $x_1 = 1$.

$$\boldsymbol{X}^T = (1; 2; 3; -1)$$

Řešení 2. Jordanova metoda

Výše uvedený zpětný chod můžeme provádět přímo v již upravené matici, kterou převedeme na matici jednotkovou. Tento postup (modifikaci Gaussovy metody) nazýváme jak již bylo dříve uvedeno **metodou Jordanovou**.

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ iii + iv \\ :6 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{ll}\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} i - iv \\ ii - iv \\ \\ \\ \end{array}\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{ll}\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} i + 2 \cdot iii \\ ii - iii \\ \\ \\ \end{array}\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{ll}\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} i + 3 \cdot ii \\ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}\end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2. Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo můžeme použít, jestliže soustava $\boldsymbol{n}$ rovnic o $\boldsymbol{n}$ neznámých (soustava má čtvercovou matici) má determinant soustavy různý od nuly ($\boldsymbol{D} \neq 0 \Rightarrow$ matice soustavy je regulární). Potom má tato soustava právě jedno řešení, které lze psát ve tvaru

$$x_i = \frac{\boldsymbol{D}_i}{\boldsymbol{D}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{8}$$

kde $\boldsymbol{D}_i$ jsou determinanty matice, která vznikne z matice soustavy tak, že v ní sloupec $\boldsymbol{i}$ nahradíme sloupcem pravých stran soustavy.

Dopředu musíme při použití této metody rozhodnout (například za využití Frobeniovy věty), zda daná soustava rovnic je jednoznačně řešitelná. K tomu většinou určujeme hodnost matice soustavy a hodnost rozšířené matice soustavy Gaussovou eliminací. Proto bývá výhodnější, použít i zpětný chod Gaussovy metody postupných eliminací a dohledat řešení systému rovnic většinou jednodušeji.

Omezení metody: Lze použít pouze u soustav, které mají jediné řešení a navíc počet neznámých odpovídá počtu rovnic.

Typické použití metody je v případě **nehomogenních soustav s regulární maticí**.

Cvičení — Cramerovo pravidlo

Řešte soustavu lineárních rovnic (16)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 4x + 5y &= 6 \end{aligned}$$

Řešení:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot 6}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot 6 - 3 \cdot 4}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 4} = \frac{-6}{-3} = 2$$

2.3. Řešení soustav lineárních algebraických rovnic pomocí inverzní matice

Jak se řeší **maticová rovnice** bylo probíráno v tématu o maticích. Příklad, kdy soustavu zapíšeme maticově a využijeme postupu diskutovaného dříve, bude uveden v následujícím cvičení.

Dopředu musíme při použití této metody rozhodnout (například za využití Frobeniovy věty), zda daná soustava rovnic je jednoznačně řešitelná. K tomu většinou určujeme hodnost matice soustavy a hodnost rozšířené matice soustavy Gaussovou eliminací. Proto bývá výhodnější, použít i zpětný chod Gaussovy metody postupných eliminací a dohledat řešení systému rovnic většinou jednodušeji.

Omezení metody: Lze použít pouze u soustav, které mají jediné řešení a navíc počet neznámých odpovídá počtu rovnic.

Typické použití metody je v případě **nehomogenních soustav s regulární maticí**.

Cvičení — Pomocí inverzní matice

Řešte soustavu lineárních rovnic (16)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 4x + 5y &= 6 \end{aligned}$$

Řešení: Soustavu 16 zapíšeme maticově

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{B} && \mid \bullet \boldsymbol{A}^{-1} \quad \text{(zleva)} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{B} && \text{(protože: } \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}) \\ \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{A}^{-1} \bullet \boldsymbol{B} && \text{(protože: } \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Nyní určíme inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{A}$ (zopakujeme si dvě metody).

1. postupem: $[\,\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E} \mid \sum\,] \sim [\,\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1} \mid \sum\,]$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] ii - 4 \cdot i \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & 1 & -6 \end{array}\right] : (-3) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & 2 \end{array}\right] i - 2 \cdot ii \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & 2 \end{array}\right] \Longrightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

2. pomocí adjungované matice k matici $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\cdot(5) & (-1)^{1+2}\cdot(4) \\ (-1)^{2+1}\cdot(2) & (-1)^{2+2}\cdot(1) \end{bmatrix}^T = \frac{1}{1\cdot 5 - 2\cdot 4} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{-3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{-3} \end{bmatrix}$$

Potom

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{-3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{-3} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}\cdot 3 + \frac{2}{3}\cdot 6 \\ \frac{4}{3}\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+4 \\ 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} x = -1 \\ y = 2 \end{matrix}$$

Funkce, elementární funkce

Obsah kapitoly: Funkce, elementární funkce

1. Pojem funkce (jedné reálné proměnné) a způsoby jejího zadávání **137**

1.1. Analyticky 138

1.2. Graficky 139

1.3. Tabulkou (výčtem hodnot) 139

2. Vlastnosti funkcí **140**

Ohraničená funkce 140

Monotónní funkce 142

Prostá funkce 146

Sudá a lichá funkce 149

Periodická funkce 152

Další vlastnosti funkcí 155

2.1. Kořen funkce 155

3. Operace s funkcemi **156**

Součet funkcí $f+g$ 156

Rozdíl funkcí $f-g$ 156

Součin funkcí $f \bullet g$ 156

Podíl funkcí f/g 156

Absolutní hodnota funkce $|f|$ 157

3.1. Skládání funkcí 157

3.2. Inverzní funkce 161

Dvojice vzájemně inverzních funkcí 164

Postup hledání inverzní funkce 165

4. Elementární funkce **171**

Algebraické funkce **171**

4.1 Funkce mocninné (mocniny a odmocniny) . . . 172
Základní pravidla pro počítání s mocninami . . . 179
Základní pravidla pro počítání s odmocninami . . . 179

Transcendentní funkce **180**

4.2 Funkce exponenciální a logaritmická . . . 180
Základní pravidla pro počítání s exponenciální funkcí . . . 181
Základní pravidla pro počítání s logaritmickou funkcí . . . 184
4.3 Funkce goniometrické . . . 185
Sinus: $y = \sin x$ . . . 187
Kosinus: $y = \cos x$ . . . 189
Základní vztahy pro sinus a kosinus . . . 190
Tangens: $y = \operatorname{tg} x$ . . . 194
Kotangens: $y = \operatorname{cotg} x$ . . . 195
4.4 Funkce cyklometrické . . . 197
Arkussinus: $y = \arcsin x$ . . . 197
Arkuskosinus: $y = \arccos x$ . . . 199
Arkustangens: $y = \operatorname{arctg} x$ . . . 200
Arkuskotangens: $y = \operatorname{arccotg} x$ . . . 202
4.5. Mnohočleny (polynomy) a racionální lomené funkce . . . 204

Grafy některých elementárních funkcí **206**

Historická poznámka

Každodenní skušenosti svědčí o tom, že v přírodě i společnosti neustále probíhají změny; již řecký filozof *Hérakleitos z Efesu* hlásal, že se vše mění. Cílem lidského poznání je nalezení příčin těchto změn a jejich vzájemnou souvislost. Jestliže při studiu nějakého jevu věnujeme pozornost dvěma veličinám, často zjistíme, že mezi nimi existuje závislost následujícího druhu: *Pokud nabude jedna proměnná (**nezávisle proměnná,** **argument**) určité hodnoty, nabude druhá proměnná (**závisle proměnná,** **funkce**) také určité hodnoty.* [12]

WikipediE

Funkce je v matematice [13] název pro zobrazení [14] z nějaké množiny M do množiny čísel (většinou reálných nebo komplexních), nebo do vektorů (pak se mluví o vektorové funkci).

Funkci zapisujeme: $y = f(x)$. Je to tedy předpis, který ***každému prvku*** x z množiny M ***jednoznačně přiřadí*** nějaké ***číslo*** y nebo vektor (hodnotu funkce).

M nazýváme ***definičním oborem*** funkce. Pokud není při zadání funkce uveden definiční obor, pak se za definiční obor obvykle považuje množina všech nezávisle proměnných, pro něž má funkce smysl.
Množinu všech čísel $f(x)$, takových, že $x \in M$, nazýváme ***oborem hodnot*** dané funkce.

---

[12] Vojtěch, J. *Základy mathematiky.* Jednota českých mathematiků a fysiků 1916, Praha, str. 5.

[13] Zdroj ⟨`http://cs.wikipedia.org/wiki/Funkce_(matematika)`⟩, citováno 3. 10. 2012.

[14] Zobrazení je v matematice předpis, jak přiřazovat prvkům nějaké množiny jednoznačně prvky obecně jiné množiny. Pojem zobrazení má většinou stejný význam jako pojem funkce. Název funkce se však častěji používá speciálně pro zobrazení do číselných množin.

1. Pojem funkce (jedné reálné proměnné) a způsoby jejího zadávání

Funkce $y = f(x)$ je předpis, který každému číslu $x \in D(f)$ jednoznačně přiřadí (tedy existuje pouze jedno) číslo $y \in H(f)$.

$D(f)$ nazýváme ***definiční obor*** funkce f;
$H(f)$ nazýváme ***obor hodnot*** funkce f.

Všechny body o souřadnicích $[x; f(x)]$ tvoří ***graf*** funkce.

1. Definiční obor $D(f)$ jsou tedy všechna čísla (hodnoty **argumentu**, nebo též **nezávisle proměnné**) x, která můžeme do funkce $y = f(x)$ dosadit a obor hodnot $H(f)$ jsou všechna čísla (hodnoty funkce, **funkční hodnoty**, nebo též hodnoty **závisle proměnné**) y, která nám po dosazení mohou vyjít.

2. Je zvykem zapisovat funkce rovností $y = f(x)$ [15]

   (čti: „y SE ROVNÁ ef x“), čímž se míní, že y je to číslo, které je funkcí f přiřazeno číslu x.

   Třebaže je mezi symboly f, $f(x)$ věcný rozdíl [16], nebudeme se rozpakovat mluvit o „funkci $f(x)$“ místo o „funkci f“.

---

[15] Slovo funkce (lat. *functio*) použil ve smyslu závislosti *Gottfried Wilhelm von Leibniz* koncem 17. století. *Johann Bernoulli* a *Leonhard Paul Euler* definovali počátkem 18. století funkci jako analytický výraz složený z nezávisle proměnné a konstant; *Euler* poprvé použil označení $f(x)$. Výše uvedeným způsobem zavedl pojem funkce roku 1837 *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*.

[16] f je funkce; $f(x)$ je hodnota funkce v argumetu (čísle, bodě) x

3. U převážné většiny funkcí zapisujeme hodnotu argumetu do kulatých závorek, abychom odlišili, že se nejedná o násobení ($fx = f \cdot x$). Pouze u několika speciálních funkcí (např.: $\sin x$) se historicky ustálil zvyk psát argument bez závorek.

Způsoby zadání funkce

1.1. Analyticky

$y = 5 - (x - 3)^2$

explicitní funkce	**implicitní** funkce	**parametrická** funkce
$y = -x^2 + 6x - 4$	$x^2 - 6x + y + 4 = 0$	$x = t + 3$ $y = 5 - t^2$

Nejobvyklejším způsobem pro určení funkce je definice funkce pomocí *„vzorce"*.

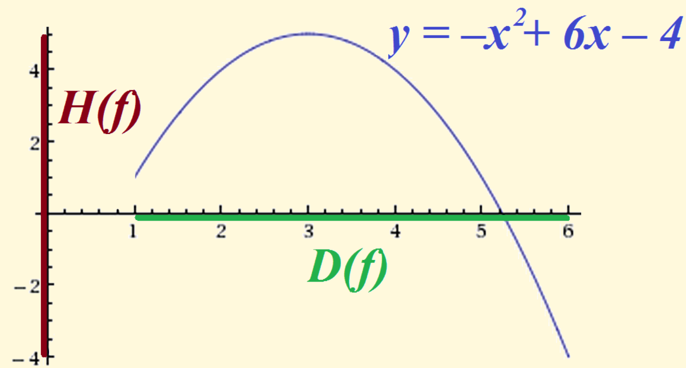
- Analytickým předpisem (viz předchozí bílý obdélník) rozumíme zadání funkce ve formě $y = f(x)$. Pak říkáme, že funkce je zadána *explicitním vyjádřením* (**explicitní funkce**).
- Funkci můžeme vyjádřit také v *implicitním tvaru* (**implicitní funkce**) jako $F(x; y) = 0$.
- Dalším způsobem je zápis v *parametrickém tvaru* (**parametrická funkce**) soustavou rovnic $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, kde t je vhodný parametr.

Výhody: Jednoduše zapíšeme funkční hodnoty. Například symboly $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$, $f(\frac{1}{3})$, $f(-\sqrt{2})$ znamenají hodnoty, kterých funkce f nabude v číslech 0, 2, -3, $\frac{1}{3}$, $-\sqrt{2}$.

Nevýhody: Malá názornost. Ze vzorce bez počítání v podstatě jen obtížně poznáme, jak se mění funkční hodnota při změně argumentu.

1.2. Graficky

$y = -x^2 + 6x - 4$, pro $x \in \langle 1; 6 \rangle$



Výhody: Velmi názorné.

Nevýhody: Hodnoty lze odečítat jen s chybou způsobenou nepřesností zařízení, které graf vykreslilo, či lidským okem.

1.3. Tabulkou (výčtem hodnot)

x	1	2	3	4	5	6
$y = -x^2 + 6x - 4$	1	4	5	4	1	-4

Výhody: Ke každé hodnotě argumentu, která je v tabulce uvedena, nalézáme ihned příslušnou hodnotu funkce (bez jakéhokoliv výpočtu či měření).

Nevýhody: Funkci nelze určit plně. Vyskytují se hodnoty argumentu, které nejsou v tabulce uvedeny.

Malá názornost. Z tabulky poměrně těžko poznáme, jak se mění funkční hodnota při změně argumentu.

2. Vlastnosti funkcí

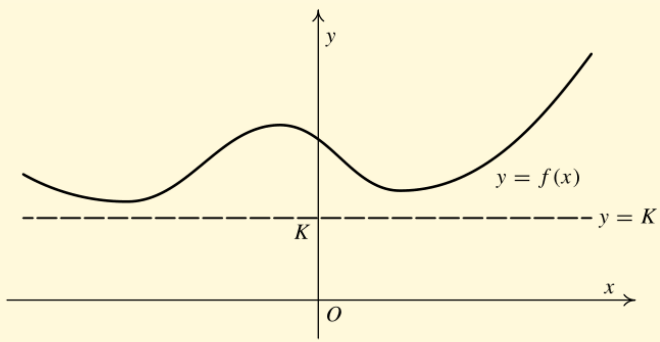
Ohraničená funkce (omezená funkce).

Funkce f je na intervalu I **ohraničená zdola** (obr. 1), když existuje takové číslo K, že pro každé $x \in I$ platí $f(x) \geq K$.

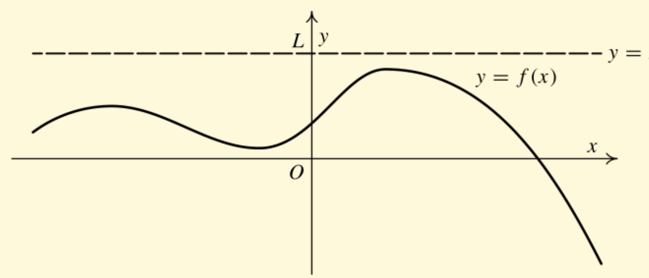
Funkce f je na intervalu I **ohraničená shora** (obr. 1), když existuje takové číslo L, že pro každé $x \in I$ platí $f(x) \leq L$.

Funkce f je na intervalu I **ohraničená** (obr. 2), je-li na intervalu I ohraničená zdola i shora.

Obrázek 1: Převzat z [5]

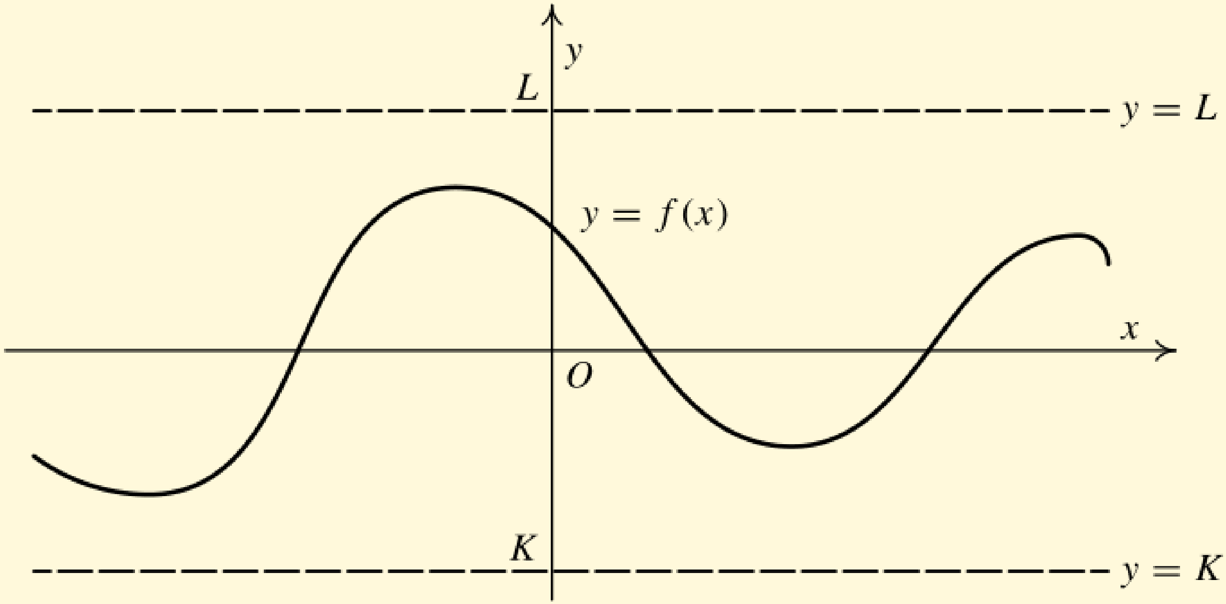


Funkce ohraničená zdola



Funkce ohraničená shora

Obrázek 2: Převzat z [5]



Ohraničená funkce

Určete, zda funkcde $f\,:\,y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$, je ohraničená.
Zlomek nejprve upravíme následujícím způsobem.

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{x^2+(-1)}{x^2+1}=\frac{x^2+(1-2)}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)-2}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{-2}{x^2+1}=1+\frac{-2}{x^2+1}$$

Dále využijeme toho, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí: $1 \leq x^2 + 1$. Potom

$$0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \qquad | \quad .(-2)$$

$$0 \geq \frac{-2}{x^2+1} \geq -2 \qquad | \quad +1$$

$$1 \geq \frac{-2}{x^2+1} + 1 = \frac{x^2-1}{x^2+1} \geq -1$$

Vidíme tedy, že funkce f je ohraničená a navíc jsme určili hranice. Spodní hranice $K = -1$, horní hranice $L = 1$.

Monotónní funkce Je-li funkce rostoucí, klesající, neklesající nebo nerostoucí, říkáme, že je monotónní (obr. 3). Speciálně je-li rostoucí nebo klesající, říkáme, že je *ryze monotónní*.

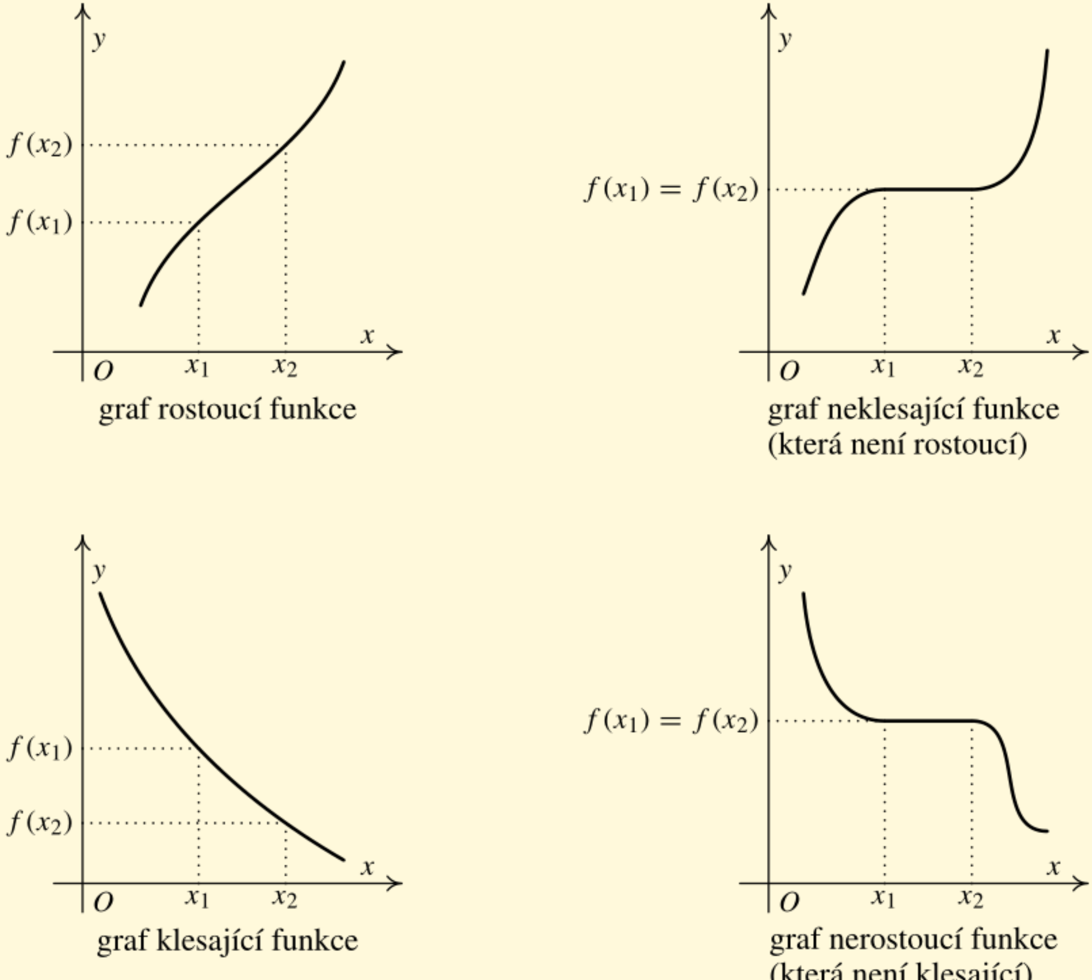
Funkce f je na intervalu I **rostoucí**, když pro libovolné dva body $x_1; x_2 \in I$, kde $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce f je na intervalu I **neklesající**, když pro libovolné dva body $x_1; x_2 \in I$, kde $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkce f je na intervalu I **klesající**, když pro libovolné dva body $x_1; x_2 \in I$, kde $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce f je na intervalu I **nerostoucí**, když pro libovolné dva body $x_1; x_2 \in I$, kde $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Obrázek 3: Převzat z [5]



Zřejmě každá rostoucí funkce je i neklesající a každá klesající funkce je i nerostoucí (obr. 3). Opak ovšem neplatí (monotónní funkce mohou být na nějakém intervalu konstantní).

Zatím nemáme vhodné prostředky na ověřování monotonie (ty budeme mít k dispozici až budeme probírat průběh funkce), proto si uvedeme pouze několik velmi jednoduchých příkladů, kde situace bude zřejmá.

Vyšetřete monotonii následujících funkcí:

a) $f : y = x^2, \quad x \in \langle 0; \infty)$

Řešení: Vyberme libovolné dva body $x_1; x_2 \in \langle 0; \infty)$, $x_1 < x_2$. Pak (vzhledem k tomu, že x_1, x_2 jsou nezáporná čísla) je $x_1^2 < x_2^2$; pak také $f(x_1) < f(x_2)$, a tedy f je rostoucí — viz obr. 4 a).

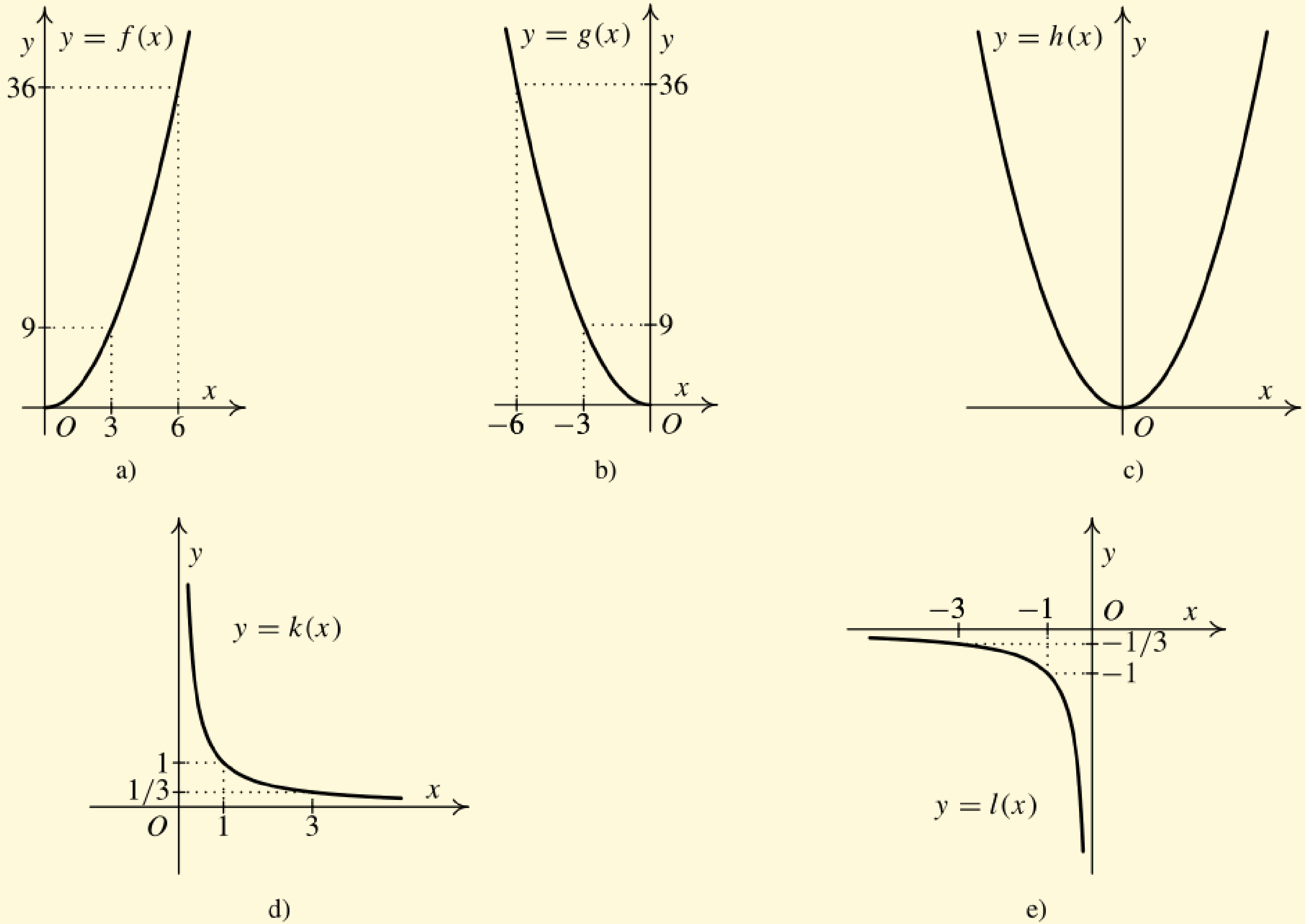
b) $g : y = x^2, \quad x \in (-\infty; 0\rangle$

Řešení: Nechť (vyberme libovolné dva body) $x \in (-\infty; 0\rangle$, $x_1 < x_2$. Pak je $x_1^2 > x_2^2$, a také $g(x_1) > g(x_2)$, a tedy g je klesající — viz obr. 4 b).

c) $h : y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$

Řešení: Vzhledem k předchozím výsledkům víme, že funkce h je klesající na intervalu $(-\infty; 0\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 0; \infty)$. Z toho vyplývá, že na intervalu $(-\infty; \infty)$ funkce h není monotónní. Grafem funkce h je parabola — viz obr. 4 c).

Obrázek 4: Převzat z [5]



d) $k : y = \dfrac{1}{x}, \quad x \in (0; \infty)$

Řešení: Nechť $x_1; x_2 \in (0; \infty)$, $x_1 < x_2$. Pak je $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$; tedy $k(x_1) > k(x_2)$ a proto je funkce k je klesající — viz obr. 4 d).

e) $l : y = \dfrac{1}{x}, \quad x \in (-\infty; 0)$

Řešení: Nechť $x_1; x_2 \in (-\infty; 0)$, $x_1 < x_2$. Pak je $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$; tedy $l(x_1) > l(x_2)$ a proto je funkce l je klesající — viz obr. 4 e).

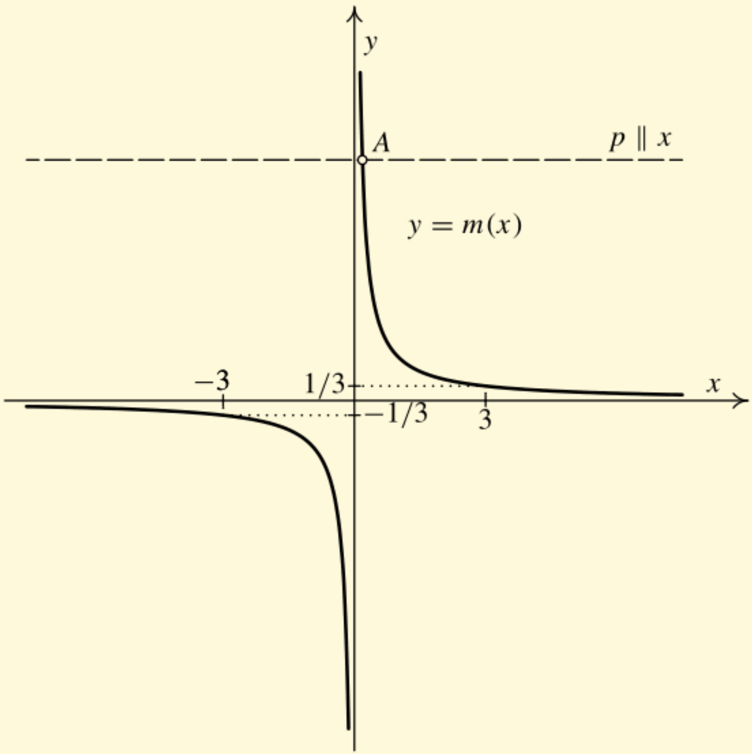
f) $m : y = \dfrac{1}{x}, \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ což také můžeme zapsat následovně: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Vzhledem k předchozím výsledkům víme, že funkce m je na intervalu $(-\infty; 0)$ klesající a na intervalu $(0; \infty)$ také klesající. Ve svém definičním oboru $D(m) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ však není klesající (například dvojice bodů -3; 3 nesplňuje podmínku pro klesající fnkce, neboť platí $-3 < 3$, ale $-\frac{1}{3} < \frac{1}{3}$). Grafem funkce m je rovnoosá hyperbola — viz obr. 5.

Prostá funkce je taková funkce, pro niž také ***ke každému*** $y \in H(f)$ patří ***jediné*** $x \in D(x)$.

1. Ověřujeme-li, zda funkce f je prostá, využíváme často ekvivalentní podmínku: Jestliže pro $x_1; x_2 \in D(f)$ platí, že $f(x_1) = f(x_2)$, pak musí být $x_1 = x_2$.

Obrázek 5: Převzat z [5]



Rovnoosá hyperbola

2. Z dříve uvedeného vyplývá, že funkce f je prostá právě tehdy (a jen tehdy), když libovolná rovnoběžka s osou x protne graf funkce f nejvýše jednou (tj. vůbec graf neprotne nebo protne právě jednou).

Všimněte si, že každá ryze monotónní funkce je prostá (nemůže mít v různých bodech stejnou funkční hodnotu), ale opak neplatí. **Ne každá** prostá funkce musí být nutně monotónní. Toto tvrzení demonstruje třeba funkce m z předchozího příkladu. Zjistili jsme, že funkce m není monotónní, ale očividně libovolná rovnoběžka s osou x protne její graf nejvýše jednou (osa x jej neprotne vůbec, každá jiná rovnoběžka jej protne přesně v jednom bodě — viz bod A na obrázku 5)

Prokažte, že funkce $f : y = (x-1)^2 + 7, \quad x \in (1; \infty)$ je prostá.

Řešení: K důkazu použijeme zmíněnou ekvivalentní podmínku (tak zvaný *nepřímý důkaz*):

Jestliže pro $x_1; x_2 \in D(f)$ platí, že $f(x_1) = f(x_2)$, pak musí být $x_1 = x_2$.

Nechť $x_1; x_2 \in (1; \infty)$ a zároveň $f(x_1) = f(x_2)$. Pak postupnými úpravami dostáváme:

$$\begin{aligned} (x_1-1)^2 + 7 &= (x_2-1)^2 + 7 && \mid -7 \\ (x_1-1)^2 &= (x_2-1)^2 && \mid \sqrt{\ } \\ (x_1-1) &= (x_2-1) && (\text{protože } x_1 - 1 > 0 \text{ a } x_2 - 1 > 0) \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že funkce f je prostá.

Pozor! Vezmeme-li funkci se stejným předpisem a jiným definičním oborem, tak již nemusí být prostá.

Například funkce $g : y = (x-1)^2 + 7, \quad x \in \mathbb{R}$ není prostá, protože lze nalézt alespoň jednu dvojici hodnot $x_1 \neq x_2$ takových, že $g(x_1) = g(x_2)$.

Jedna z (mnoha) možností: $x_1 = 0, x_2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad g(0) = 8 = g(2)$.

Sudá a lichá funkce

Tyto dvě vlastnosti se týkají určité souměrnosti grafu funkce. Budeme uvažovat takovou funkci f, jejíž definiční obor $D(f)$ je souměrný vzhledem k počátku (soustavy souřadnic). Tedy ***s každým číslem*** x současně ***obsahuje i opačné číslo*** $-x$. Pak má smysl porovnávat funkční hodnoty $f(x)$ a $f(-x)$.

Funkce f se nazývá **sudá**, jestliže platí

- pokud $x \in D(f)$, pak $-x \in D(f)$,
- $f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Funkce f se nazývá **lichá**, jestliže platí

- pokud $x \in D(f)$, pak $-x \in D(f)$,
- $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Z uvedených podmínek vyplývá: graf ***sudé*** funkce je ***souměrný podle osy*** y;
graf ***liché*** funkce je ***souměrný podle počátku***.

Obecně funkce nemusí být ani sudá ani lichá.

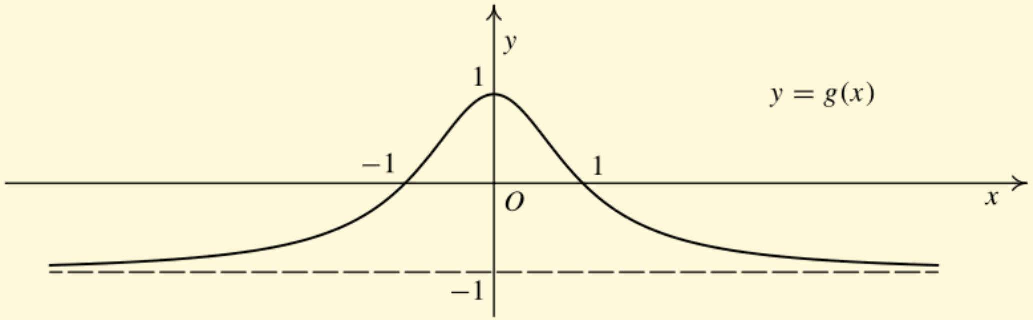
Všimněte si, že funkce $f : y = 0$ je zároveň sudá i lichá na $\mathbb{R}$.

Ověřte sudost či lichost následujících funkcí:

a) $g : y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Řešení: Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pak $g(-x) = \dfrac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} = g(x)\,.$

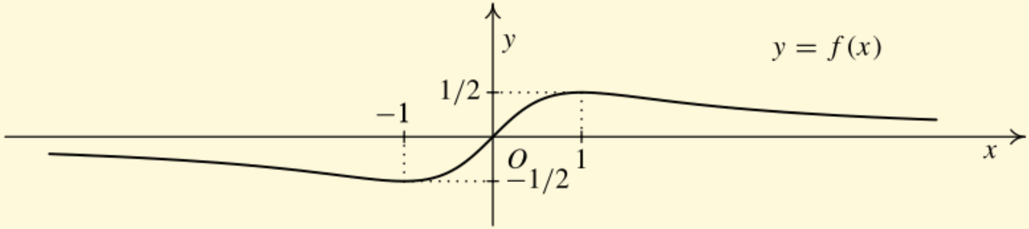
Tedy g je sudá funkce. Graf funkce g je na následujícím obrázku, který je převzat z [5].



b) $f : y = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Řešení: Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pak $f(-x) = \dfrac{(-x)}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{-x}{x^2 + 1} = -\dfrac{x}{x^2 + 1} = -f(x)\,.$

Tedy f je lichá funkce. Graf funkce f je na následujícím obrázku, který je převzat z [5].

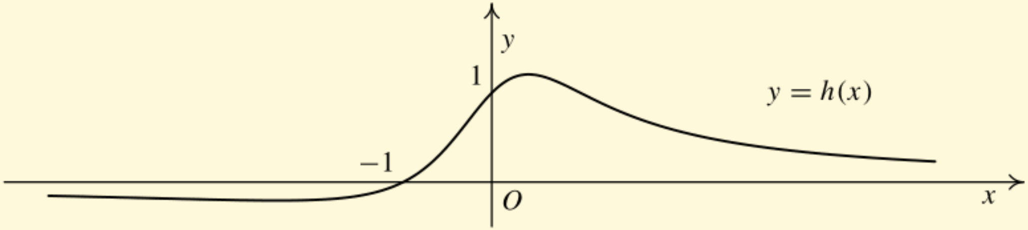


c) $h : y = \dfrac{1+x}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Řešení: Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pak $h(-x) = \dfrac{1+(-x)}{1+(-x)^2} = -\dfrac{-1+x}{1+x^2}$.

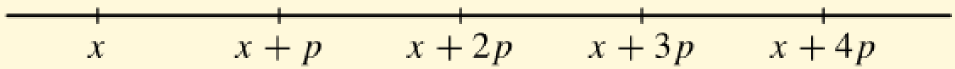
Což není rovno ani předpisu původní funkce $h(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$, ani výrazu $-h(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$, proto h není ani sudá ani lichá funkce.

Její graf je na následujícím obrázku, který je převzat z [5].



Periodická funkce

Nechť $\boldsymbol{f}$ je funkce a $\boldsymbol{p} > 0$ je reálné číslo. Předpokládejme, že definiční obor $D(f)$ s každým číslem x obsahuje i číslo $x + p$.
Pak ovšem musí obsahovat i číslo $(x + p) + p = x + 2p$, $(x + 2p) + p = x + 3p$ atd.



Řekneme, že funkce f je **periodická** s periodou p $(p \in \mathbb{R}^+)$, jestliže platí

- pokud $x \in D(f)$, pak také $x + p \in D(f)$,
- $f(x + p) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Jinými slovy. V bodech majících od sebe vzdálenost p jsou stejné funkční hodnoty. Tedy stačí znát graf funkce f na nějakém intervalu délky p a graf celé funkce dostaneme „kopírováním" této části, kterou posouváme o délku p vpravo nebo vlevo (vlevo jen pokud to definiční obor připouští).

Funkce periodická s periodou p je též periodická s periodou $k \cdot p$, $k \in \mathbb{N}$ (k je přirozené číslo). Pokud existuje nejmenší perioda, nazývá se **základní perioda** — viz obr. 6.

Nejznámější periodické funkce jsou funkce goniometrické. Například

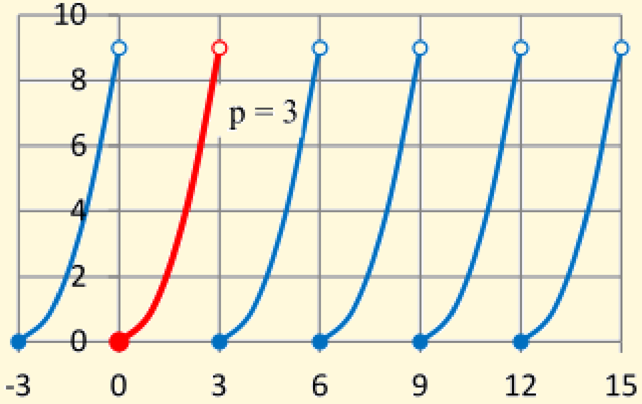
sinus a **kosinus** mají základní periodu 2π;

funkce $f : y = \sin 3x$ má základní periodu $\frac{2}{3}\pi$;

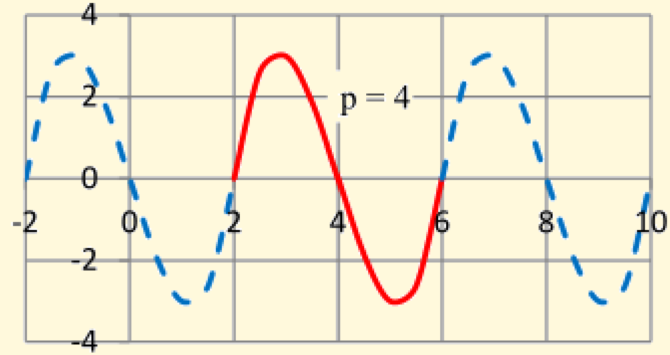
obecně funkce $f : \sin ax$, kde $a > 0$, má základní periodu $\frac{2}{a}\pi$.

Funkce $f : y = c$, $c \in \mathbb{R}$ je periodická funkce, která nemá základní periodu.

Obrázek 6: Periodické funkce



Základní perioda $p = 3$



Základní perioda $p = 4$

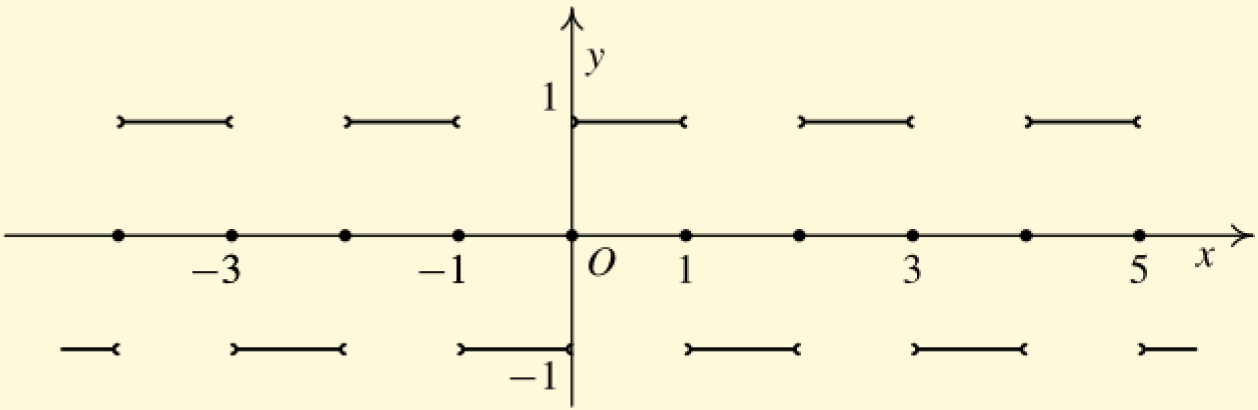
Ověřte, zda funkce $\sin x$ má periodu $p = 2\pi$.

Řešení: $f(x+p) = \sin(x+2\pi) = \sin x \cdot \cos 2\pi + \cos x \cdot \sin 2\pi = \sin x \cdot 1 + \cos x \cdot 0 = \sin x = f(x)$

Tím jsme prokázali, že funkce $\sin x$ má skutečně periodu $p = 2\pi$.

Nakreslete graf periodické funkce f, jejíž perioda je $p = 2$ a definiční obor $D(f) = \mathbb{R}$, jestliže víte, že:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad x \in (-1; 0); \\ 0 & \text{pro} \quad x = -1 \quad \text{a} \quad x = 0; \\ 1 & \text{pro} \quad x \in (0; 1). \end{cases}$$



Obrázek je převzat z [5]

Řešení: Protože funkce f má mít periodu **2** (vzdálenost -1 od 1 je 2), stačí nakreslit její graf na intervalu $\langle -1; 1)$ a dále jej kopírovat vpravo a vlevo vždy po posunutí o 2.

Uvědomte si, že $f(1)$ již nelze zadat libovolně, protože musí platit $f(-1) = f(1)$, neboť vzdálenost -1 a 1 je právě 2.

Další vlastnosti funkcí

Funkce f je na intervalu I **kladná**, když pro každé $x \in I$, platí $f(x) > 0$. Viz obr. 4 d).

Funkce f je na intervalu I **nekladná**, když pro každé $x \in I$, platí $f(x) \leq 0$.

Funkce f je na intervalu I **záporná**, když pro každé $x \in I$, platí $f(x) < 0$. Viz obr. 4 e).

Funkce f je na intervalu I **nezáporná**, když pro každé $x \in I$, platí $f(x) \geq 0$. Viz obr. 4 a),b),c).

2.1. Kořen funkce

Kořen funkce je takové číslo $\boldsymbol{a}$, pro něž platí: $f(a) = 0$.

Kořen funkce $f(x)$, nebo také **nulový bod funkce**, je tedy takový bod na ose $\boldsymbol{x}$, kterým graf funkce $f(x)$ buď prochází z jedné strany osy na druhou, nebo se osy v tomto bodě dotýká (tečný bod). Má-li funkce tentýž kořen vícekrát, hovoříme o násobném kořenu.

Výraz $\boldsymbol{x - a}$ nazýváme ***kořenovým činitelem***.

3. Operace s funkcemi

Součet funkcí $f+g$ je taková funkce, pro kterou platí: $[f+g](x) = f(x) + g(x)$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$.

Je třeba si uvědomit, že ve vztahu $[f+g](x) = f(x) + g(x)$ vystupuje symbol PLUS ve dvou různých významech. Na levé straně rovnosti znamená operaci mezi funkcemi (funkcím f a g je přiřazena funkce $f+g$) a na pravé straně rovnosti má význam součtu dvou reálných čísel $f(x) + g(x)$. V praxi ovšem většinou používáme jeden stejný symbol (nerozlišujeme $\boldsymbol{+}$ a $+$). Obdobně pro ostatní operace.

Rozdíl funkcí $f-g$ je taková funkce, pro kterou platí: $[f-g](x) = f(x) - g(x)$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$.

Součin funkcí $f \bullet g$ je taková funkce, pro kterou platí: $[f \bullet g](x) = f(x) \cdot g(x)$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$.

V případě součinu dvou funkcí často místo $\boldsymbol{f \bullet g}$ píšeme pouze $\boldsymbol{fg}$.
Speciálním případem součinu dvou funkcí je součin konstanty a funkce, tedy pro $c \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$[c \bullet f](x) = c \cdot f(x), \quad x \in D(f).$$

Podíl funkcí f/g je taková funkce, pro kterou platí: $[f/g](x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ pro $x \in D(f) \cap D(g) \setminus \{z \in \mathbb{R} : g(z) = 0\}$.

Absolutní hodnota funkce $|f|$ je funkce, kterou zavádíme předpisem: $|f|(x) = |f(x)|$ pro $x \in D(f)$.

3.1. Skládání funkcí

Nyní probereme další operaci s funkcemi, kterou je skládání funkcí. Uvažujme dvě funkce $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{g}$. Funkce $\boldsymbol{f}$ každému prvku $x \in D(f)$ přiřadí prvek $y = f(x) \in H(f)$. Jestliže tento prvek $\boldsymbol{y}$ náleží definičnímu oboru funkce $\boldsymbol{g}$ (platí-li $y \in D(g)$), pak jej funkce $\boldsymbol{g}$ zobrazí na prvek $z = g(y) \in H(g)$. Přitom platí:

$$z = g(y) = g[f(x)].$$

Dostáváme tedy novou funkci, která prvku $\boldsymbol{x}$ přiřazuje prvek $z = g[f(x)]$.

Složenou funkcí $g \circ f$ nazýváme funkci danou předpisem

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]\,, \quad \text{kde} \quad x \in D(f) \wedge f(x) \in D(g)\,.$$

Funkci $\boldsymbol{f}$ nazýváme **vnitřní složka** a funkci $\boldsymbol{g}$ nazýváme **vnější složka** složené funkce $g \circ f$.

Zápis $g \circ f$ čteme: „g PO f“ nebo „g SLOŽENA S f“ nebo **„NEJDŘÍVE f A POTOM g“**.

Poznamenejme, že místo obecného zápisu $y = f(x)$ používáme v konkrétních případech i jiný zápis. Například: $f : y = 3\sin(2x+1)$ (kdy říkáme, že funkce $\boldsymbol{f}$ **je dána předpisem**) považujeme (nepřesně) za totéž, co $f(x) = 3\sin(2x+1)$ i když teď říkáme, jak **určit funkční hodnotu** v konkrétním čísle $\boldsymbol{x}$.

Určete funkci $g \circ f = g[f(x)]$, která vznikne složením funkcí $f : y = 3 \sin(2x + 1)$ a $g : y = 4x^2 + 3x + 2$.

Řešení: Je zřejmé, že $D(f) = \mathbb{R}$ a $H(f) = \langle -3\,;\,3 \rangle \subset D(g) = \mathbb{R}$.

Potom (jak jsme si ukazovali na předchozí straně v poznámce) můžeme funkční hodnotu funkce $\boldsymbol{g}$ v čísle označeném $[\times]$, vypočítat: $g([\times]) = 4[\times]^2 + 3[\times] + 2$.

Stejně tak můžeme určit funkční hodnotu funkce $\boldsymbol{f}$ v čísle $\boldsymbol{x}$: $f(x) = 3 \sin(2x + 1)$.

Nyní stačí, když za číslo $\times$ dosadíme funkční hodnotu $f(x)$.

$$g[\times] = g[f(x)] = 4\,[3 \sin(2x+1)]^2 + 3\,[3 \sin(2x+1)] + 2 = 36\,[\sin(2x+1)]^2 + 9 \sin(2x+1)] + 2$$

Analogicky budeme postupovat i v případě $f[g(x)]$.

Je zřejmé, že $D(g) = \mathbb{R}$ a $H(g) = \langle \frac{-3}{8}\,;\,\infty) \subset D(f) = \mathbb{R}$.

Potom $f[\star] = 3 \sin(2\,[\star] + 1)$ a $g(x) = 4x^2 + 3x + 2$

$$f[\star] = f[g(x)] = 3 \sin(2\,[4x^2 + 3x + 2] + 1) = 3 \sin(8x^2 + 6x + 5)$$

Určete složenou funkci $g \circ f$ z funkcí $g(t) : y = 2t + 1$ a $f(x) : t = x - 5$.

Řešení: Je zřejmé, že $D(f) = H(f) = D(g) = H(g) = \mathbb{R}$. Potom

$[g \circ f](x) = g[f(x)] = g(t) = g(x - 5) = 2(x - 5) + 1.$

Jsou-li složky složené funkce samy o sobě složenými funkcemi, dostáváme vícenásobně složenou funkci. Například pro trojnásobně složenou funkci, jejíž složky jsou $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{h}$, platí:

$$[h \circ g \circ f](x) = h\{g\,[f(x)]\}.$$

Při určování $D(g \circ f)$, který je zřejmě obecně pouze částí $D(f)$, musíme vždy zvážit, *která* x *je možno vzít, abychom mohli* $f(x)$ *dosadit do předpisu pro funkci* g.

Jsou dány funkce $f(x) : y = 3 - 2x$ a $g(y) : z = \ln y$. Určete složenou funkci $g \circ f$ a její definiční obor.

Řešení: $[g \circ f](x) = g[f(x)] = g(y) = g(3 - 2x) = \ln(3 - 2x)$.

Hledaná funkce je tedy $[g \circ f](x) : z = \ln(3 - 2x)$.

Nyní určeme definiční obor funkce $g \circ f$. Víme, že $D(f) = \mathbb{R}$ a $D(g) = (0; \infty)$, protože přirozený logaritmus (platí pro každý logaritmus) je definován pouze pro kladné hodnoty argumentu (nezávisle proměnné). Chceme najít taková $x \in D(f)$, aby platilo, že $f(x) \in D(g)$. Tedy hledáme čísla $x \in \mathbb{R}$ taková, že: $3 - 2x \in (0; \infty)$. Tím dostáváme jedinou podmínku

$$3 - 2x > 0 \quad \Longrightarrow \quad 3 > 2x \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{2} > x\ .$$

Tudíž $D(g \circ f) = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

Platí, že:

- složením dvou prostých funkcí dostaneme funkci prostou;
- složením dvou rostoucích funkcí dostaneme rostoucí funkci;
- složením dvou klesajících funkcí dostaneme rostoucí funkci;
- složením funkce rostoucí a klesající (v libovolném pořadí) dostaneme funkci klesající;
- složením dvou sudých funkcí dostaneme sudou funkci;
- složením dvou lichých funkcí dostaneme lichou funkci;
- složením funkce sudé a liché (v libovolném pořadí) dostaneme sudou funkci.

3.2. Inverzní funkce

Funkce $\boldsymbol{f}$ a funkce $\boldsymbol{g}$ jsou k sobě inverzní, platí-li: $f[g(x)] = g[f(x)] = x$.
Funkci $g(x)$ obvykle označujeme $f^{-1}(x)$. Přitom platí: $D(f) = H(f^{-1})$ a $D(f^{-1}) = H(f)$.

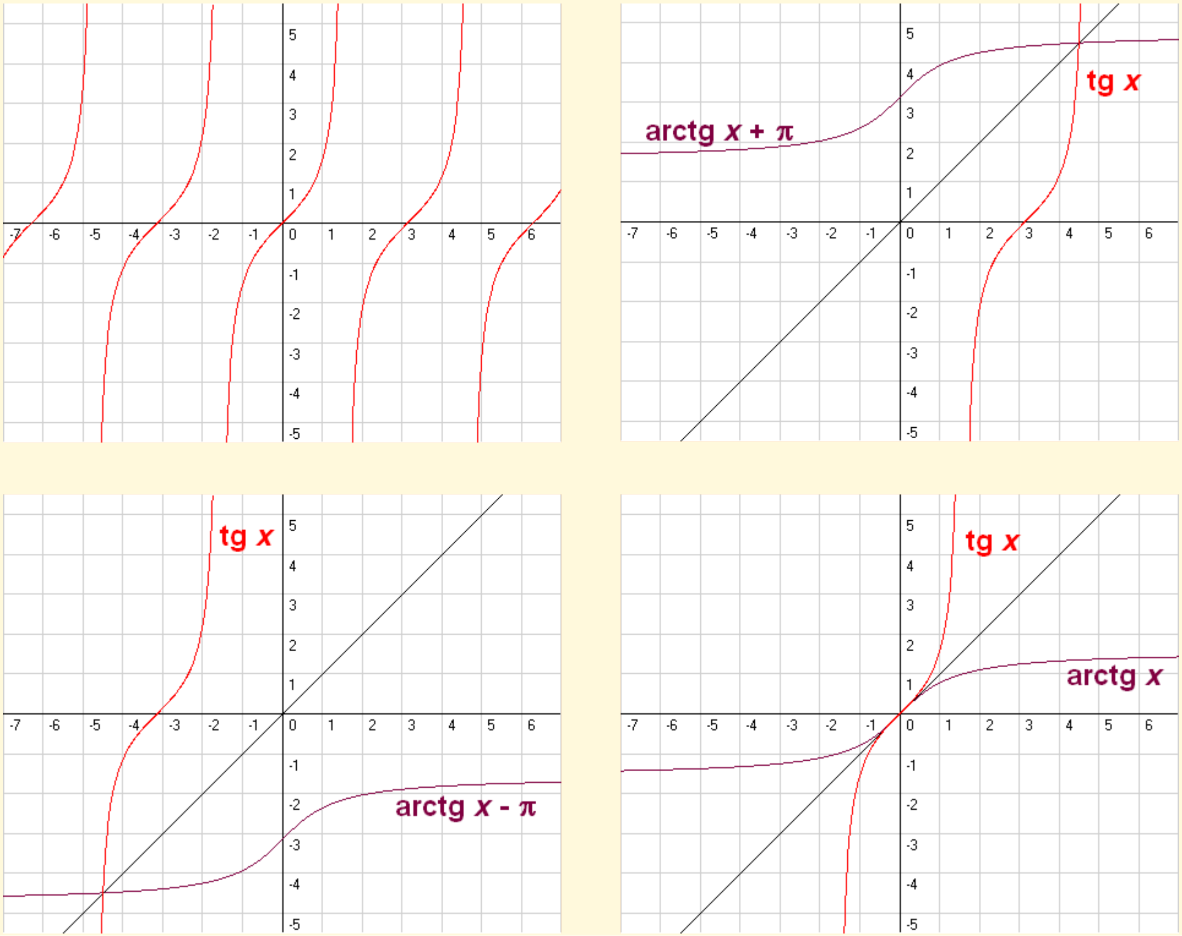
- Jestliže $f^{-1}(x) = g(x)$, pak také $f(x) = g^{-1}(x)$.
- Zdůrazněme, že $f^{-1}(x)$ je označení pro inverzní funkci. V žádném případě ***nečteme*** „*ef* NA MÍNUS PRVNÍ“. Nezaměňovat s mocninou záporného exponentu!

  Pozor: $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$, kde $\boldsymbol{f}$ označuje funkci !
- Kvůli praktickým výpočtům hodnot inverzní funkce označujeme nezávisle proměnnou ve funkci $\boldsymbol{f}$ stále $\boldsymbol{x}$ a závisle proměnnou ve funkci $\boldsymbol{f}^{-1}$ písmenem $\boldsymbol{y}$. To ovšem samo o sobě není podstatné. Fakt, že funkce f^{-1} je inverzní k funkci f, závisí na tvaru těchto funkcí a ne na písmenu, kterým označujeme nezávisle proměnnou.

K funkci $\boldsymbol{f}$ definované na intervalu $\boldsymbol{I}$, existuje inverzní funkce $\boldsymbol{f}^{-1}$ právě tehdy, je-li $\boldsymbol{f}$ na $\boldsymbol{I}$ ***prostá***.

Jinak řečeno: je-li f prostá, pak se lze jednoznačně dostat nejen z bodu $\boldsymbol{x}$ do bodu $\boldsymbol{y}$ (funkce $y = f(x)$), ale také naopak z bodu $\boldsymbol{y}$ do bodu $\boldsymbol{x}$ (funkce $x = f^{-1}(y)$).

Není-li funkce f prostá, zúžíme její definiční obor tak, aby na něm prostá byla.



Grafy funkce f a k ní inverzní funkce f^{-1} jsou navzájem souměrné podle přímky $y = x$ (zmíněnou přímku také nazýváme ***osou prvního a třetího kvadrantu***).

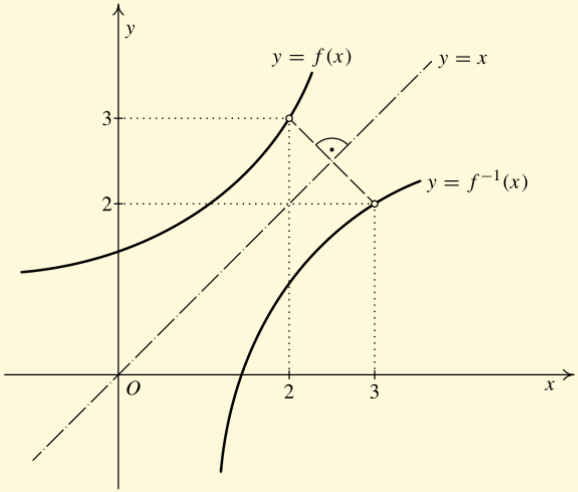
Graf funkce f je tvořen body v rovině tvaru

$$[x; f(x)] = [x; y],$$

kdežto graf f^{-1} je tvořen body $[y; f^{-1}(y)] = [y; x]$. Jestliže například graf funkce f obsahuje bod $[2; 3]$ (tedy $x = 2$ a $y = 3$), což zapíšeme $f(2) = 3$, bude graf funkce f^{-1} obsahovat bod $[3; 2]$, $(y = 3; x = 2)$, protože musí pro inverzní funkci platit $f^{-1}(3) = 2$. Vyneseme-li hodnotu x funkce f a funkce f^{-1} na osu x a hodnotu y obou funkcí na osu y, dostaneme vlastně dvakrát totéž. Často ale chceme vynášet první složku ve dvojici na vodorovnou osu (obvykle x) a druhou složku ve dvojici na svislou osu (obvykle osu y). Za tímto účelem většinou provádíme ***vzájemné přeznačení*** x a y. Místo $x = f^{-1}(y)$ pak v novém značení píšeme $y = f^{-1}(x)$. Což je v podstatě návod na určování inverzní funkce.

Protože body $[x; y]$ a $[y; x]$ jsou souměrné podle osy prvního a třetího kvadrantu (přímky $y = x$), jsou také grafy navzájem inverzních funkcí souměrné (symetrické) podle této přímky.

Převzat z [5]



Vzájemně inverzní funkce

V ekonomii se s inverzní funkcí setkáváme například u křivky poptávky a inverzní křivky poptávky.

Dvojice vzájemně inverzních funkcí využíváme například při řešení rovnic:

součet × rozdíl	$f: y = x + a$	$f^{-1}: y = x - a$	$x + a = b \Leftrightarrow x = b - a$
	a, ***b*** jsou reálná čísla		
součin × podíl	$f: y = x \cdot a$	$f^{-1}: y = x : a$	$x \cdot a = b \Leftrightarrow x = b : a$
	$a \neq 0$		
mocnina × odmocnina	$f: y = x^a$	$f^{-1}: y = \sqrt[a]{x}$	$x^a = b \Leftrightarrow x = \sqrt[a]{b}$
	$x \geq 0 \quad b \geq 0$		
exponenciála × logaritmus	$f: y = a^x$	$f^{-1}: y = \log_a x$	$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$
	$x > 0 \quad 0 < a \neq 1 \quad b > 0$		
sinus × arkussinus	$f: y = \sin x$	$f^{-1}: y = \arcsin x$	$\sin a = b \Leftrightarrow a = \arcsin b$
	$\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \frac{-\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2} \quad -1 \leq b \leq 1$		
kosinus × arkuskosinus	$f: y = \cos x$	$f^{-1}: y = \arccos x$	$\cos a = b \Leftrightarrow a = \arccos b$
	$0 \leq x \leq \pi \quad 0 \leq a \leq \pi \quad -1 \leq b \leq 1$		
tangens × arkustangens	$f: y = \operatorname{tg} x$	$f^{-1}: y = \operatorname{arctg} x$	$\operatorname{tg} a = b \Leftrightarrow a = \operatorname{arctg} b$
	$\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \frac{-\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$		
kotangens × arkuskotangens	$f: y = \operatorname{cotg} x$	$f^{-1}: y = \operatorname{arccotg} x$	$\operatorname{cotg} a = b \Leftrightarrow a = \operatorname{arccotg} b$
	$0 < x < \pi \quad 0 < a < \pi$		

Inverzní funkci $\boldsymbol{f^{-1}}$ k funkci $\boldsymbol{f}$ můžeme nalézt tak, že v zadaném vztahu $y = f(x)$ napřed navzájem **zaměníme písmena** $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ a potom **osamostatníme** $\boldsymbol{y}$.

Přesněji daný ***schematický*** návod vyjadřuje následující postup:

1. Stanovíme definiční obor $D(f)$ zadané funkce f.

2. Ověříme, že je funkce prostá. Přitom
   - buď využijeme ekvivalentní podmínky v poznámce na straně 146:
     Jestliže pro $x_1; x_2 \in D(f)$ platí, že $f(x_1) = f(x_2)$, pak musí být $x_1 = x_2$.
   - nebo vyjdeme z poznámky na straně 160:
     Složením dvou prostých funkcí dostaneme funkci prostou.

3. Najdeme funkci f^{-1} včetně jejího definičního oboru $D(f^{-1})$.
   a) Definiční obor $D(f^{-1})$ inverzní funkce určíme pomocí oboru hodnot původní funkce, neboť platí: $D(f^{-1}) = H(f)$.
   b) Nalezneme předpis funkce f^{-1}. Přitom využijeme vztah $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, který platí pro každé $y \in D(f^{-1})$.

      Vyjdeme tedy z rovnice $y = f(x)$ a podle „schematického“ návodu popisovaného výše zaměníme písmena označující nezávisle a závisle proměnnou $x = f(y)$ a poté osamostatníme y (jak je zvykem) a dostaneme $y = f^{-1}(x)$.

Určete inverzní funkci k funkci $f : y = 2x - 1$.

Řešení:

1. $D(f) = H(f) = \mathbb{R}$
2. Nechť $f(x_1) = f(x_2)$. Pak:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 1 &= 2x_2 - 1 \quad && | + 1 \\ 2x_1 &= 2x_2 && | : 2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

a tedy funkce $\boldsymbol{f}$ je prostá na celém svém definičním oboru.

3. a) $D(f^{-1}) = H(f) = \mathbb{R}$

   b) V předpisu funkce $f : y = 2x - 1$ zaměníme navzájem proměnné.

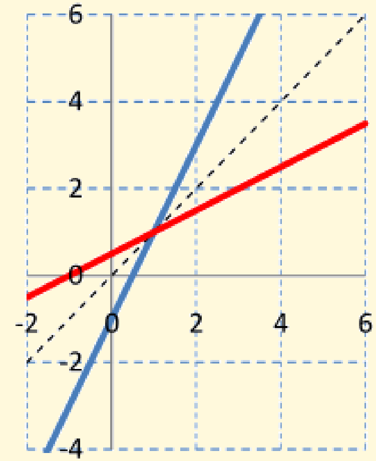
   Tedy: $x = 2y - 1$

   Poté z této rovnice osamostatníme $\boldsymbol{y}$.

   Dostáváme $\dfrac{x + 1}{2} = y$

   a inverzní funkce má tvar:

   $f^{-1} : y = 0{,}5x + 0{,}5$



$f : y = 2x - 1$

$f^{-1} : y = 0{,}5x + 0{,}5$

Určete inverzní funkci k funkci $f : y = x^2$.

Řešení:

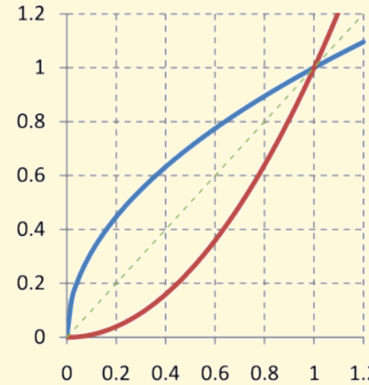
1. $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle 0; \infty)$,
2. Nechť $f(x_1) = f(x_2)$. Pak:

$$x_1^2 = x_2^2 \quad |\sqrt{\ }$$
$$x_1 = x_2 \quad (\text{pro } x_1 \geq 0 \text{ a } x_2 \geq 0)$$

   Proto, aby funkce $\boldsymbol{f}$ byla prostá, musí platit podmínky v závorce. Zúžíme proto definiční obor na $D(f) = \langle 0; \infty)$.
   Potom je funkce f prostá na intervalu $\langle 0; \infty)$.

3. a) $D(f^{-1}) = H(f) = \langle 0; \infty)$

   b) V předpisu funkce $f : y = x^2$ zaměníme navzájem proměnné. Tedy $x = y^2$.
   Poté z této rovnice osamostatníme $\boldsymbol{y}$. Dostáváme:
   $\sqrt{x} = y$ a inverzní funkce má tvar: $f^{-1} : y = \sqrt{x}$.



$f : y = x^2$ $f^{-1} : y = \sqrt{x}$

Ověřte, že k funkci $f : y = \dfrac{x+2}{x-3}$ existuje inverzní funkce a najděte ji.

Řešení:

1. Zřejmě ze zadání $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
2. Nechť $f(x_1) = f(x_2)$. Pak:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1+2}{x_1-3} &= \frac{x_2+2}{x_2-3} && \mid \cdot (x_1-3)(x_2-3)\\
x_1x_2 + 2x_2 - 3x_1 - 6 &= x_1x_2 + 2x_1 - 3x_2 - 6 && \mid +6\\
x_1x_2 + 2x_2 - 3x_1 &= x_1x_2 + 2x_1 - 3x_2 && \mid -x_1x_2\\
2x_2 - 3x_1 &= 2x_1 - 3x_2 && \mid +3x_1 + 3x_2\\
5x_2 &= 5x_1 && \mid : 5\\
x_2 &= x_1
\end{aligned}$$

   tedy funkce f je prostá na celém svém definičním oboru a proto zde existuje funkce f^{-1} inverzní k funkci f.

3. a) Určíme definiční obor funkce inverzní $D(f^{-1}) = H(f)$, který je roven oboru hodnot původní funkce f. Nejprve si upravíme předpis funkce f. Platí:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3} = \frac{x-3+5}{x-3} = 1 + \frac{5}{x-3}$$

Funkce f je definována pro každé $x \in D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Dále platí:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$x - 3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\frac{1}{x-3} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\frac{5}{x-3} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$1 + \frac{5}{x-3} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\frac{x+2}{x-3} \in \mathbb{R} \setminus \{1\} = H(f)$$

Tedy $D(f^{-1}) = H(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) V předpisu funkce $f : y = \dfrac{x+2}{x-3}$ zaměníme navzájem proměnné: $x = \dfrac{y+2}{y-3}$.

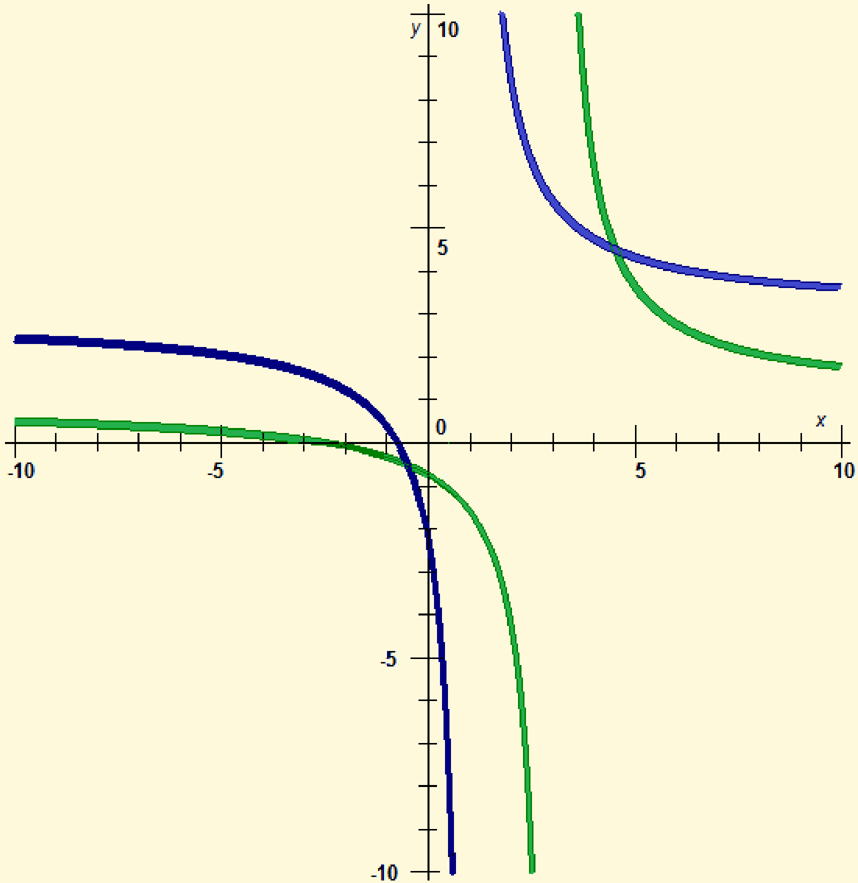
A z této rovnice osamostatníme y: $x = \dfrac{y+2}{y-3} \quad | \cdot (y-3)$

$$xy - 3x = y + 2 \quad | - y + 3x$$

$$xy - y = 3x + 2$$

$$y \cdot (x-1) = 3x + 2 \quad | : (x-1)$$

Dostáváme: $y = \dfrac{3x+2}{x-1}$, což je hledaná inverzní funkce (viz následující obrázek).



U podobných příkladů, kdy nalezení oboru hodnot původní funkce není právě triviální záležitostí, postupujeme většinou tak, že nejprve stanovíme inverzní funkci a poté přímo její definiční obor. Tedy nejprve provedeme bod 3. b) a teprve následně bod 3. a) dříve uvedeného postupu.

$f: y = \dfrac{x+2}{x-3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ $\qquad f^{-1}: y = \dfrac{3x+2}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

4. Elementární funkce

Základními elementárními funkcemi budeme nazývat tyto funkce:

mocninné (mocniny a odmocniny — proměnná je v základu/mantise mocniny);

exponenciální (proměnná je v exponentu) a **logatritmické**;

goniometrické (trigonometrické — sinus, kosinus, tangens, kotangens, *sekans* ($\sec x = \frac{1}{\cos x}$), *kosekans* ($\csc x = \frac{1}{\sin x}$)) a **cyklometrické** (arkussinus, arkuskosinus, arkutangens, arkuskotanges);

hyperbolické (hyperbolický sinus $\Longrightarrow \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, …) a **hyperbolometrické** (argument hyperbolického sinu $\Longrightarrow \operatorname{argsinh} x$).

Tyto funkce se velmi často vyskytují v technické praxi. Jejich hodnoty bez problémů nalezneme skoro na každé *„trochu slušnější“* kalkulačce.

Elementárními funkcemi budeme nazývat funkce, které lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pomocí operací sčítání, odečítání, násobení, dělení a skládání funkcí.

Mezi nejvýznamnější takové patří **mnohočleny** (například konstantní, lineární, kvadratická, …, funkce) a **racionální** (lomené) **funkce** (například mocniny se záporným celým exponentem).

Většina elementárních funkcí je probírána na střední škole, a proto lze tuto kapitolu považovat z velké části za opakování a souhrnné připomenutí základních vlastností těchto funkcí. Rozšířením oproti střední škole budou zřejmě pro většinu z vás pouze funkce cyklometrické a některé mnohočleny a racionální (lomené) funkce.

4.1. Funkce mocninné (mocniny a odmocniny)

A. Mocninná funkce s přirozeným exponentem $\Longrightarrow$ $n \in \mathbb{N}$ je přirozené číslo.

Funkci

$$f : y = x^n\,, \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R} \text{ a } n \in \mathbb{N}\,, \qquad \text{kde } x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-krát}}$$

nazýváme **mocninnou funkcí s přirozeným exponentem**.

mocninné funkce $f : y = x^n$ s přirozeným exponentem $n \in \mathbb{N}$.

n **je sudé** Funkce $f : y = x^n$ má definiční obor $D(f) = \mathbb{R}$ a obor hodnot $H(f) = \langle 0; \infty)$.

Je to sudá funkce, zdola ohraničená, klesající na intervalu $(-\infty; 0\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 0; \infty)$. Proto není prostá (viz obrázek 7 vlevo).

Pokud však omezíme její definiční obor na interval $\langle 0; \infty)$, pak je tato nová funkce prostá a existuje k ní funkce inverzní.

n **je liché** Funkce $f : y = x^n$ má definiční obor $D(f) = \mathbb{R}$ a obor hodnot $H(f) = \mathbb{R}$.

Je to lichá funkce, není zdola ani shora ohraničená, je rostoucí na $D(f)$. Proto je prostá na celém svém definičním oboru (viz obrázek 8 vlevo) a existuje k ní funkce inverzní.

Funkci ***n*-tá odmocnina** pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ označujeme $f : y = \sqrt[n]{x}$ (čteme: nTÁ ODMOCNINA Z x) zavádíme

1. pro n **sudé** jako funkci inverzní k funkci $f : y = x^n$, $x \in \langle 0; \infty)$;
2. pro n **liché** jako funkci inverzní k funkci $f : y = x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

funkce $\boldsymbol{f} : y = \sqrt[n]{x}$.

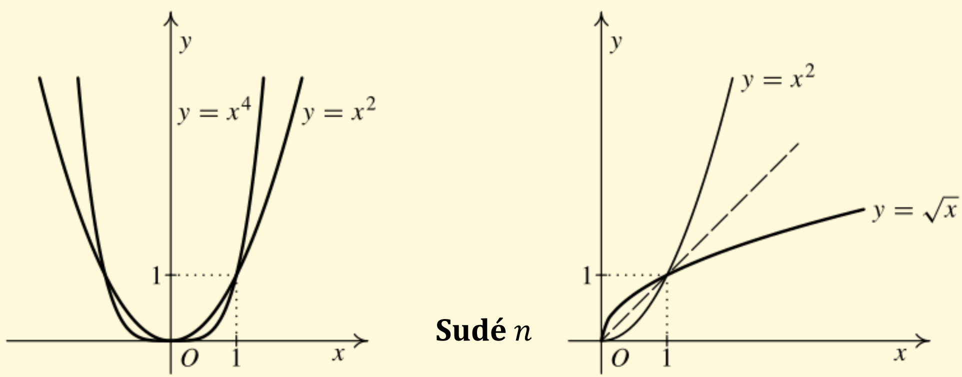
n **je sudé** $f : y = \sqrt[n]{x}$ má definiční obor $D(f) = \langle 0; \infty)$ a obor hodnot $H(f) = \langle 0; \infty)$.

Funkce není sudá ani lichá, je rostoucí na $D(f)$ a je zdola ohraničená (viz obrázek 7 vpravo).

n **je liché** $(n \geq 3)$ $f : y = \sqrt[n]{x}$ má definiční obor $D(f) = \mathbb{R}$ a obor hodnot $H(f) = \mathbb{R}$.

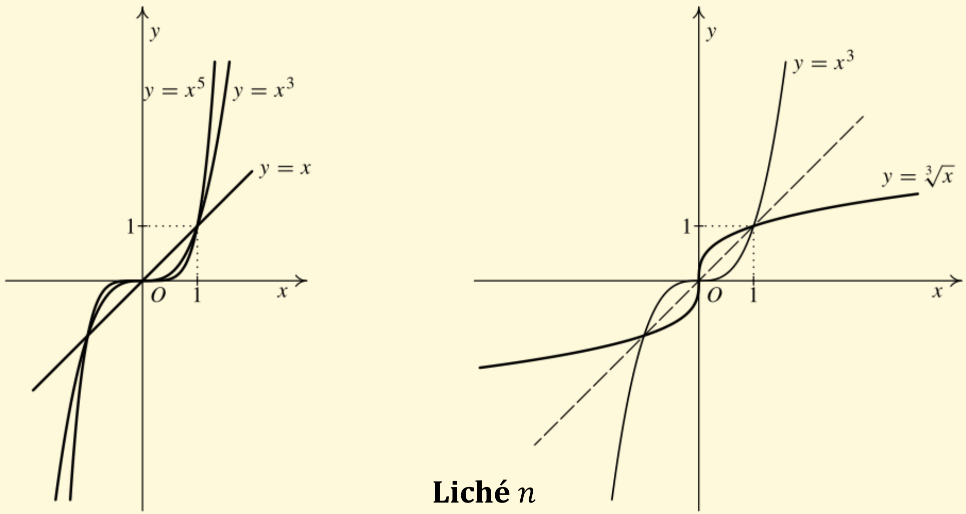
Je to lichá funkce, není zdola ani shora ohraničená, je rostoucí na $D(f)$ (viz obrázek 8 vpravo).

Obrázek 7: Převzat z [5]



Sudé n

Obrázek 8: Převzat z [5]



Liché n

1. **Sudé** odmocniny jsou definovány jen pro $x \in \langle 0; \infty)$.
   (!!! Není pravda, že $\sqrt{-4} = -2$.)

2. **Liché** odmocniny jsou definovány pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

3. **Odmocnina je funkce**, proto je dána jednoznačně.
   (!!! Není pravda, že $\sqrt{4} = \pm 2$. Správně je **pouze** $\sqrt{4} = 2$.)

Uvědomte si, že pracujeme výlučně s reálnými čísly $\boldsymbol{x}$. V množině komplexních čísel bychom s mocninami i s odmocninami zacházeli jinak.

B. Mocninná funkce se záporným celým exponentem $\Longrightarrow$ $n \in \mathbb{N}$ je přirozené číslo.

Funkci

$$f : y = x^{-n}, \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ a } n \in \mathbb{N}, \qquad \text{kde } x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}$$

nazýváme **mocninnou funkcí se záporným celým exponentem**.

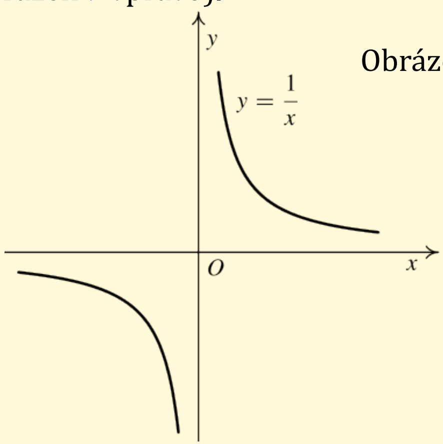
mocninné funkce $\boldsymbol{f} : y = x^{-n}$ se záporným celým exponentem $(n \in \mathbb{N})$.

n **je liché** $f : y = x^{-n}$ má definiční obor $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a obor hodnot $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

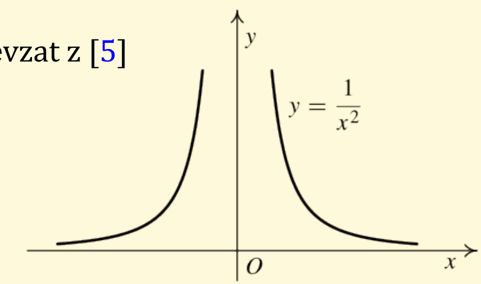
Je to lichá funkce, není zdola ani shora ohraničená, je klesající na $D(f)$ (viz obrázek 9 vlevo).

n **je sudé** $f : y = x^{-n}$ má definiční obor $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a obor hodnot $H(f) = \langle 0; \infty)$.

Je to sudá funkce, zdola ohraničená, rostoucí na intervalu $(-\infty; 0\rangle$ a klesající na intervalu $\langle 0; \infty)$ (viz obrázek 9 vpravo).



Obrázek 9: Převzat z [5]



C. Mocninná funkce s racionálním exponentem $\implies$ p/q, kde ($p \neq 0$ je celé číslo, $q \geq 2$ je přirozené číslo), je zlomek v základním tvaru (tj. p a q jsou nesoudělné $\Rightarrow$ nemají společného dělitele).

Funkci

$$f : y = x^{\frac{p}{q}}, \quad \text{kde} \quad x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

nazýváme **mocninnou funkcí s racionálním exponentem** $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Přitom definiční obor funkce $\boldsymbol{f}$ závisí na číslech p, q.

Celkem mohou nastat tyto čtyři případy:

$p > 0$	q liché	$\Rightarrow$ $D(f) = \mathbb{R}$
	q sudé	$\Rightarrow$ $D(f) = \langle 0; \infty)$
$p < 0$	q liché	$\Rightarrow$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
	q sudé	$\Rightarrow$ $D(f) = (0; \infty)$

1. Pokud není racionální exponent v základním tvaru, musíme ho nejdříve (krácením) upravit na základní tvar.

2. Předpoklad nesoudělnosti čísel $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ (který je podstatný), nám umožní pracovat s lichými odmocninami ze záporných čísel.

   Například $(-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$, protože $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

   Při vynechání předpokladu nesoudělnosti čísel $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ by definice funkce $\boldsymbol{f} : y = x^{\frac{p}{q}}$ nebyla korektní. Pro jedno zadání bychom mohli obdržet několik výsledků, což není správné.

   Protože by bylo $(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$ a zároveň $(-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

D. Mocninná funkce s reálným exponentem Zatím nemáme žádné vhodné prostředky pro zavedení mocninné funkce s reálným exponentem. Proto se spokojíme s tím, že každé reálné číslo lze s libovolnou a předem danou přesností vyjádřit pomocí vhodného zlomku.

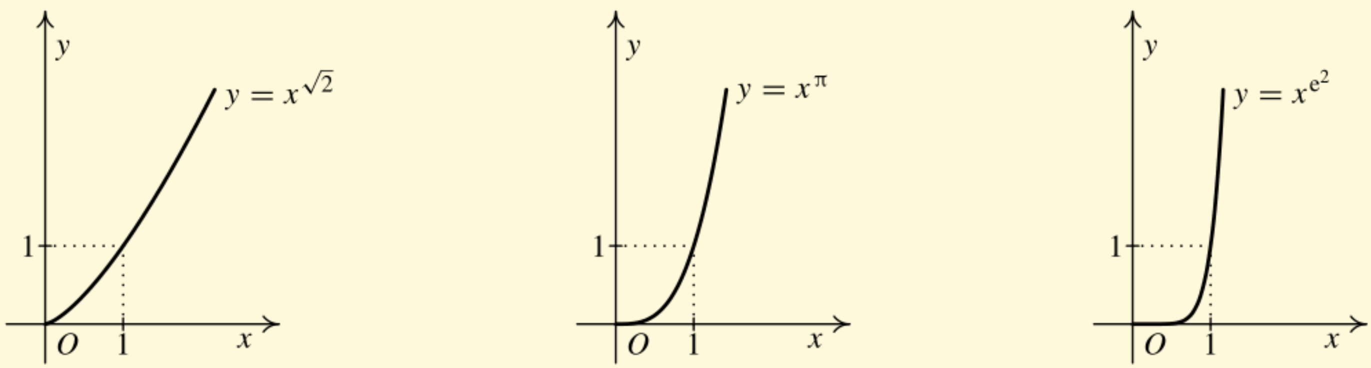
Například požadujeme určit $3^{\sqrt{2}}$ a stačí nám, když $\sqrt{2} \doteq 1{,}414\,213\,562$ vyjádříme s přesností na **jedno** desetinné místo.

Pak zvolíme $1{,}4 = \dfrac{14}{10} = \dfrac{7}{5}$ a platí $3^{\sqrt{2}} \doteq 3^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{3^7}$.

Pokud chceme odmocninu vyjádřit s přesností na **dvě** desetinná místa, volíme $1{,}41 = \dfrac{141}{100}$ a dostaneme lepší aproximaci $3^{\sqrt{2}} \doteq 3^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{3^{141}}$.

Když na **tři** desetinná místa, volíme $1{,}414 = \dfrac{1414}{1000} = \dfrac{707}{500}$ ...

Obrázek 10: Převzat z [5]



Mocninná funkce s iracionálním (reálným, který není racionální) exponentem

E. Mocninná funkce s nulovým exponentem Jestli jste pozorně studovali odstavce A), B), C) i D), jistě vám neuniklo, že jsme doposud nezavedli mocninnou funkci s nulovým exponentem. To nyní napravíme.

Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ položíme $x^0 = 1.$

Je-li tedy $r = 0$, pak mocninná funkce $f : y = x^r$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je rovna konstantní funkci $f : y = 1$. Tím máme funkci $f : y = x^r$ definovánu pro všechna různá $r \in \mathbb{R}$.

Z jednotlivých vztahů, kterými jsme zaváděli mocninnou funkci pro různé exponenty vidíme, že funkce $f : y = x^r$ je ve všech případech definována na intervalu $(0; +\infty)$ a v některých případech i na širších intervalech. Na tomto intervalu $(0; +\infty)$ platí následující vztah:

$$x^a = \mathrm{e}^{a \cdot \ln x}, \qquad x \in (0; +\infty), \quad a \in \mathbb{R}$$

přičemž funkce e^x a $\ln x$ zavedeme v následující kapitole 4.2.

Základní pravidla pro počítání s mocninami

Pro čísla $x, y \in (0; \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a \qquad \frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a \qquad \frac{1}{x^a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a \qquad x^0 = 1$$

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \qquad (x^a)^b = x^{a \cdot b} \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

Základní pravidla pro počítání s odmocninami

Pro čísla $x, y \in (0; \infty)$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2, n \geq 2$ platí

$$\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x} \qquad \sqrt[n]{x^k} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^k \quad k \text{ je celé číslo}$$

Poznámka: Všimněte si, že všechny vzorce uvedené v tomto rámečku platí za podmínky $x > 0, y > 0$. Například $\sqrt{x^2} = x$ platí pouze pro kladná čísla x.

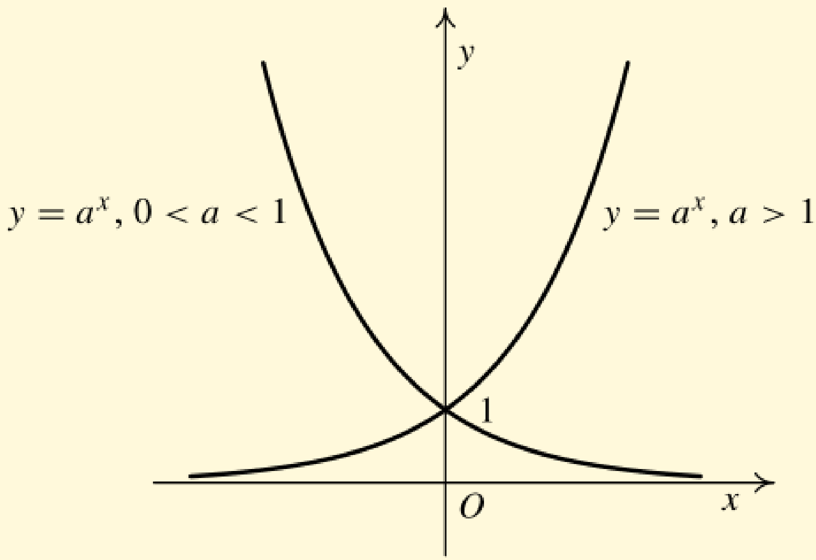
Obecně pro $x \in \mathbb{R}$ **platí** $\sqrt{x^2} = |x|$ **.**

4.2. Funkce exponenciální a logaritmická

Exponenciální funkcí o základu $\boldsymbol{a}$, kde $\boldsymbol{a}$ je kladné reálné číslo $a \in (0; \infty)$, nazýváme následující předpis

$$f : y = a^x$$

Obrázek 11: Převzat z [5]



Exponenciální funkce

Vlastnosti exponenciální funkce $f : y = a^x$ (viz obrázek 11), pro $a > 0$:

- ***Definiční*** obor: $D(f) = (-\infty; \infty)$.
- Obor ***hodnot*** (pro $a \neq 1$): $H(f) = (0; \infty)$.
- Funkce (pro $a \neq 1$) ***není*** ani ***sudá*** ani ***lichá***.
- Funkce (pro $a \neq 1$) ***není periodická***.
- Funkce je ***rostoucí*** (pro $a > 1$), ***klesající*** (pro $0 < a < 1$), ***konstantní*** (pro $a = 1$).

Základní pravidla pro počítání s exponenciální funkcí

Pro čísla $a \in (0; \infty)$, $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Poznámka:

1. Velmi významné místo mezi exponenciálními funkcemi zaujímá ***přirozená exponenciální funkce*** $f : y = \mathrm{e}^x$, kde **e** se nazývá Eulerovo číslo [17] ($\mathrm{e} = 2{,}718\,281\ \ldots$). Většinou definujeme toto číslo **e** pomocí limity posloupnosti: $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

[17] Označení pro toto iracionální číslo zavedl roku 1731 L. Euler.
Významem se Eulerovo číslo **e** vyrovnává Ludolfovu číslu π.

2. Funkci $f : y = \mathrm{e}^x$ lze definovat pomocí součtu nekonečné mocninné řady. Jen pro zajímavost tuto řadu uveďme:
$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$
3. Exponenciální funkci o základu deset ($f : y = 10^x$) se nazývá ***dekadická exponenciální funkce***.
4. Exponenciální funkce je důležitá pro modelování nejrůznějších jevů, protože vyjadřuje *„zákon přirozeného růstu"*. Sem patří organický růst (např. množství dřeva v lese, počet obyvatel), vyrovnávání rozdílů (např. ochlazování, rozpouštění, vybíjení kondenzátoru), některé chemické reakce atd. Typickým příkladem přirozeného růstu je nepřetržité či spojité (složené) úrokování.

Exponenciální funkce $f : y = a^x$ ***je pro*** každé reálné číslo $\boldsymbol{x}$ a ***pro*** každé reálné číslo $\boldsymbol{a}$ $0 < a \neq 1$ ***prostá***, proto k ní existuje inverzní funkce.

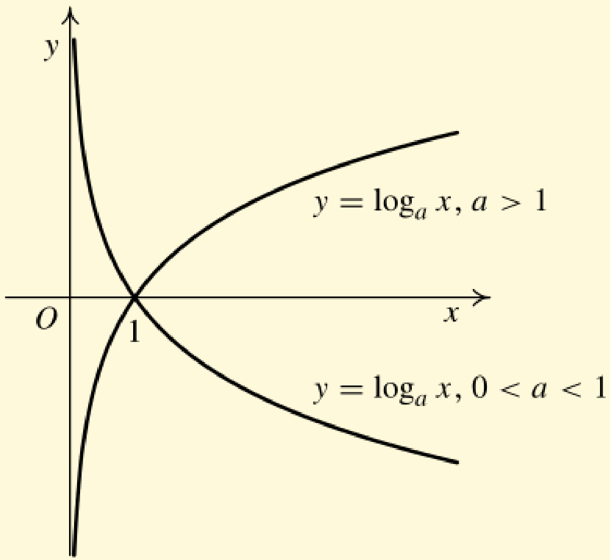
Logaritmická funkce

Inverzní funkci $\boldsymbol{f}$ k funkci $f^{-1} : y = a^x$ nazýváme **logaritmickou funkcí o základu $\boldsymbol{a}$,** kde $\boldsymbol{a}$ je kladné reálné číslo různé od jedničky $(0 < a \neq 1)$, a označujeme
$$f : y = \log_a x\,, \qquad 0 < a \neq 1\,, \quad x \in (0; \infty)\,.$$

Podle předchozího rámečku tedy pro reálná čísla s následujícími vlastnostmi platí:
$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y\,, \qquad 0 < a \neq 1\,, \quad x \in (0; \infty)\,, \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

Vlastnosti logaritmické funkce $f : y = \log_a x$ (viz obrázek 12), pro $a > 0$:

Obrázek 12: Převzat z [5]



Logaritmické funkce

- ***Definiční*** obor: $D(f) = (0; \infty)$.
- Obor ***hodnot***: $H(f) = (-\infty; \infty)$.
- Funkce ***není*** ani ***sudá*** ani ***lichá***.
- Funkce ***není periodická***.
- Funkce je ***rostoucí*** (pro $a > 1$) a ***klesající*** (pro $0 < a < 1$) .

Základní pravidla pro počítání s logaritmickou funkcí

Pro reálná čísla $0 < a \neq 1$, $0 < b \neq 1$, $s \in \mathbb{R}$, $x, y \in (0; \infty)$ platí

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^s = s \cdot \log_a x$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Poznámka:

1. Funkční hodnoty logaritmické funkce se nazývají ***logaritmy***.
   Symbol $\log_a x$ čteme: „LOGARITMUS ČÍSLA x O ZÁKLADU a“.
2. Logaritmickou funkci o základu $\boldsymbol{a} = \mathbf{e}$ (Eulerovo číslo) nazýváme *přirozenou logaritmickou funkcí* a označujeme $f : y = \ln x$. Tedy místo $\log_{\mathrm{e}} x$ píšeme $\mathbf{ln}\, \boldsymbol{x}$.
   Její funkční hodnoty se nazývají ***přirozené logaritmy***.
3. Logaritmickou funkci o základu $\boldsymbol{a} = \mathbf{10}$ nazýváme *dekadickou* (desítkovou) *logaritmickou funkcí* a označujeme $f : y = \log_{10} x$ Místo $\log_{10} x$ píšeme $\mathbf{log}\, \boldsymbol{x}$.
   Její funkční hodnoty se nazývají ***dekadické logaritmy*** (desítkové logaritmy).
4. Vztah mezi exponenciální funkcí o základu $\boldsymbol{a}$ a o základu $\mathbf{e}$ je dán rovností

$$a^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a} \qquad \text{pro} \quad 0 < a \neq 1\,, \; x \in \mathbb{R}\,.$$

5. Pokud označíme

$$f(x) : y = a^{(x)}\,, \quad 0 < a \neq 1\,, \qquad D(f) = (-\infty; +\infty)\,, \quad H(f) = (0; +\infty)$$
$$f^{-1}(x) : y = \log_a (x)\,, \quad 0 < a \neq 1\,, \quad D(f^{-1}) = (0; +\infty)\,, \quad H(f^{-1}) = (-\infty; +\infty)$$

pak platí:

$$[f \circ f^{-1}](x) = f[f^{-1}(x)] = a^{[f^{-1}(x)]} = a^{\log_a x} = x \qquad \text{pro } x \in (0; \infty)\,,$$
$$[f^{-1} \circ f](x) = f^{-1}[f(x)] = \log_a [f(x)] = \log_a a^x = x \cdot \log_a a = x \cdot 1 = x \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}\,.$$

6. ***Logaritmus svého základu se rovná jedné*** $\implies$ $\log_a a = 1$ pro $0 < a \neq 1$.

4.3. Funkce goniometrické

Goniometrické [18] funkce znáte ze střední školy z jejich hlavního užití při výpočtu prvků trojúhelníku (v trigonometrii). Připomeňme, že umíte úhly měřit v míře stupňové a v míře obloukové (v radiánech) [19]. Víte, že $\sphericalangle 1^\circ$ (jeden stupeň) v míře stupňové je roven úhlu $\pi/180$ rad. Obecně

$$n^\circ = n \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}\,.$$

A tedy: $1 \text{ rad} = \dfrac{180}{\pi}[^\circ] \doteq 57{,}3^\circ$.

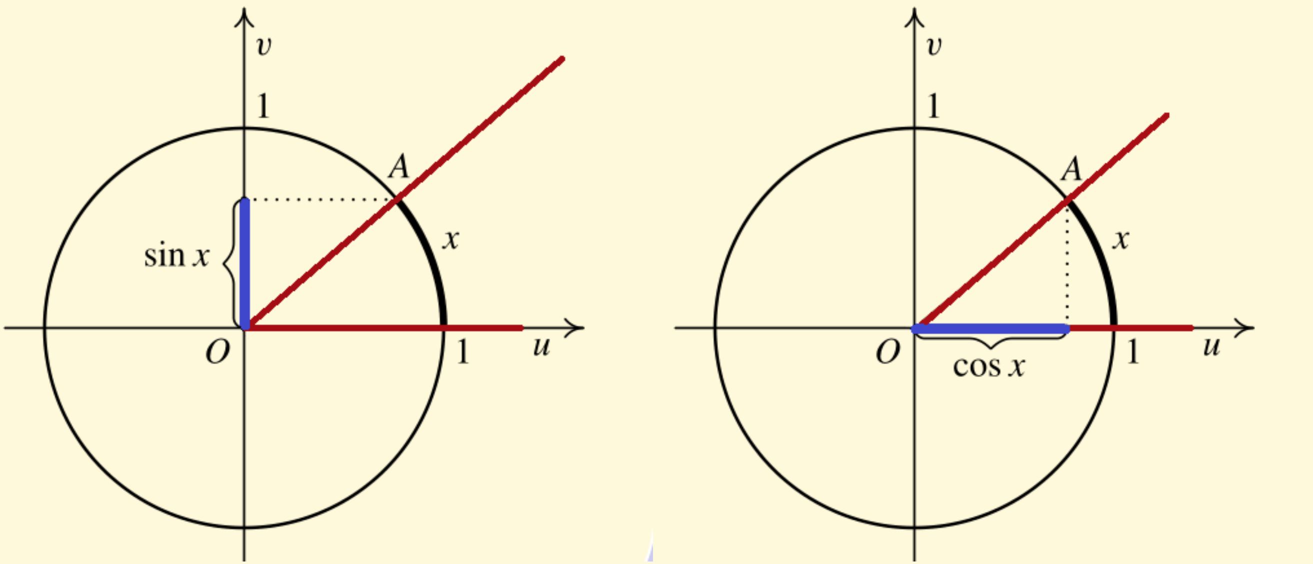
[18] Můžeme přeložit jako ***úhloměrné***.

[19] Existují ještě i jiné jednotky pro měření úhlů.
Pravý úhel $= 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad $= 100$ grad (gradián – dříve ve Francii) $= 6$ hodin (v astronomii)

Sinus a kosinus

V souřadné soustavě nakresleme jednotkovou kružnici (má střed v počátku soustavy souřadnic a její poloměr je 1 jednotka) a orientovaný úhel, který má tmavočervenou barvu. Vrchol úhlu je opět v počátku soustavy souřadnic, počáteční rameno úhlu splývá s kladnou částí osy u a koncové rameno prochází bodem $\boldsymbol{A}$ o souřadnicích $A = [u_A\,; v_A]$, což je průsečík koncového ramena orientovaného úhlu s jednotkovou kružnicí — viz obrázek 13.

Obrázek 13: Sinus a kosinus



sin x cos x

Sinus je funkce, jejíž hodnota je v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ rovna **svislé** souřadnici v_A bodu ***A***.

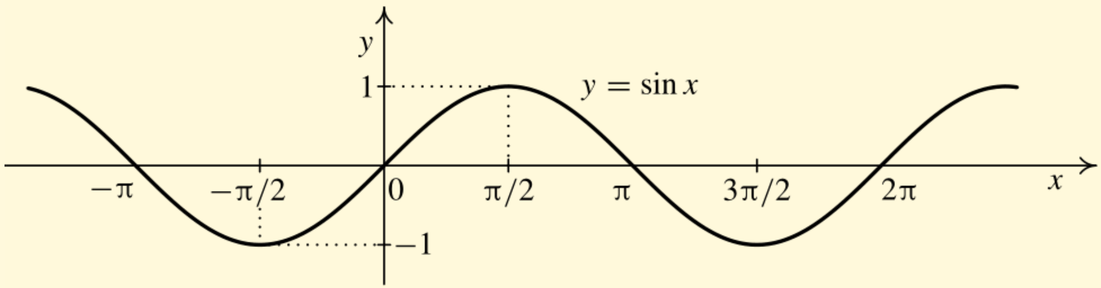
Kosinus je funkce, jejíž hodnota je v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ rovna **vodorovné** souřadnici u_A bodu ***A***.

Pro takto zavedené funkce plyne:

Funkce sinus : $y = \sin x$

Graf (obrázek 14) funkce sinus se nazývá ***sinusoida***.

Obrázek 14: Převzat z [5]



Sinusoida

Poznámka: Podle definice stačí sestrojit graf sinusoidy v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ a potom jej periodicky prodloužit.

Vlastnosti funkce sinus: $\boldsymbol{f} : y = \sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}$

- **Definiční** obor funkce sinus: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- Obor **hodnot** funkce sinus: $H(f) = \langle -1; 1\rangle$
- Funkce sinus je **lichá**: $\Longrightarrow \quad \sin(-x) = -\sin x$
- Funkce sinus je **periodická** se základní periodou 2π
  $\sin(x + 2k\pi) = \sin x\,,\ \ k$ je celé číslo ($k \in \mathbb{Z}$)
- Funkce sinus je

  rostoucí na intervalech $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$

  klesající na intervalech $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\rangle\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$

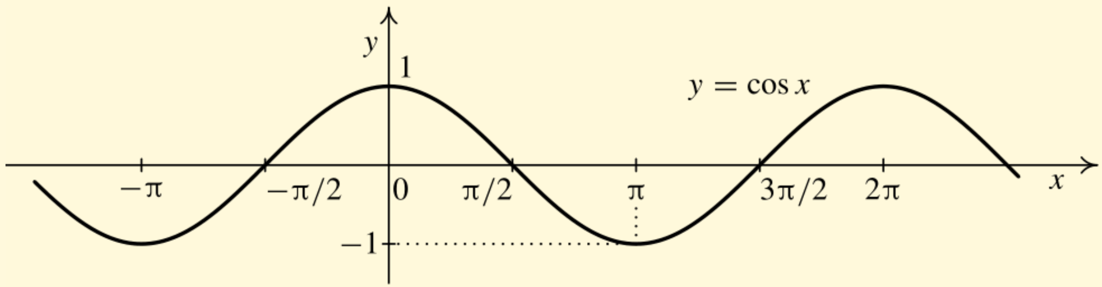
Tabulka hodnot funkce sinus ve význačných bodech:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
což je	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$		

Funkce kosinus : $y = \cos x$

Graf (obrázek 15) funkce kosinus se nazývá ***kosinusoida***.

Obrázek 15: Převzat z [5]



Poznámka: Stejně jako u funkce sinus stačí sestrojit graf kosinusoidy v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ a potom jej periodicky prodloužit.

Vlastnosti funkce kosinus: $\boldsymbol{f} : y = \cos x\,, \quad x \in \mathbb{R}$

- **Definiční** obor funkce kosinus: $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- Obor **hodnot** funkce kosinus: $H(f) = \langle -1; 1\rangle$
- Funkce kosinus je **sudá**: $\Longrightarrow \quad \cos(-x) = \cos x$
- Funkce kosinus je **periodická** se základní periodou 2π
  $\cos(x + 2k\pi) = \cos x\,, \ k \in \mathbb{Z}$ (k je celé číslo)
- Funkce kosinus je
  rostoucí na intervalech $\langle -\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi\rangle\,, \ k \in \mathbb{Z}$ (k je celé číslo)
  klesající na intervalech $\langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi\rangle\,, \ k \in \mathbb{Z}$

Tabulka hodnot funkce kosinus ve význačných bodech:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
což je	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$		

Základní vztahy pro sinus a kosinus

Všechny dále uvedené rovnosti platí všude, kde je současně definována levá i pravá strana rovnosti.

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \tag{9}$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \tag{10}$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y \tag{11}$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \tag{12}$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{13}$$

Prvním čtyřem vztahům říkáme součtové vzorce pro sinus a kosinus. Ze vztahů (9) a (10) lze odvodit řadu dalších vztahů. Například vzorec (11) dostaneme tak, že ve vzorci (9) nahradíme symbol ***y*** symbolem ***–y*** a využijeme *„lichosti“* funkce sinus a *„sudosti“* funkce kosinus. Vztah (12) získáme, když v (10) nahradíme symbol ***y*** symbolem ***–y*** a ... Vzorec (13) dostaneme tak, když ve vzorci (10) položíme ***y = –x***.

Vztah (13) se někdy nazývá ***goniometrická jednička***. Připomeňme, že $\sin^2 x$ je stručný zápis výrazu $[\sin x]^2$. Nezaměňovat se $\sin x^2$, což je naprosto něco jiného!

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{14}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{15}$$

Vzorec (14) dostaneme ihned ze vztahu (12) a vzorec (15) ze vztahu (11).

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \tag{16}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{17}$$

Vzorec (16) dostaneme tak, že v součtovém vzorci (9) položíme $\boldsymbol{y = x}$. Obdobně pro odvození vztahu (17) použijeme vztah (10).

Následující vzorce (18) (19) používáme při integrování goniometrických funkcí, kdy integrovanou gon. funkci pomocí vhodné substituce a těchto vzorců převedeme na racionální lomenou funkci.

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \tag{18}$$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \tag{19}$$

Někdy se hodí i následující součtové vzorce:

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \tag{20}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \tag{21}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \tag{22}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \tag{23}$$

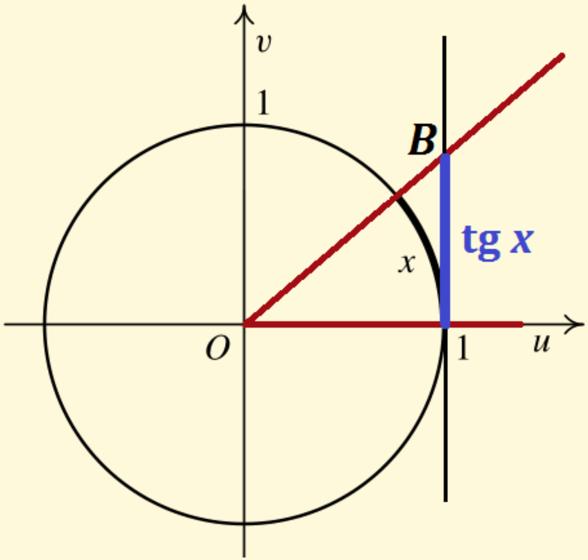
Tangens a kotangens

V souřadné soustavě nakresleme jednotkovou kružnici (má střed v počátku soustavy souřadnic a její poloměr je 1 jednotka) a orientovaný úhel, který má tmavočervenou barvu. Vrchol úhlu je opět v počátku soustavy souřadnic, počáteční rameno úhlu splývá s kladnou částí osy u a koncové rameno prochází bodem $\boldsymbol{B}$ o souřadnicích $B = [u_B\,;v_B]$, (což je průsečík koncového ramena orientovaného úhlu s tečnou sestrojenou k jednotkové kružnici v bodě $[1\,;0]$) a bodem $\boldsymbol{C}$ o souřadnicích $C = [u_C\,;v_C]$, (což je průsečík koncového ramena orientovaného úhlu s další tečnou sestrojenou k jednotkové kružnici nyní v bodě $[0\,;1]$) — viz obrázek 16.

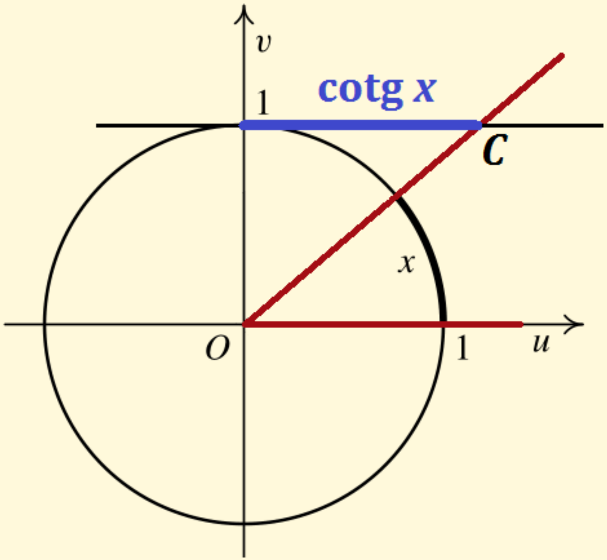
Tangens je funkce, jejíž hodnota je v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, který není roven lichým násobkům $\pi/2$, rovna **svislé** souřadnici v_B bodu $\boldsymbol{B}$.

Pro liché násobky $\pi/2$ totiž žádný průsečík $\boldsymbol{B}$ nedostaneme, protože rameno úhlu a tečna ke kružnici jsou navzájem rovnoběžné.

Obrázek 16: Tangens a kotangens



tg x



cotg x

Kotanges je funkce, jejíž hodnota je v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ který není roven násobkům π rovna **vodorovné** souřadnici u_C bodu $\boldsymbol{C}$.

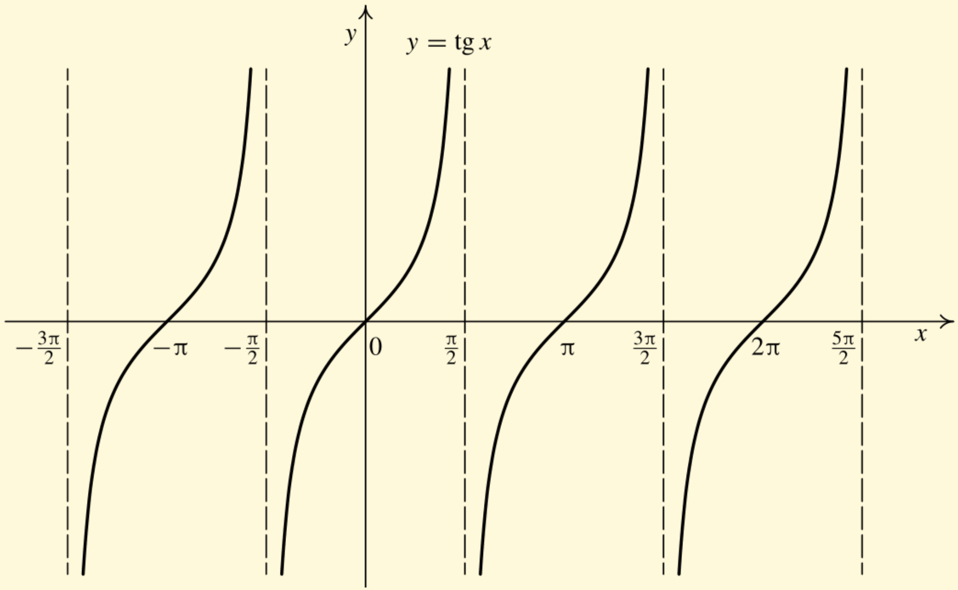
Pro násobky π totiž žádný průsečík $\boldsymbol{C}$ nedostaneme, protože rameno úhlu a tečna ke kružnici jsou navzájem rovnoběžné.

Pro takto zavedené funkce z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Funkce tangens : $y = \mathrm{tg}\, x$

Obrázek 17: Převzat z [5]



Vlastnosti funkce tangens: $\boldsymbol{f} : y = \mathrm{tg}\, x\,,\quad x \in \mathbb{R}$ mimo lichých násobků $\pi/2$ (obrázek 17)

- **Definiční** obor funkce tangens: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ (***k*** je celé číslo)
- Obor **hodnot** funkce tangens: $H(f) = (-\infty; \infty)$
- Funkce tangens je **lichá**: $\implies$ $\mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\, x$
- Funkce tangens je **periodická** se základní periodou π
  $\mathrm{tg}\,(x + k\pi) = \mathrm{tg}\, x\,,\ k \in \mathbb{Z}$
- Funkce tangens je ***rostoucí*** na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)\,,\ k \in \mathbb{Z}$

Tabulka hodnot funkce tangens ve význačných bodech:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—

Funkce kotangens : $y = \mathrm{cotg}\, x$

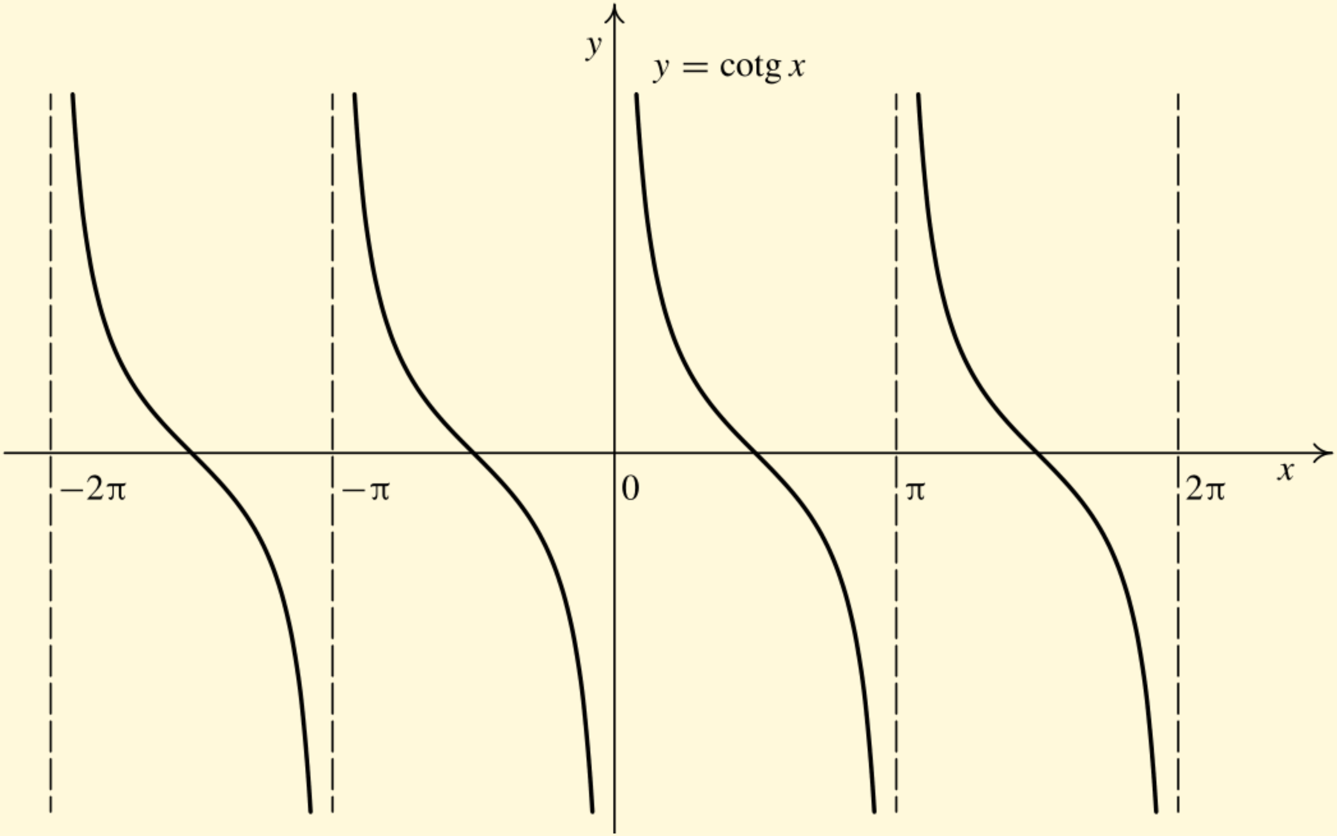
Vlastnosti funkce kotangens: $\boldsymbol{f} : y = \mathrm{cotg}\, x\,,\quad x \in \mathbb{R}$ mimo násobků π (obrázek 18)

- **Definiční** obor funkce kotangens: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ (***k*** je celé číslo)
- Obor **hodnot** funkce kotangens: $H(f) = (-\infty; \infty)$
- Funkce kotangens je **lichá**: $\Longrightarrow\quad \mathrm{cotg}\,(-x) = -\mathrm{cotg}\, x$
- Funkce kotangens je **periodická** se základní periodou π
  $\mathrm{cotg}\,(x + k\pi) = \mathrm{cotg}\, x\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$
- Funkce kotangens je ***klesající*** na intervalech $(0 + k\pi; \pi + k\pi)\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$

Tabulka hodnot funkce kotangens ve význačných bodech:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\mathrm{cotg}\, x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

Obrázek 18: Převzat z [5]



4.4. Funkce cyklometrické

Cyklometrické funkce budeme definovat jako inverzní funkce k odpovídajícím funkcím goniometrickým. To je ovšem velmi nepřesně řečeno, neboť ani jedna z goniometrických funkcí není prostá na celém svém definičním oboru.

Podívejme se nejprve na funkci sinus. Funkce $f : y = \sin x\,, \ \ x \in \mathbb{R}\,,$ není prostá. Ale funkce

$$f_1 : y = \sin x\,, \quad x \in \langle -\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2} \rangle$$

$$f_2 : y = \sin x\,, \quad x \in \langle \tfrac{\pi}{2}; \tfrac{3\pi}{2} \rangle$$

$$f_3 : y = \sin x\,, \quad x \in \langle \pi; \tfrac{3\pi}{2} \rangle$$

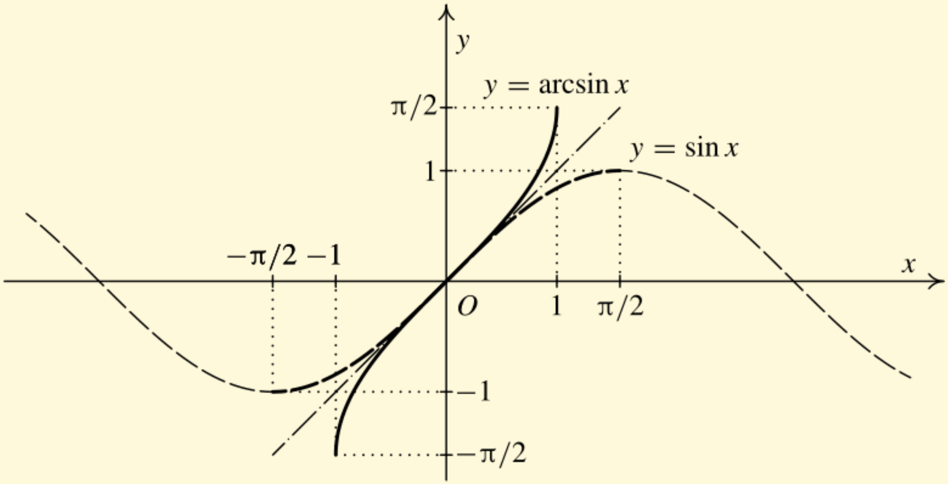
již prosté jsou. Lze tedy mluvit o funkcích inverzních k těmto funkcím. Přitom jedna z těchto funkcí, konkrétně funkce $\boldsymbol{f}_1$, je považována za „základní“ a funkce k ní inverzní se nazývá ***arkussinus***. Obdobnou úvahu lze provést i pro ostatní goniometrické funkce.

Funkce arkussinus : $y = \arcsin x$

Vlastnosti funkce arkussinus: $\boldsymbol{f} : y = \arcsin x\,, \quad x \in \langle -1; 1 \rangle$ (viz obrázek 19)

- **Definiční** obor funkce arkussinus: $D(f) = \langle -1; 1 \rangle$
- Obor **hodnot** funkce arkussinus: $H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$
- Funkce arkussinus je **lichá**: $\implies$ $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
- Funkce arkussinus není **periodická**
- Funkce arkussinus je **rostoucí** na celém svém definičním oboru

Obrázek 19: Převzat z [5]



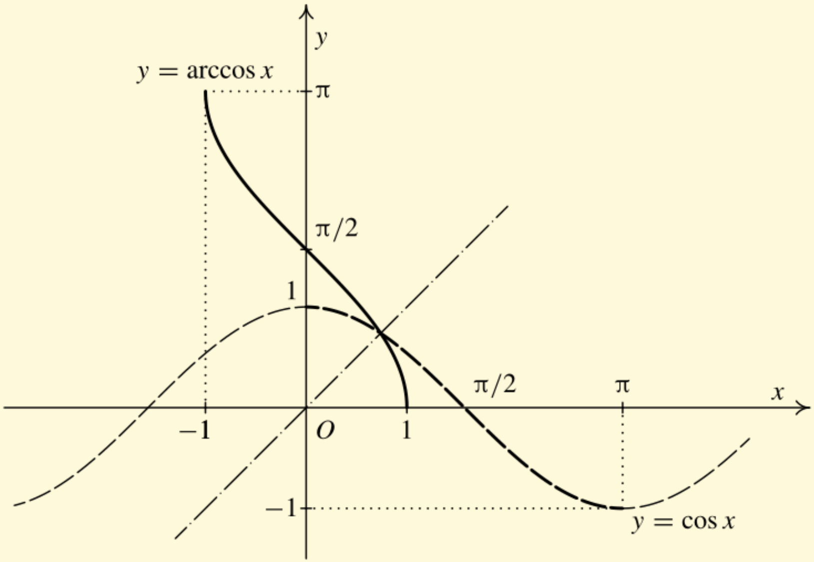
Uvažujme funkci $f : y = \sin x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$. Tato funkce je rostoucí, a tedy prostá.

Inverzní funkce k funkci $\boldsymbol{f}$ se nazývá ***arkussinus***. Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.

Funkce $f : y = \sin x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ a funkce $f^{-1} : y = \arcsin x$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$ jsou navzájem inverzní. Jejich grafy jsou tedy souměrné podle přímky ***y = x*** (osy prvního a třetího kvadrantu).

Funkce arkuskosinus : $y = \arccos x$

Obrázek 20: Převzat z [5]



Uvažujme funkci $f : y = \cos x\,,\ x \in \langle 0; \pi\rangle\,.$ Tato funkce je klesající, a tedy prostá.

Inverzní funkce k funkci $\boldsymbol{f}$ se nazývá ***arkuskosinus*** . Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = \langle -1; 1\rangle\,.$

Funkce $f : y = \cos x\,,\ x \in \langle 0; \pi\rangle$ a funkce $f^{-1} : y = \arccos x\,,\ x \in \langle -1; 1\rangle$ jsou navzájem inverzní. Jejich grafy jsou tedy souměrné podle přímky ***y = x*** (osy prvního a třetího kvadrantu).

Vlastnosti funkce arkuskosinus: $\boldsymbol{f} : y = \arccos x\,, \quad x \in \langle -1; 1 \rangle$ (viz obrázek 20)

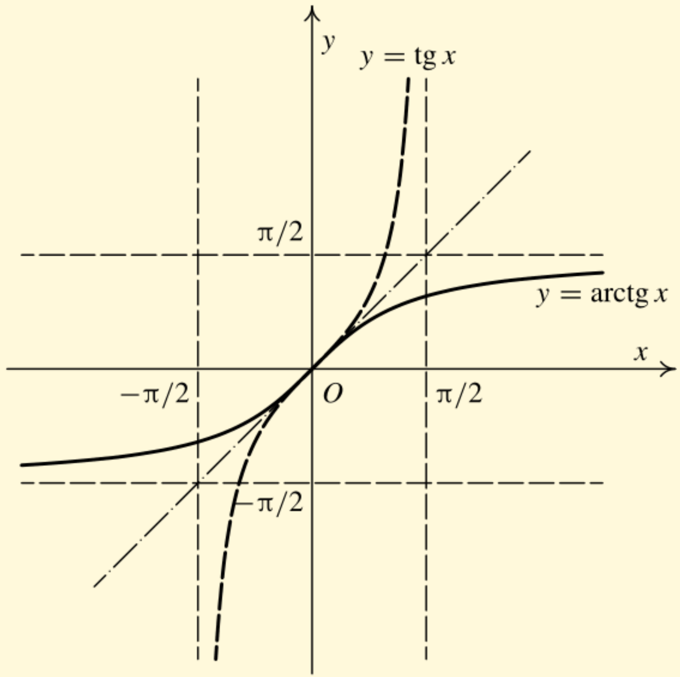
- **Definiční** obor funkce arkuskosinus: $D(f) = \langle -1; 1 \rangle$
- Obor **hodnot** funkce arkuskosinus: $H(f) = \langle 0; \pi \rangle$
- Funkce arkuskosinus **není** ani **lichá**, ani **sudá**
- Funkce arkuskosinus **není periodická**
- Funkce arkuskosinus **je klesající** na celém svém definičním oboru

Funkce arkustangens : $y = \operatorname{arctg} x$

Vlastnosti funkce arkustangens: $\boldsymbol{f} : y = \operatorname{arctg} x\,, \quad x \in \langle -1; 1 \rangle$ (viz obrázek 21)

- **Definiční** obor funkce arkustangens: $D(f) = (-\infty; \infty)$
- Obor **hodnot** funkce arkustangens: $H(f) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
- Funkce arkustangens **je lichá**: $\implies \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$
- Funkce arkustangens **není periodická**
- Funkce arkustangens **je rostoucí** na celém svém definičním oboru

Obrázek 21: Převzat z [5]



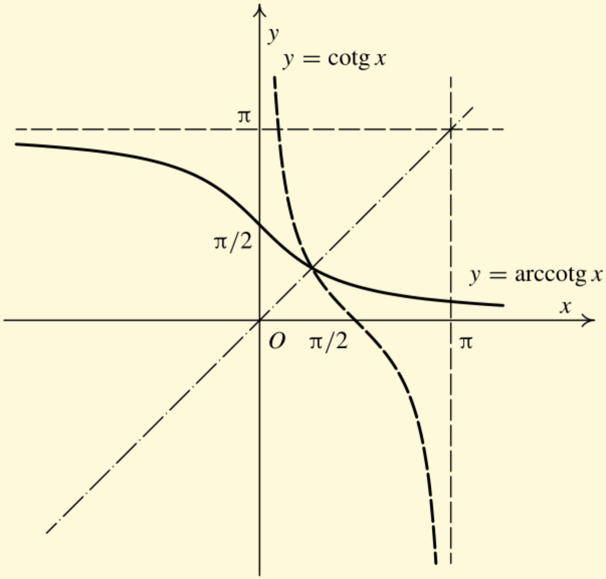
Uvažujme funkci $f : y = \operatorname{tg} x\,,\ \ x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Tato funkce je rostoucí, a tedy prostá.

Inverzní funkce k funkci f se nazývá ***arkustangens*** . Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = (-\infty; \infty)$.

Funkce $f : y = \operatorname{tg} x\,,\ \ x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ a funkce $f^{-1} : y = \operatorname{arctg} x\,,\ \ x \in (-\infty; \infty)$ jsou navzájem inverzní. Jejich grafy jsou tedy souměrné podle přímky ***y = x*** (osy prvního a třetího kvadrantu).

Funkce arkuskotangens : $y = \operatorname{arccotg} x$

Obrázek 22: Převzat z [5]



Uvažujme funkci $f : y = \operatorname{cotg} x\,,\ x \in (0; \pi)\,.$ Tato funkce je klesající, a tedy prostá.

Inverzní funkce k funkci $\boldsymbol{f}$ se nazývá ***arkuskotangens*** . Přitom $D(f^{-1}) = H(f) = (-\infty; \infty)\,.$

Funkce $f : y = \operatorname{cotg} x\,,\ x \in (0; \pi)$ a funkce $f^{-1} : y = \operatorname{arccotg} x\,,\ x \in (-\infty; \infty)$ jsou navzájem inverzní. Jejich grafy jsou tedy souměrné podle přímky ***y = x*** (osy prvního a třetího kvadrantu).

Vlastnosti funkce arkuskotangens: $\boldsymbol{f}: y = \operatorname{arctg} x\,, \quad x \in \langle -1; 1\rangle$ (viz obrázek 22)

- **Definiční** obor funkce arkuskotangens: $D(f) = (-\infty; \infty)$
- Obor **hodnot** funkce arkuskotangens: $H(f) = (0; \pi)$
- Funkce arkuskotangens **není** ani **lichá**, ani **sudá**
- Funkce arkuskotangens **není periodická**
- Funkce arkuskotangens **je klesající** na celém svém definičním oboru

Poznámka: Protože pro vzájemně inverzní funkce platí

$$[f^{-1} \circ f]\,(x) = f^{-1}[f(x)] = x \qquad \text{pro } x \in D(f)\;,$$
$$[f \circ f^{-1}]\,(x) = f[f^{-1}(x)] = x \qquad \text{pro } x \in D(f^{-1})\;,$$

dostáváme ihned následující vztahy:

$$\arcsin\,[\sin x] = x \qquad \text{pro } x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle\;,$$
$$\sin\,[\arcsin x] = x \qquad \text{pro } x \in \langle -1; 1\rangle\;.$$

Pozor! Například složená funkce $\arcsin\,[\sin x]$ je definovaná pro všechna reálná čísla x ($x \in \mathbb{R}$), ale předchozí rovnost platí jen na výše uvedeném intervalu. Proto například

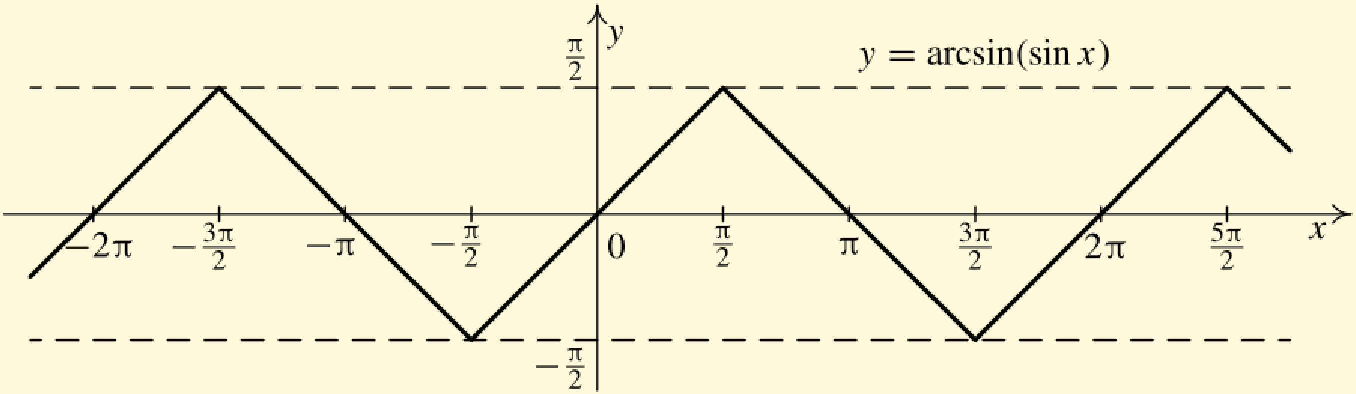
$$\arcsin\left[\sin\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4}\,, \qquad \text{ale} \qquad \arcsin\,[\sin \pi] = 0\,.$$

Většina kalkulaček toto zvládne, ale protože funkční hodnoty počítá pomocí mocninných řad, nemusíme obdržet naprosto přesný výsledek, ale například něco takového: $\arcsin\,[\sin\pi] \doteq 1{,}225 \cdot 10^{-16}$.

Chceme-li spočítat $f(\pi) = \arcsin[\sin\pi]$, musíme si uvědomit, že $\pi \notin \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$ ve kterém (a pouze jenom v tomto intervalu) platí rovnost $\arcsin[\sin x] = x$.

Proto musíme nejdříve najít takový argument $\boldsymbol{x}$ funkce $\sin x$, pro který platí $\sin x = \sin\pi$ tak, aby argument $\boldsymbol{x}$ ležel ve zmíněném intervalu: $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$.
Tedy:

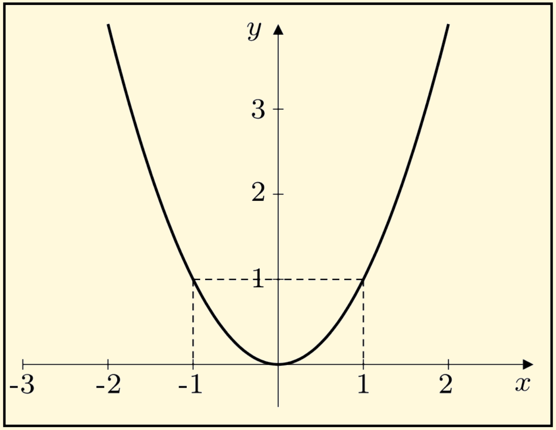
$$\arcsin[\sin\pi] = \arcsin 0 = \arcsin[\sin 0] = 0 \qquad \text{protože} \qquad \sin\pi = 0 = \sin 0 .$$



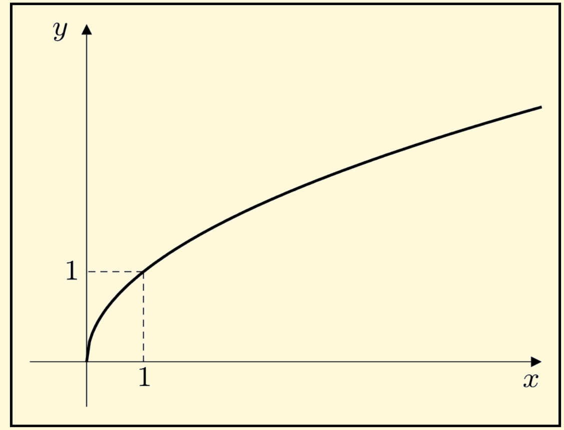
4.5. Mnohočleny (polynomy) a racionální lomené funkce

Další z elementárních funkcí jsou natolik důležité, že jim věnujeme celou následující kapitolu.

Autorem obrázků je R. Mařík

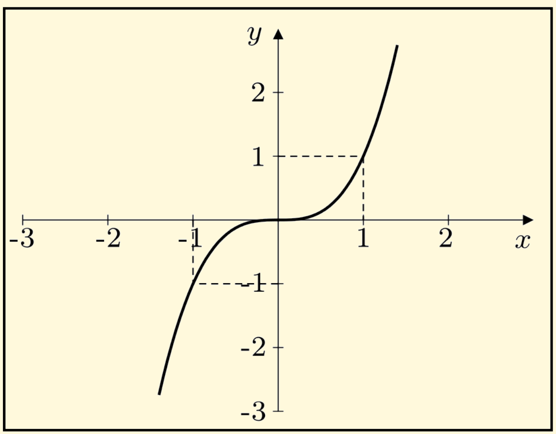


$y = x^2$

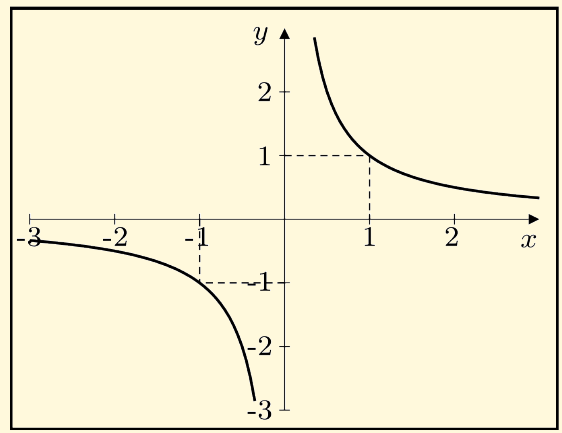


$y = \sqrt{x}$

Funkce mocninné

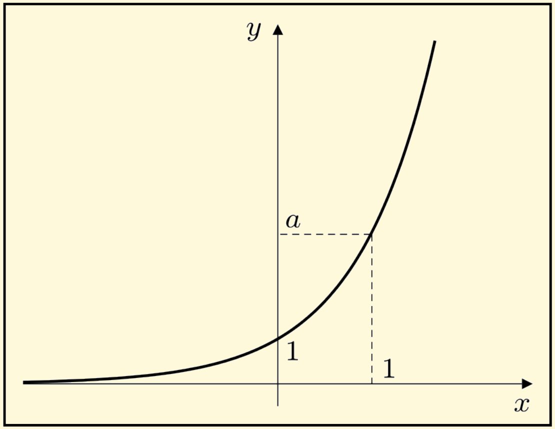


$y = x^3$

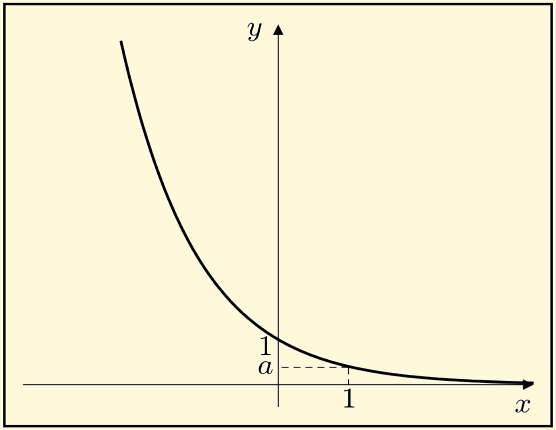


$y = \frac{1}{x}$

Autorem obrázků je R. Mařík

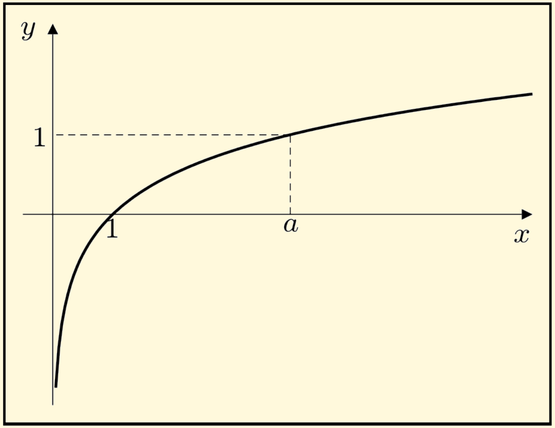


$y = a^x, \ a > 1$

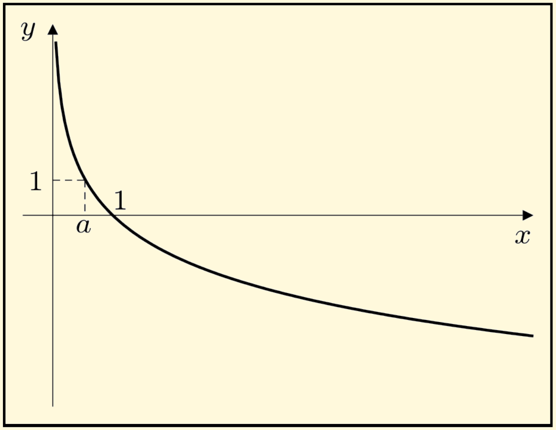


$y = a^x, \ 0 < a < 1$

Funkce exponenciální



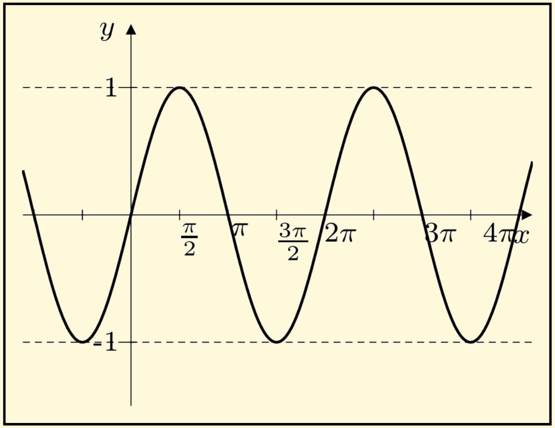
$y = \log_a x, \ a > 1$



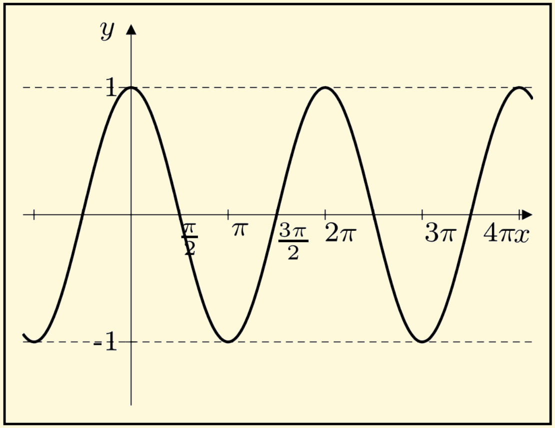
$y = \log_a x, \ 0 < a < 1$

Funkce logaritmické

Autorem obrázků je R. Mařík

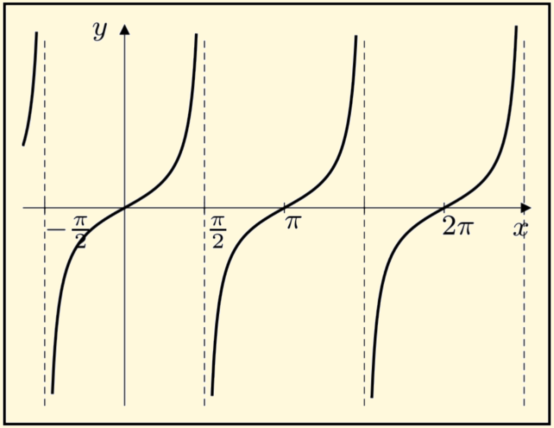


$y = \sin x$

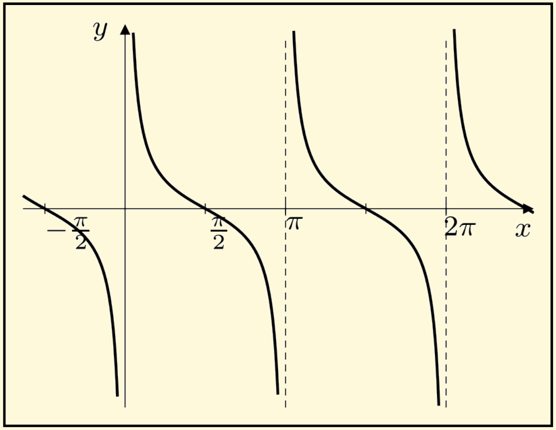


$y = \cos x$

Funkce goniometrické

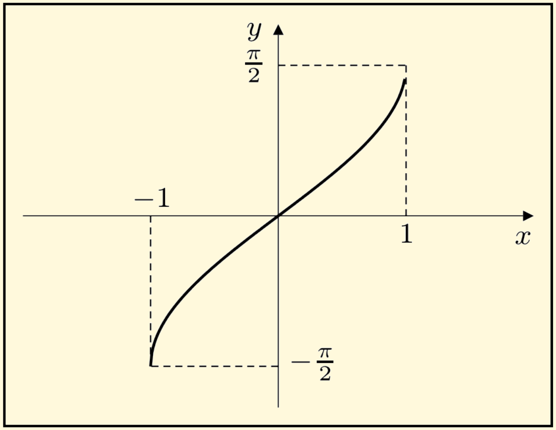


$y = \operatorname{tg} x$

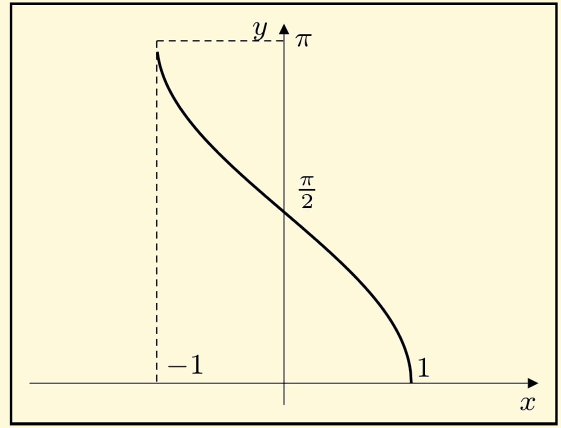


$y = \operatorname{cotg} x$

Autorem obrázků je R. Mařík

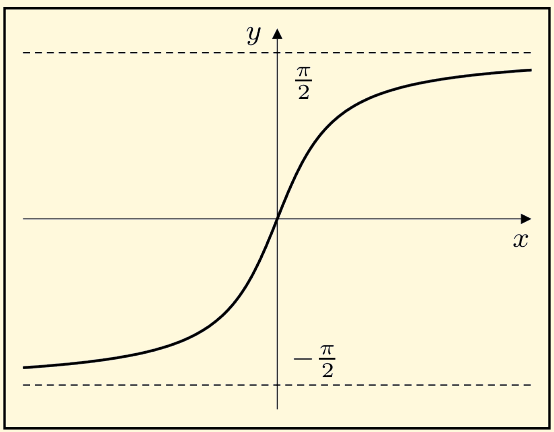


$y = \arcsin x$

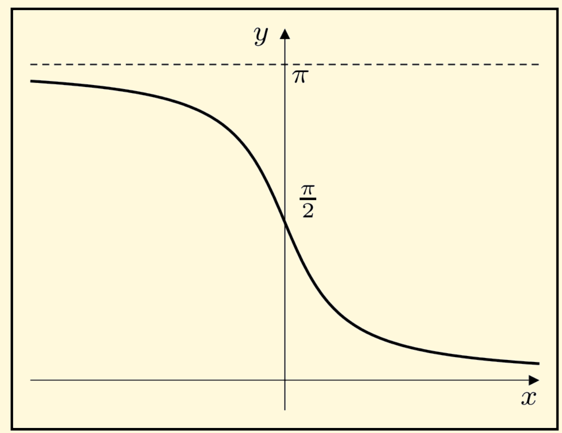


$y = \arccos x$

Funkce cyklometrické



$y = \operatorname{arctg} x$



$y = \operatorname{arcctg} x$

Mnohočleny a racionální lomená funkce

Obsah kapitoly: Mnohočleny a racionální lomená funkce

1. Mnohočleny — polynomy **212**

1.1. Rozklad mnohočlenu na součin . . . 214
1.2. Nalezení kořenů mnohočlenu . . . 214
1.2.1. Lineární rovnice . . . 215
1.2.2. Kvadratické rovnice . . . 215
Rovnice vyšších stupňů . . . 215
1.2.3. Mnohočleny s celočíselnými koeficienty . . . 217
1.2.4. Hornerovo schéma . . . 219
Další příklad . . . 245

2. Racionální lomená funkce **254**

2.1. Parciální zlomky . . . 255
2.2. Typy rozkladů na parciální zlomky . . . 256
2.3. Postup rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky . . . 257
2.3.1. ***Reálné jednonásobné*** kořeny jmenovatele . . . 259
2.3.2. ***Reálné vícenásobné*** kořeny jmenovatele . . . 266
2.3.3. ***Jednonásobné komplexně sdružené*** kořeny jmenovatele . . . 273
2.3.4. Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele . . . 280
2.4. Příklad – Ryze lomená racionální funkce . . . 287
Hledání kořenů jmenovatele . . . 293
Rozklad jmenovatele na součin . . . 300
Typy parciálních zlomků . . . 311

2.5. Příklad – Neryze lomená racionální funkce 314
Dělení mnohočlenu mnohočlenem 317
Hornerovo schéma 320
Rozklad jmenovatele na součin 326
Typy parciálních zlomků 328
Výsledek 330
2.6. Závěrečná poznámka k rozkladu na parciální zlomky 331

1. Mnohočleny — polynomy

Mějme nezáporné celé číslo n ($n \in \mathbb{N}_0$) a reálná čísla $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ a nenulové reálné číslo $a_n \neq 0$. Funkci

$$P_n : y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 , \qquad x \in \mathbb{R} ,$$

nazýváme (reálný) **mnohočlen** (polynom).
Čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ nazýváme **koeficienty mnohočlenu** a
číslo $\boldsymbol{n}$ nazýváme **stupeň mnohočlenu** (píšeme: $\operatorname{st} P = n$).

Stupeň mnohočlenu je tedy nejvyšší mocnina neznámé (proměnné) s nenulovým koeficientem.

Poznámka: Mezi mnohočleny počítáme i tzv. ***nulový mnohočlen*** $P : y = 0$, který nemá žádné nenulové koeficienty. Nulový mnohočlen nemá přiřazen žádný stupeň.
Je nutné důsledně rozlišovat mezi

mnohočlenem stupně nula — což je vlastně nenulová konstantní funkce, jejímž grafem je rovnoběžka s osou $\boldsymbol{x}$ různá od této osy

a

nulovým mnohočlenem — což je nulová konstantní funkce, jejímž grafem je právě osa $\boldsymbol{x}$.

Například:

Mnohočlen $R : y = x^3$ má stupeň 3. Přitom $a_3 = 1$, $a_2 = a_1 = a_0 = 0$, protože platí
$y = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0 = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0$

Mnohočlen $P : y = 3\,x^2 - 4\,x + 2$ má stupeň 2. Přitom $a_2 = 3$, $a_1 = -4$, $a_0 = 2$.

Mnohočlen $S : y = 2\,x - 3$ má stupeň 1. Přitom $a_1 = 2$, $a_0 = -3$.

Mnohočlen $T : y = 3$ má stupeň 0. Přitom $a_0 = 3$.

Mnohočleny jsou funkce. Lze je tedy:

sčítat — sečteme koeficienty u stejných mocnin,

odčítat — odečteme koeficienty u stejných mocnin a

násobit — násobíme každý člen jednoho mnohočlenu s každým členem druhého mnohočlenu a sloučíme členy se stejnými mocninami

a ***výsledkem je opět mnohočlen***.

Dělením dvou mnohočlenů nemusíme dostat mnohočlen. Výsledkem dělení dvou mnohočlenů je většinou obecnější funkce, kterou zavedeme v kapitole Racionální (lomená) funkce.

1.1. Rozklad mnohočlenu na součin

Smyslem rozkladu je napsat daný mnohočlen jako součin co nejjednodušších mnohočlenů. V reálném oboru jsou to činitelé (to co se násobí) v rozkladu

- buď ***lineární*** — tvaru: $x - \alpha$ (= kořenový činitel, pak α je kořenem daného mnohočlenu)
- nebo ***kvadratické*** — tvaru: $x^2 + p\,x + q$, kde $p^2 - 4q < 0$.

Pro zopakování uvedeme následující vzorce (známé ze střední školy), které využíváme při rozkladu mnohočlenu na součin kořenových činitelů.

$$
\begin{aligned}
a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)^2 & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= (a+b)^3 & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
& & a^2 - b^2 &= (a+b)\cdot(a-b) \\
(a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3 & a^3 - b^3 &= (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)
\end{aligned}
$$

1.2. Nalezení kořenů mnohočlenu

Nalézt (reálné) kořeny mnohočlenu $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ s reálnými koeficienty $\boldsymbol{a}_i$, kde $n \geq 1$, znamená vyřešit *algebraickou rovnici* $P(x) = 0$, tedy

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \tag{24}$$

Hledání kořenů mnohočlenu převádíme na hledání *kořenů rovnice* (24) $\Longrightarrow$ řešíme rovnici. Všimněme si, jak lze pro malá $\boldsymbol{n}$ algebraické rovnice řešit.

1.2.1. Lineární rovnice

Pro **$n = 1$** jde o lineární rovnici $a\,x + b = 0$, $a \neq 0$, jejíž jediný kořen je

$$x_1 = -\frac{b}{a}\ .$$

1.2.2. Kvadratické rovnice

Pro **$n = 2$** jde o kvadratickou rovnici $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, $a \neq 0$, pro jejíž kořeny se na střední škole odvozuje (doplněním na čtverec) vzorec

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ .$$

O povaze kořenů rozhoduje ***diskriminant*** *kvadratické rovnice* $D = b^2 - 4ac$. Je-li $D > 0$, má rovnice dva reálné různé kořeny, je-li $D = 0$, má jeden dvojnásobný reálný kořen, a je-li $D < 0$, má dvojici komplexně sdružených kořenů.

Rovnice třetího (kubické) a čtvrtého stupně

Pro **$n = 3$** jde o kubickou rovnici $a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$, $a \neq 0$, pro jejíž kořeny sice existují tzv. *Cardanovy vzorce* které však vyjadřují reálné kořeny pomocí třetích odmocnin z komplexních čísel.

Pro rovnice čtvrtého stupně existují také obecné vztahy k výpočtu kořenů (stejně jako Cardanovy vzorce byly nalezeny v první polovině 16. století). Jejich řešení je však ještě obtížnější než řešení rovnic třetího stupně.

Rovnice pátého stupně a vyšších stupňů

Norský matematik Abel dokázal, že pro kořeny rovnic pátého stupně (a tudíž ani vyšších stupňů) neexistuje univerzální vzorec. To však v žádném případě neznamená, že rovnice vyšších stupňů nemají kořeny. Tento Abelův výsledek pouze říká, že tyto kořeny nelze vyjádřit jistým vzorcem přesně popsaného typu.

Na počátku 19. století Gauss poprvé přesně dokázal větu, která je vzhledem k velkému významu pro tehdejší matematiku nazývána ***základní větou algebry***. Tato věta říká: *Libovolný polynom (s reálnými nebo komplexními koeficienty) stupně alespoň jedna má v množině komplexních čísel alespoň jeden kořen.*

Důsledky základní věty algebry:

1. Každý polynom stupně n má v komplexním oboru právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost.
2. Má-li mnohočlen s reálnými koeficienty komplexní kořen, potom má i kořen komplexně sdružený, přičemž jejich násobnosti jsou stejné.

Poznámka: Z předchozího textu je jasné, že neexistuje žádný univerzální postup, kterým bychom byli schopni zjistit všechny kořeny daného polynomu. Existuje sice celá řada numerických metod, kterými lze kořeny přibližně vyjádřit, ale to není náplní tohoto kurzu.

1.2.3. Mnohočleny s celočíselnými koeficienty

Mějme mnohočlen R s celočíselnými koeficienty:

$$R_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{25}$$

kde ***n*** je přirozené číslo ($1 \leq n \in \mathbb{N}$), $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ jsou **celá** čísla, kdy $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$.

Pokud je $\alpha = \dfrac{p}{q}$ (kde p, q jsou nesoudělná celá čísla) ***kořenem*** mnohočlenu R, pak $\boldsymbol{p}$ dělí beze zbytku koeficient a_0 (píšeme $p \mid a_0$) a $\boldsymbol{q}$ dělí beze zbytku koeficient a_n ($q \mid a_n$).

Při hledání racionálních kořenů mnohočlenu $R_n(x)$ (25) ***postupujeme*** tak, že určíme k-n-k *„kandidáty na kořen“*. Tedy:

1. Vypíšeme všechna možná racionální čísla k-n-k $= \frac{p}{q}$ (p, q nesoudělná ⇒ pokud lze, tak krátit) splňující podmínky $p \mid a_0$ (p dělí bezezbytku koeficient a_0) , $q \mid a_n$ (q dělí bezezbytku a_n)
2. Dosazením každého „kandidáta“ do mnohočlenu ověříme, zda tento je kořenem: $R_n(\text{k-n-k}) \stackrel{?}{=} 0$

Pokud mezi takto určenými „kandidáty“ kořen není, pak daný mnohočlen vůbec racionální kořen nemá.

Poznámka: Uvědomte si, že předchozí postup lze použít i pro mnohočleny s racionálními koeficienty. Stačí totiž vytknout společný jmenovatel všech koeficientů $a_0, \ldots, a_n$.

Příklad: Najděte (racionální) kořeny mnohočlenu $P_3(x) = 3\,x^3 - 5\,x^2 + 8\,x - 4$.

Řešení: Koeficienty mnohočlenu jsou celočíselné, stejně jako v případě (25), proto se pokusíme najít kořen ve tvaru: $\dfrac{p \mid -4}{q \mid 3}$. Kandidáty na kořeny jsou následující čísla: $\text{k-n-k} = \pm\dfrac{1\,;\;2\,;\;4}{1\,;\;3}$,

tedy $\pm 1\,, \pm 2\,, \pm 4\,, \pm\frac{1}{3}\,, \pm\frac{2}{3}\,, \pm\frac{4}{3}$

Zbývá ověřit, které z nich je skutečně kořenem. Podle důsledků základní věty algebry má daný mnohočlen právě tři kořeny v komplexním oboru, tedy z našich kandidátů mohou vyhovovat nejvýše tři čísla (přesněji: buď jedno, nebo tři). Ověření provedeme dosazením, přičemž pro kořen mnohočlenu platí: ***P*(kořen) = 0**.

$P(1) = 2$, $P(-1) = -20$, $P(2) = 16$, $P(-2) = -64$, $P(4) = 140$, $P(-4) = -308$,

$P(\frac{1}{3}) \doteq 1{,}778$, $P(-\frac{1}{3}) \doteq -7{,}333$, $P(\frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}$ je kořen.

Tady můžeme dosazování ukončit, protože jsme našli jeden kořen a každý ***mnohočlen lze vyjádřit jako součin svých kořenových činitelů***. Proto provedeme následující dělení

$$
\begin{array}{llll}
(3\,x^3 & -\,5\,x^2 & +\,8\,x & -\,4) : (x - \frac{2}{3}) = (3\,x^2 - 3\,x + 6) \\
\quad 0 & -\,3\,x^2 & +\,8\,x & \\
 & \quad 0 & +\,6\,x & -\,4 \\
 & & \quad 0 & \quad 0
\end{array}
$$

a po rozkladu: $3\,x^3 - 5\,x^2 + 8\,x - 4 = (x - \frac{2}{3}) \cdot (3x^2 - 3x + 6)$ nám zbývá najít kořeny druhé závorky, což je mnohočlen druhého stupně. Takže vlastně řešíme kvadratickou rovnici $3\,x^2 - 3\,x + 6 = 0$, která má komplexně sdružené kořeny.

Zadaný mnohočlen $P_3(x) = 3\,x^3 - 5\,x^2 + 8\,x - 4$ má jediný reálný kořen $x_1 = \frac{2}{3}$.

Pro výpočet funkční hodnoty mnohočlenu můžeme využít následujícího schématu, které se nazývá

1.2.4. Hornerovo schéma

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

Koeficienty mnohočlenu jsou celočíselné, stejně jako v případě (25). Proto vyzkoušíme po řadě ***všechny dělitele*** čísla **6** (k-n-k $= \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$) , jestli nejsou kořenem.

$$\frac{p \mid 6}{q \mid 1}$$

Ověření, zda konkrétní kandidát je kořenem, budeme zapisovat takto.

- Do hlavičky schématu napíšeme postupně koeficienty u ***všech*** mocnin neznámé, seřazené podle mocnin sestupně (od koeficientu u nejvyšší mocniny po absolutní člen). ***Žádný koeficient nesmíme vynechat.*** Pokud některá mocnina v mnohočlenu není obsažena, píšeme na patřičné místo schématu nulu.

- Do prvního sloupce vlevo budeme postupně vkládat jednotlivé (k-n-k) kandidáty na kořeny.

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	1	-1	-7	1	6
k-n-k	1				

Doplňování schématu: číslo uvnitř schématu (**1**) ***vynásobíme záhlavím řádku*** (**k-n-k**) a k součinu ***přičteme přičteme záhlaví dalšího sloupce*** (**−1**). ***Výsledek*** (k-n-k) $\cdot$ (1) + (−1) napíšeme v daném řádku do dalšího (volného) sloupce, místo červeného obdélníku.

A s číslem uvnitř schématu (výsledkem) provedeme tutéž operaci. Vynásobíme záhlavím řádku ...

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	1	-1	-7	1	6
	1				

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	$1 \cdot (1) + (-1)$			

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	$1 \cdot (1) + (-1)$ 0			

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
			$1 \cdot (0) + (-7)$		
1	1	0			

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
			$1 \cdot (0) + (-7)$		
1	1	0	-7		

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
				$1 \cdot (-7) + (1)$	
1	1	0	-7		

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
				$1 \cdot (-7) + (1)$	
1	1	0	-7	-6	

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
					$1 \cdot (-6) + (6)$
1	1	0	-7	-6	

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
					$1 \cdot (-6) + (6)$
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	0	-7	-6	0	$P(1) = 0$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	0	-7	-6	0	$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6
	1			

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6
1	1			

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6
1	1	1		

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6
1	1	1	-6	

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6 = (x - 1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6
1	1	1	-6	-12

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12
	1			

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6
1	1	1	-6	-12
-1	1			

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6
1	1	1	-6	-12
-1	1	-1	-6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen

$\Rightarrow x_2 = -1$ je (druhý) *kořen*

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot (x+1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12
−1	1	−1	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen

$\Rightarrow x_2 = -1$ je (druhý) *kořen*

HS	1	−1	−6
	1		

Zkoušíme $-1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6
1	1	1	-6	-12
-1	1	-1	-6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen

$\Rightarrow x_2 = -1$ je (druhý) *kořen*, opět jednonásobný

HS	1	-1	-6
-1	1	-2	-4
2	1		

Zkoušíme $-1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

x_2 již není kořen

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	0	-7	-6	0	$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	1	-6	-12	x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen
-1	1	-1	-6	0	$\Rightarrow x_2 = -1$ je (druhý) *kořen*, opět jednonásobný

HS	1	-1	-6	Zkoušíme $-1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
-1	1	-2	-4	x_2 již není kořen
2	1	1	-4	není kořen
-2	1			

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6	Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6
1	1	0	-7	-6	0	$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6	Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6
1	1	1	-6	-12	x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen
-1	1	-1	-6	0	$\Rightarrow x_2 = -1$ je (druhý) *kořen*, opět jednonásobný

HS	1	-1	-6	Zkoušíme -1; ± 2; ± 3; ± 6
-1	1	-2	-4	x_2 již není kořen
2	1	1	-4	není kořen
-2	1	-3	0	$\Rightarrow x_3 = -2$ je (třetí) *kořen*

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12
−1	1	−1	−6	0

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen

$\Rightarrow x_2 = -1$ je (druhý) *kořen*, opět jednonásobný

HS	1	−1	−6
−1	1	−2	−4
2	1	1	−4
−2	1	−3	0

Zkoušíme $-1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

x_2 již není kořen

není kořen

$\Rightarrow x_3 = -2$ je (třetí) *kořen*, opět jednonásobný

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

HS	1	−3
3	1	0

kde (čtvrtým) kořenem je $x_4 = 3$.

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	0	-7	-6	0	$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

Rozklad mnohočlenu: $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 + 0x^2 - 7x - 6) = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Nyní hledáme kořeny mnohočlenu $x^3 - 7x - 6$

HS	1	0	-7	-6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	1	-6	-12	x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen
-1	1	-1	-6	0	$\Rightarrow x_2 = -1$ je (druhý) *kořen*, opět jednonásobný

Rozklad: $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6) = (x-1)\cdot[x-(-1)]\cdot(x^2 - x - 6)$

Hledáme kořeny mnohočlenu $x^2 - x - 6$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo schéma)

HS	1	-1	-6	Zkoušíme $-1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
-1	1	-2	-4	x_2 již není kořen
2	1	1	-4	není kořen
-2	1	-3	0	$\Rightarrow x_3 = -2$ je (třetí) *kořen*, opět jednonásobný

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$

HS	1	-3
3	1	0

kde (čtvrtým) kořenem je $x_4 = 3$.

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$

HS	

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \quad \Longrightarrow \quad$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: $\pm\frac{1}{1} = \pm 1$, $\frac{2}{1} = \pm 2$, $\pm\frac{5}{1} = \pm 5$, $\pm\frac{10}{1} = \pm 10$, $\pm\frac{1}{2}$, $(\pm\frac{2}{2} = \pm 1)$, $\pm\frac{5}{2}$, $(\pm\frac{10}{2} = \pm 5)$

	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	2	-7	1	10
	2			

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$ $\dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \quad \Longrightarrow \quad \text{k-n-k} = \pm \dfrac{1\,;\;2\,;\;5\,;\;10}{1\,;\;2}$

Zkoušíme postupně: $\pm\frac{1}{1} = \pm 1\,,\ \frac{2}{1} = \pm 2\,,\ \pm\frac{5}{1} = \pm 5\,,\ \pm\frac{10}{1} = \pm 10\,,\ \pm\frac{1}{2}\,,\ (\pm\frac{2}{2} = \pm 1)\,,\ \pm\frac{5}{2}\,,\ (\pm\frac{10}{2} = \pm 5)$

	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	2	-7	1	10
		$1\cdot(2)+(-7)$	$1\cdot(-5)+(1)$	$1\cdot(-4)+(10)$
1	2	-5	-4	6

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \quad \Longrightarrow \quad \text{k-n-k} = \pm \dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1 , ± 2 , ± 5 , ± 10 , $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{5}{2}$,

HS	2	-7	1	10			
1	2	-5	-4	6	$\neq 0$	$\Rightarrow$	není kořen
-1	2						

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$ $\quad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \quad \Longrightarrow \quad$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1 , ± 2 , ± 5 , ± 10 , $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	-7	1	10	
1	2	-5	-4	6	$\neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ není kořen
-1	2	-9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \quad \Longrightarrow \quad$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	-7	1	10	
1	2	-5	-4	6	$\neq 0 \quad \Rightarrow$ není kořen
-1	2	-9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2\,x^2 - 9\,x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

	x^2	x^1	x^0
HS			

Rozklad mnohočlenu

$$2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(2\,x^2 - 9\,x + 10)$$

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \quad \Longrightarrow \quad \text{k-n-k} = \pm \dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1 , ± 2 , ± 5 , ± 10 , $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10			
1	2	−5	−4	6	$\neq 0$	$\Rightarrow$	není kořen
−1	2	−9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen		

Hledáme kořeny mnohočlenu $2\,x^2 - 9\,x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

	x^2	x^1	x^0
HS	2	−9	10
	2		

Rozklad mnohočlenu

$$2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(2\,x^2 - 9\,x + 10)$$

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\quad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \Longrightarrow$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\,2\,;\,5\,;\,10}{1\,;\,2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10	
1	2	−5	−4	6	$\neq 0 \quad \Rightarrow$ není kořen
−1	2	−9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2x^2 - 9x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−9	10	
−1	2	−11	21	již není kořen
2				

Rozklad mnohočlenu

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(2x^2 - 9x + 10)$$

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\,2\,;\,5\,;\,10}{1\,;\,2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	-7	1	10	
1	2	-5	-4	6	$\neq 0 \Rightarrow$ není kořen
-1	2	-9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2\,x^2 - 9\,x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	-9	10	
-1	2	-11	21	již není kořen
2	2	-5	0	$x_2 = 2$ je kořen

Rozklad mnohočlenu

$$2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(2\,x^2 - 9\,x + 10)$$

$$2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$$

2. Racionální lomená funkce

Funkci danou předpisem

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ jsou mnohočleny a $\boldsymbol{Q}$ je navíc nenulový mnohočlen, nazýváme **racionální (lomenou) funkcí**. Říkáme, že funkce $\boldsymbol{R}$ je **ryze lomená** jestliže $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a **neryze lomená** jestliže $\operatorname{st} P \geq \operatorname{st} Q$.

Například

1. $R_1 : y = \dfrac{3x^2 + 2}{x - 2}$ je neryze lomená racionální funkce;
2. $R_2 : y = \dfrac{2x}{5x^3 + 7x^2 + x - 2}$ je ryze lomená racionální funkce.

Je-li $\boldsymbol{R}$ neryze lomená racionální funkce, pak lze provést dělení mnohočlenu mnohočlenem. Při dělení $P(x) : Q(x)$ dostaneme podíl $S(x)$ a zbytek $\mathrm{T}(\mathrm{x})$.
Přitom platí $\operatorname{st} T < \operatorname{st} Q$ (dělíme prostě tak dlouho, dokud to jde), tedy

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{T(x)}{Q(x)}. \tag{26}$$

U mnohočlenů (v předchozí kapitole) hrál důležitou roli rozklad na součin (lineárních či kvadratických činitelů). Podobně u racionálních lomených funkcí je v řadě aplikací důležité něco podobného. Na rozdíl od mnohočlenů, kde jde o rozklad na součin, půjde zde o rozklad na ***součet*** jednodušších racionálních lomených funkcí, které nazýváme ***parciální zlomky***. Vlastně jde o opačný postup, kterým je sčítání zlomků po převodu na společného jmenovatele.

2.1. Parciální zlomky

jsou speciální racionální lomené funkce. Rozlišujeme dva typy parciálních zlomků:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \qquad \text{kde } k \text{ je přirozené číslo, } \alpha,\ A \text{ jsou reálná čísla}$$

a

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \qquad \text{kde } k \text{ je přirozené číslo, } M,\ N,\ p,\ q \text{ jsou reálná čísla a navíc } p^2-4q<0\,.$$

U prvního typu je ve jmenovateli nějaká mocnina (třeba i první) lineárního dvojčlenu tvaru $x-\alpha$ a v čitateli je konstanta. U druhého typu je jmenovateli nějaká mocnina (třeba i první) kvadratického trojčlenu tvaru x^2+px+q majícího komplexní kořeny (záporný diskriminant) a v čitateli je lineární dvojčlen (nebo konstanta, pokud je M rovno nule). ***Parciální zlomky jsou vždy ryze lomené***. A protože součet ryze lomených racionálních funkcí (parciálních zlomků) nemůže být neryze lomená racionální funkce, můžeme na parciální zlomky rozkládat pouze ryzí racionální funkce. V případě neryzí racionální funkce ji nejprve dělením převedeme na tvar (26) a rozkládáme funkci $\frac{T(x)}{Q(x)}$.

2.2. Typy rozkladů na parciální zlomky

Nyní si ukážeme, jak lze napsat v konkrétních případech rozklady ***ryze lomené*** racionální funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,.$$

Reálný jednonásobný kořen jmenovatele $Q(x)$, pak: $R(x) = \dfrac{A}{x-a}$

kde ***a*** je kořen jmenovatele dané racionální lomené funkce, ***x–a*** (**x mínus *kořen***) je příslušný ***kořenový činitel*** a ***A*** je číslo (parametr), který hledáme.

Reálný n násobný kořen jmenovatele $Q(x)$, pak:

$$R(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \dots + \frac{C}{(x-a)^{n-1}} + \frac{D}{(x-a)^n}$$

kde ***a*** je násobný kořen jmenovatele (s násobností n) dané racionální lomené funkce, ***x–a*** je příslušný ***kořenový činitel*** a ***A*** , ***B*** , ***C*** , ***D*** jsou čísla (parametry), která hledáme.

Dvojice jednonásobných komplexně sdružených kořenů jmenovatele $Q(x)$, pak:

$$R(x) = \frac{Ax+B}{a\cdot x^2 + b\cdot x + c}$$

kde ***a*** , ***b*** , ***c*** jsou koefecienty kvadratického dvojčlenu takové, že $a \neq 0$ a $b^2 - 4ac < 0$,
A , ***B*** jsou čísla (parametry), která hledáme.

Dvojice n násobných komplexně sdružených kořenů jmenovatele $Q(x)$, pak:

$$R(x) = \frac{Ax+B}{a\cdot x^2+b\cdot x+c} + \frac{Cx+D}{(a\cdot x^2+b\cdot x+c)^2} + \ldots + \frac{Ex+F}{(a\cdot x^2+b\cdot x+c)^{n-1}} + \frac{Gx+H}{(a\cdot x^2+b\cdot x+c)^n}$$

kde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ jsou koefecienty kvadratického dvojčlenu takové, že $a \neq 0$ a $b^2 - 4ac < 0$,
$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ jsou čísla (parametry), která hledáme.

2.3. Postup rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.
Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Přitom využíváme následující vlastnost (25).

Celočíselný kořen mnohočlenu s celočíselnými koeficienty

$$R_n(x) = \boldsymbol{a}_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + \boldsymbol{a}_0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je přirozené číslo ($1 \leq n \in \mathbb{N}$), $\boldsymbol{a}_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \boldsymbol{a}_n$ jsou **celá** čísla, ($\boldsymbol{a}_n \neq 0$, $\boldsymbol{a}_0 \neq 0$) musí bezezbytku dělit (být dělitelem) jeho absolutní člen (koeficient a_0 u proměnné x^0 – *která tam není!*)

Pro racionální kořen $\alpha = \frac{p}{q}$ (kde $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ jsou ***nesoudělná*** celá čísla ⇒ **pokrátit!**) mnohočlenu s celočíselnými koeficienty platí, že: $\boldsymbol{p}$ dělí bezezbytku koeficient $\boldsymbol{a}_0$ a $\boldsymbol{q}$ dělí $\boldsymbol{a}_n$.

Tedy: $$\alpha = \frac{p \mid \boldsymbol{a}_0}{q \mid \boldsymbol{a}_n}$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za $\boldsymbol{x}$ vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna $\boldsymbol{x}$.

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné $\boldsymbol{x}$.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.
Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + 2(x) - 1}{(x) \cdot [(x) + 1] \cdot [(x) - 1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1} \quad | \; x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za *x* vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna ***x***.

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné *x*.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + 2(x) - 1}{(x) \cdot [(x) + 1] \cdot [(x) - 1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1} \quad | \; x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

Určení parametrů: $(x)^2 + 2(x) - 1 = A \cdot [(x) + 1] \cdot [(x) - 1] + B \cdot (x) \cdot [(x) - 1] + C \cdot (x) \cdot [(x) + 1]$

$x = 0$: $(0)^2 + 2 \cdot (0) - 1 = A \cdot [(0) + 1] \cdot [(0) - 1] + \mathbf{0} + \mathbf{0} \implies -1 = -A \implies A = 1$

$x = 1$: $(1)^2 + 2 \cdot (1) - 1 = \mathbf{0} + \mathbf{0} + C \cdot (1) \cdot [(1) + 1] \implies 2 = 2C \implies C = 1$

$x = -1$: $(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = \mathbf{0} + B \cdot (-1) \cdot [(-1) - 1] + \mathbf{0} \implies -2 = 2B \implies B = -1$

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + 2(x) - 1}{(x) \cdot [(x) + 1] \cdot [(x) - 1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x + 1} + \dfrac{C}{x - 1} \quad | \; x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

Výsledek: $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{-1}{x + 1} + \dfrac{1}{x - 1}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že všechny tři parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x - 1)$

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x - 1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) - 1}{(x)^2 \cdot [(x) - 1]} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2} \quad \Big| \quad x^2 \cdot (x - 1)$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za *x* vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna ***x*** .

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné *x* .

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x-1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) - 1}{(x)^2 \cdot [(x) - 1]} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2} \quad \Big| \quad x^2 \cdot (x-1)$

Určení parametrů: $(x)^2 + (x) - 1 = A \cdot (x)^2 + B \cdot (x) \cdot [(x) - 1] + C \cdot [(x) - 1]$

$$
\begin{array}{lllll}
x = 0: & (0)^2 + (0) - 1 = \mathbf{0} + \mathbf{0} + C \cdot [(0) - 1] & \Longrightarrow -1 = -C & \Longrightarrow & C = 1 \\
x = 1: & (1)^2 + (1) - 1 = A \cdot (1)^2 + \mathbf{0} + \mathbf{0} & \Longrightarrow \ 1 = A & \Longrightarrow & A = 1 \\
x^2 \ : & 1 = A + B & \overset{A=1}{\Longrightarrow} \ 1 = 1 + B & \Longrightarrow & B = 0
\end{array}
$$

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x - 1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) - 1}{(x)^2 \cdot [(x) - 1]} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2} \quad | \quad x^2 \cdot (x - 1)$

Výsledek: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{0}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že oba dva parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 + x = x \cdot (x^2 + 1)$ Kořeny závorky jsou komplexní.

Protože $x^2 \geq 0$ (pro každé reálné číslo $\boldsymbol{x}$), musí platit $x^2 + 1 \geq 1$. Tedy $x^2 + 1 \neq 0$ a proto neexistuje reálný kořen (kvadratického dvojčlenu) mnohočlenu v závorce.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 + x = x \cdot (x^2 + 1)$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) + 1}{(x) \cdot [(x)^2 + 1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B \cdot x + C}{x^2 + 1} \quad \Big| \quad x \cdot (x^2 + 1)$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za *x* vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.
Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna ***x*** .

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné *x* .
Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 + x = x \cdot (x^2 + 1)$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) + 1}{(x) \cdot [(x)^2 + 1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B \cdot x + C}{x^2 + 1} \quad \Big| \quad x \cdot (x^2 + 1)$

Určení parametrů: $(x)^2 + (x) + 1 = A \cdot [(x)^2 + 1] + [B \cdot (x) + C] \cdot (x)$

$$
\begin{array}{lllll}
x = 0: & (0)^2 + (0) + 1 = A \cdot [(0)^2 + 1] + \mathbf{0} & \Longrightarrow 1 = A & \Longrightarrow & A = 1 \\
x^2 \;: & 1 = A + B & \overset{A=1}{\Longrightarrow} 1 = 1 + B & \Longrightarrow & B = 0 \\
x \;: & 1 = C & & \Longrightarrow & C = 1
\end{array}
$$

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^3+x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 + x = x \cdot (x^2+1)$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2+(x)+1}{(x)\cdot[(x)^2+1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B\cdot x + C}{x^2+1} \quad \Big| \quad x\cdot(x^2+1)$

Výsledek: $R(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^3+x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{0\cdot x+1}{x^2+1} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2+1}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že oba dva výsledné parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $$R(x) = \frac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3}\,.$$

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $$R(x) = \frac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}\,.$$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem.

Součin kořenových činitelů $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3 \cdot (x^2 + 1)^2$ Kořeny závorky jsou komplexní.

Protože $x^2 \geq 0$ (pro každé reálné číslo $\boldsymbol{x}$), musí platit $x^2 + 1 \geq 1$. Tedy $x^2 + 1 \neq 0$ a proto neexistuje reálný kořen (kvadratického dvojčlenu) mnohočlenu v závorce.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3 \cdot (x^2 + 1)^2$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků $R(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D \cdot x + E}{x^2 + 1} + \dfrac{F \cdot x + G}{(x^2 + 1)^2} \quad \Big| \quad x^3 \cdot (x^2 + 1)^2$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za *x* vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna ***x*** .

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné *x* .

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}$.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

Součin kořenových činitelů $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3 \cdot (x^2+1)^2$ Kořeny závorky jsou komplexní.

Typy parciálních zlomků $R(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D\cdot x + E}{x^2+1} + \dfrac{F\cdot x + G}{(x^2+1)^2} \quad \Big| \quad x^3 \cdot (x^2+1)^2$

Určení parametrů: $x^4 + x^3 + 2x^2 + 1 =$

$$= A\cdot x^2\cdot(x^2+1)^2 + B\cdot x\cdot(x^2+1)^2 + C\cdot(x^2+1)^2 + (D\cdot x + E)\cdot x^3\cdot(x^2+1) + (F\cdot x+G)\cdot x^3 =$$
$$= A\cdot(x^6+2x^4+x^2) + B\cdot(x^5+2x^3+x) + C\cdot(x^4+2x^2+1) + D\cdot(x^6+x^4) + E\cdot(x^5+x^3) + F\cdot x^4 + G\cdot x^3$$

$$\begin{array}{lcllcl}
x = 0: & & 1 = C & & \Longrightarrow & C = 1 \\
x & : & 0 = B & & \Longrightarrow & B = 0 \\
x^2 & : & 2 = A + 2C & \overset{C=1}{\Longrightarrow} 2 = A + 2 & \Longrightarrow & A = 0 \\
x^5 & : & 0 = B + E & \overset{B=0}{\Longrightarrow} 0 = 0 + E & \Longrightarrow & E = 0 \\
x^6 & : & 0 = A + D & \overset{A=0}{\Longrightarrow} 0 = 0 + D & \Longrightarrow & D = 0 \\
x^4 & : & 1 = 2A + C + D + F & \overset{A,C,D}{\Longrightarrow} 1 = 0 + 1 + 0 + F & \Longrightarrow & F = 0 \\
x^3 & : & 1 = 2B + E + G & \overset{B,E}{\Longrightarrow} 1 = 0 + 0 + G & \Longrightarrow & G = 1
\end{array}$$

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3 \cdot (x^2+1)^2$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků $R(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D\cdot x + E}{x^2+1} + \dfrac{F\cdot x + G}{(x^2+1)^2} \quad | \quad x^3 \cdot (x^2+1)^2$

Výsledek $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3} = \dfrac{0}{x} + \dfrac{0}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{0\cdot x + 0}{x^2+1} + \dfrac{0\cdot x + 1}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že oba dva výsledné parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$.

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Přitom využíváme následující vlastnost (25).

Celočíselný kořen mnohočlenu s celočíselnými koeficienty

$$R_n(x) = \boldsymbol{a}_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + \boldsymbol{a}_0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je přirozené číslo ($1 \leq n \in \mathbb{N}$), $\boldsymbol{a}_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \boldsymbol{a}_n$ jsou **celá** čísla, ($\boldsymbol{a}_n \neq 0$, $\boldsymbol{a}_0 \neq 0$) musí bezezbytku dělit (být dělitelem) jeho absolutní člen (koeficient a_0 u proměnné x^0 – *která tam není!*)

Pro racionální kořen $\alpha = \frac{p}{q}$ (kde $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ jsou ***nesoudělná*** celá čísla ⇒ **pokrátit!**) mnohočlenu s celočíselnými koeficienty platí, že: $\boldsymbol{p}$ dělí bezezbytku koeficient $\boldsymbol{a}_0$ a $\boldsymbol{q}$ dělí $\boldsymbol{a}_n$.

Tedy: $\alpha = \dfrac{p \mid \boldsymbol{a}_0}{q \mid \boldsymbol{a}_n}$

Hledáme kořeny mnohočlenu $x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6\,.$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
HS					

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies \text{k-n-k} = \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	1	-1	-7	1	6
	1				

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p\mid 6}{q\mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	-1	-7	1	6
		$1\cdot(1)+(-1)$			
1	1	0			

Zkoušíme ±1; ±2; ±3; ±6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	-1	-7	1	6
			$1 \cdot (0) + (-7)$		
1	1	0	-7		

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	-1	-7	1	6
				$1 \cdot (-7) + (1)$	
1	1	0	-7	-6	

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\ ;\ 2\ ;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
					$1 \cdot (-6) + (6)$
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	0	−7	−6	0	$P(1) = 0$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
	1			

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad: x_1 $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm \dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1			

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad: x_1 $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\ ;\ 2\ ;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1		

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad: x_1 $\qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

Rozklad: x_1 $\qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	0	−7	−6	0	$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	1	−6	**−12**	

Rozklad: x_1 $\qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \Longrightarrow$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	**−12**
	1			

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $x_1 = 1$ je ***jednonásobný***

Rozklad: x_1 $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	-7	-6
1	1	1	-6	-12
-1	1			

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $\quad x_1 = 1 \quad$ je ***jednonásobný***

Rozklad: $\quad x_1 \qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \Longrightarrow$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	**−12**
−1	1	−1	−6	**0**

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $x_1 = 1$ je ***jednonásobný***

Rozklad: x_1 $\qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	-1	-7	1	6	Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$
1	1	0	-7	-6	0	$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	-7	-6	Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$
1	1	1	-6	**-12**	$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $x_1 = 1$ je ***jednonásobný***
-1	1	-1	-6	**0**	$\Rightarrow \ x_2 = -1$ je (druhý) kořen:

Rozklad: x_1 $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

$x_{1;2}$ $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot[x-(-1)]\cdot(x^2 - x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	**−12**
−1	1	−1	−6	**0**

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\neq 0 \;\Rightarrow$ (první) kořen $\quad x_1 = 1 \quad$ je ***jednonásobný***

$\Rightarrow \quad x_2 = -1 \quad$ je (druhý) kořen: $\quad x^2 - x - 6 = 0$

řešíme rozkladem, ***diskriminantem***, Hornerovým s.

Rozklad: $x_1 \qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

$x_{1;2} \qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot[x-(-1)]\cdot(x^2 - x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1;\ 2;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme ±1; ±2; ±3; ±6

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12
−1	1	−1	−6	0
	a	b	c	

Zkoušíme ±1; ±2; ±3; ±6

$\neq 0 \Rightarrow$ (první) kořen $x_1 = 1$ je ***jednonásobný***

$\Rightarrow$ $x_2 = -1$ je (druhý) kořen: $x^2 - x - 6 = 0$

řešíme rozkladem, ***diskriminantem***, Hornerovým s.

$$x_{3;4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Rozklad: x_1 $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 1) \cdot (x^3 - 7x - 6)$

$x_{1;2}$ $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 1) \cdot [x - (-1)] \cdot (x^2 - x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \Longrightarrow$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6	
1	1	0	−7	−6	0	

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	**−12**
−1	1	−1	−6	**0**
	a	b	c	

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\neq 0 \Rightarrow$ (první) kořen $x_1 = 1$ je ***jednonásobný***

$\Rightarrow$ $x_2 = -1$ je (druhý) kořen: $x^2 - x - 6 = 0$

řešíme rozkladem, ***diskriminantem***, Hornerovým s.

$$x_{3;4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_3 = \tfrac{1+5}{2} = 3 \qquad x_4 = \tfrac{1-5}{2} = -2$$

Rozklad:

x_1 $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot (x^3 - 7x - 6)$

$x_{1;2}$ $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot [x - (-1)] \cdot (x^2 - x - 6)$

$x_{1;2;3;4}$ $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-3) \cdot (x+2)$

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $\dfrac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x+2} + \dfrac{D}{x-3}$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za *x* vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna ***x***.

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné *x*.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $$\frac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-3}$$

Určení parametrů po vynásobení společným jmenovatelem (dosadíme postupně kořeny):

$$x^3 + 14x^2 - 3x - 24 =$$
$$= A\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3) + B\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3) + C\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-3) + D\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

$x = 1$: $(1)^3+14\cdot(1)^2-3\cdot(1)-24 = A\cdot[(1)+1]\cdot[(1)+2]\cdot[(1)-3]+\mathbf{0}+\mathbf{0}+\mathbf{0} \Longrightarrow -12 = -12\,A \Longrightarrow A = 1$

$x = -1$: $(-1)^3+14\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-24 = \mathbf{0}+B\cdot[(-1)-1]\cdot[(-1)+2]\cdot[(-1)-3]+\mathbf{0}+\mathbf{0} \Longrightarrow -8 = 8\,B \Longrightarrow B = -1$

$x = -2$: $(-2)^3+14\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)-24 = \mathbf{0}+\mathbf{0}+C\cdot[(-2)-1]\cdot[(-2)+1]\cdot[(-2)-3]+\mathbf{0} \Longrightarrow 30 = -15\,C \Longrightarrow C = -2$

$x = 3$: $(3)^3+14\cdot(3)^2-3\cdot(3)-24 = \mathbf{0}+\mathbf{0}+\mathbf{0}+D\cdot[(3)-1]\cdot[(3)+1]\cdot[(3)+2] \Longrightarrow 120 = 40D \Longrightarrow D = 3$

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $\dfrac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x+2} + \dfrac{D}{x-3}$

do kterých dosadíme vypočtené parametry: $A = 1$; $B = -1$; $C = -2$; $D = 3$

Výsledek:

$$R(x) = \frac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-2}{x+2} + \frac{3}{x-3}$$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že všechny čtyři výsledné parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$R(x) = P(x) + Q(x)$, kde $Q(x) = \dfrac{\text{zbytek po dělení}}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$. Proto podělíme čitatel jmenovatelem.

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$R(x) = P(x) + Q(x)$, kde $Q(x) = \dfrac{\text{zbytek po dělení}}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$. Proto podělíme čitatel jmenovatelem.

$$
\begin{array}{l}
(2x^5-7x^4-\ \ x^3+20x^2-23x+28) : (2x^3 - 7x^2 + x + 10) = x^2 - 1 + \dfrac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} \\
\underline{-(2x^5-7x^4+\ \ x^3+10x^2\ )} \\
\qquad\qquad -2x^3+10x^2-23x+28 \\
\qquad\quad \underline{-(-2x^3+\ 7x^2-\quad x-10)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 3x^2-22x+38
\end{array}
$$

Nebo jinak: $R(x) = P(x) + Q(x)$, kde $P(x) = x^2 - 1$ a $Q(x) = \dfrac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$.

Tedy

$$R(x) = \frac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$$

Na parciální zlomky budeme rozkládat racionální lomenou funkci $Q(x)$.

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$R(x) = P(x) + Q(x)$, kde $P(x) = x^2 - 1$ a $Q(x) = \dfrac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$.
Tedy

$$R(x) = \frac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$$

Na parciální zlomky budeme rozkládat racionální lomenou funkci $Q(x)$.

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.
Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Přitom využíváme následující vlastnost (25).

Celočíselný kořen mnohočlenu s celočíselnými koeficienty

$$R_n(x) = \boldsymbol{a_n} x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + \boldsymbol{a_0}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je přirozené číslo ($1 \leq n \in \mathbb{N}$), $\boldsymbol{a_0}, a_1, \ldots, a_{n-1}, \boldsymbol{a_n}$ jsou **celá** čísla, ($\boldsymbol{a_n} \neq 0$, $\boldsymbol{a_0} \neq 0$) musí bezezbytku dělit (být dělitelem) jeho absolutní člen (koeficient a_0 u proměnné x^0 – *která tam není!*)

Pro racionální kořen $\alpha = \frac{p}{q}$ (kde $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ jsou ***nesoudělná*** celá čísla ⇒ **pokrátit!**) mnohočlenu s celočíselnými koeficienty platí, že: $\boldsymbol{p}$ dělí bezezbytku koeficient $\boldsymbol{a}_0$ a $\boldsymbol{q}$ dělí $\boldsymbol{a}_n$.

$$\text{Tedy:} \qquad \alpha = \frac{p \mid \boldsymbol{a}_0}{q \mid \boldsymbol{a}_n}$$

Hledáme kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$.

V našem případě

$$\alpha = \frac{p \mid 10}{q \mid 2} = \pm \frac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$$

a kandidáty na kořeny jsou potom

$$\text{k-n-k} = \pm 1\,; \quad \pm 2\,; \quad \pm 5\,; \quad \pm 10\,; \quad \pm\frac{1}{2}\,; \quad \left(\pm\frac{2}{2} = \pm 1\right) \quad \pm\,\frac{5}{2}\,; \quad \left(\pm\frac{10}{2} = \pm 5\right)$$

Zlomky, které jsou tvořeny soudělnými čísly napřed zkrátíme.

Který ze všech uvedených kandidátů na kořen je skutečně kořenem, ověříme Hornerovým schématem. Z předchozího víme (důsledky základní věty algebry), že můžeme mít buď jeden reálný kořen nebo tři reálné kořeny, protože stupeň rozkládaného mnohočlenu je tři.

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10\,.$

	x^3	x^2	x^1	x^0
HS				

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10\,.$

$$\frac{p \mid 10}{q \mid 2} = \pm\frac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$$

	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	2	-7	1	10
	2			

zkoušíme:
$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10\,.$

$$\frac{p \mid 10}{q \mid 2} = \pm\frac{1\,;\;2\,;\;5\,;\;10}{1\,;\;2}$$

zkoušíme:
$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$

HS	2	-7	1	10
		$1\cdot(2)+(-7)$	$1\cdot(-5)+(1)$	$1\cdot(-4)+(10)$
1	2	-5	-4	6

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10\,.$

$$\frac{p \mid 10}{q \mid 2} = \pm\frac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$$

HS	2	−7	1	10
1	2 2	−5	−4	6

zkoušíme:
$\pm1, \pm2, \pm5, \pm10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$

$P(1) = 6 \neq 0 \ \Rightarrow$ není kořen

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10\,.$

$$\frac{p \mid 10}{q \mid 2} = \pm\frac{1\,;\,2\,;\,5\,;\,10}{1\,;\,2}$$

zkoušíme:
$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$

HS	2	-7	1	10
1	2	-5	-4	6
-1	2	-9	10	0

$P(1) = 6 \neq 0 \;\Rightarrow$ není kořen
$x_1 = -1$ je kořen

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10\,.$

$$\frac{p \mid 10}{q \mid 2} = \pm\frac{1\,;\;2\,;\;5\,;\;10}{1\,;\;2}$$

HS	2	-7	1	10
1	2	-5	-4	6
-1	2	-9	10	0

zkoušíme:
$\pm1, \pm2, \pm5, \pm10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$

$P(1) = 6 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ není kořen
$x_1 = -1$ je kořen

Další kořeny hledáme jakoukoliv metodou: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo schéma, ...

Rozklad mnohočlenu

$x_1 = -1$: $\quad 2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10 = [x - (-1)] \cdot (2\,x^2 - 9\,x + 10)$

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10\,.$

$$\frac{p \mid 10}{q \mid 2} = \pm \frac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$$

HS	2	−7	1	10
1	2	−5	−4	6
−1	2	−9	10	0
	a	b	c	

zkoušíme:
$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$

$P(1) = 6 \neq 0 \;\Rightarrow$ není kořen

$x_1 = -1$ je kořen

Další kořeny hledáme jakoukoliv metodou: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo schéma, …

$$x_{2;\,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (10)}}{2 \cdot (2)} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{9 \pm 1}{4}$$

Rozklad mnohočlenu

$x_1 = -1$: $\quad 2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10 = [x - (-1)] \cdot (2\,x^2 - 9\,x + 10)$

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10\,.$

$$\frac{p\mid 10}{q\mid 2} = \pm\frac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$$

HS	2	−7	1	10
1	2	−5	−4	6
−1	2	−9	10	0
	a	b	c	

zkoušíme:
$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$

$P(1) = 6 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ není kořen
$x_1 = -1$ je kořen

Další kořeny hledáme jakoukoliv metodou: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo schéma, ...

$$x_{2;\,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4\cdot(2)\cdot(10)}}{2\cdot(2)} = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{4} = \frac{9\pm\sqrt{1}}{4} = \frac{9\pm 1}{4}$$

$$x_2 = \frac{9+1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \qquad\qquad x_3 = \frac{9-1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Rozklad mnohočlenu

$x_1 = -1{:}\quad 2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10 = [x-(-1)]\cdot(2\,x^2 - 9\,x + 10) = (x+1)\cdot[2\cdot(x^2 - \frac{9}{2}x + 5)]$

$x_{2;\,3}\quad :\quad 2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot[2\cdot(x-\frac{5}{2})\cdot(x-2)] = (x+1)\cdot(2\,x-5)\cdot(x-2)$

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$$R(x) = \frac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$$

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $\dfrac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{2x-5} \mid (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za *x* vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.
Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna ***x***.

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné *x*.
Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$$R(x) = \frac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$$

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $\dfrac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{2x-5} \;\Big|\; (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$

Určení parametrů: $3x^2 - 22x + 38 = A\cdot(x-2)\cdot(2x-5) + B\cdot(x+1)\cdot(2x-5) + C\cdot(x+1)\cdot(x-2)$

$x = -1 \implies 3\cdot(-1)^2 - 22\cdot(-1) + 38 = A\cdot[(-1)-2]\cdot[2\cdot(-1)-5] + 0 + 0 \Rightarrow 63 = 21A \implies A = 3$

$x = 2 \implies 3\cdot(2)^2 - 22\cdot(2) + 38 = 0 + B\cdot[(2)+1]\cdot[2\cdot(2)-5] + 0 \Rightarrow 6 = -3B \implies B = -2$

$x = 2{,}5 \implies 3\cdot(2{,}5)^2 - 22\cdot(2{,}5) + 38 = 0 + 0 + C\cdot[(2{,}5)+1]\cdot[(2{,}5)-2] \Rightarrow 1{,}75 = 1{,}75C \implies C = 1$

A po dosazení

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x)=\dfrac{2x^5-7x^4-x^3+20x^2-23x+28}{2x^3-7x^2+x+10}$

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$R(x)=P(x)+Q(x)$, kde $P(x)=x^2-1$ a $Q(x)=\dfrac{3x^2-22x+38}{2x^3-7x^2+x+10}$.

Tedy

$$R(x)=\frac{2x^5-7x^4-x^3+20x^2-23x+28}{2x^3-7x^2+x+10}=x^2-1+\frac{3x^2-22x+38}{2x^3-7x^2+x+10}$$

Na parciální zlomky budeme rozkládat racionální lomenou funkci $Q(x)$.

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$2x^3-7x^2+x+10=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $\dfrac{3x^2-22x+38}{2x^3-7x^2+x+10}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{2x-5}\ \Big|\ (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$

Výsledek:

$$R(x)=\frac{2x^5-7x^4-x^3+20x^2-23x+28}{2x^3-7x^2+x+10}=x^2-1+\frac{3}{x+1}+\frac{-2}{x-2}+\frac{1}{2x-5}$$

2.6. Závěrečná poznámka k rozkladu na parciální zlomky

V příkladu, kdy jsme měli rozložit NEryze lomenou racionální funkci, jsme jako odhadovaný rozklad na parciální zlomky uvedli

$$\frac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{2\,x-5}$$

kde třetí parciální zlomek má ve jmenovateli lineární dvojčlen $2\,x - 5$. Tedy třetí kořen je $x_3 = \frac{5}{2}$.

Přitom v úvodu jsme říkali, že parciální zlomek pro reálný kořen jmenovatele může mít pouze tvar

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k}$$

Neměli bychom odhadovaný rozklad tedy psát

$$\frac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = \frac{A^*}{x+1} + \frac{B^*}{x-2} + \frac{C^*}{x-\frac{5}{2}} \qquad ? \tag{27}$$

Určeme tento *„ohvězdičkovaný“* rozklad. Rozložíme jmenovatele na součin jeho kořenových činitelů a odhadneme parciální zlomky takto upraveného zlomku. Potom (známým způsobem) určíme neznámé parametry.

- Nejprve obě dvě strany rovnice vynásobíme společným jmenovatelem (odstraníme zlomky).
- Pak budeme postupně za $\boldsymbol{x}$ dosazovat hodnoty jednotlivých kořenů.

Rozložíme jmenovatele na součin jeho kořenových činitelů

$$\frac{3\,x^2-22\,x+38}{2\,x^3-7\,x^2+x+10}=\frac{3\,x^2-22\,x+38}{2\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)}$$

Odhadneme parciální zlomky

$$\frac{3\,x^2-22\,x+38}{2\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)}=\frac{A^*}{x+1}+\frac{B^*}{x-2}+\frac{C^*}{x-\frac{5}{2}}$$

Určíme neznámé parametry: Vynásobíme obě strany rovnice členem $2\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)$ (nejmenším společným jmenovatelem)

$$3\,x^2-22\,x+38=A^*\cdot 2\cdot(x-2)\cdot(x-\frac{5}{2})+B^*\cdot 2\cdot(x+1)\cdot(x-\frac{5}{2})+C^*\cdot 2\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

a upravíme:

$$3\,x^2-22\,x+38=A^*\cdot(x-2)\cdot(2\,x-5)+B^*\cdot(x+1)\cdot(2\,x-5)+C^*\cdot 2\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

Nyní dosadíme za $\boldsymbol{x}$ hodnoty celočíselných kořenů a například číslo NULA.

$x_1=-1$: $3\cdot(-1)^2-22\cdot(-1)+38=A^*\cdot[(-1)-2]\cdot[2\cdot(-1)-5]+\mathbf{0}+\mathbf{0}$ $\Longrightarrow 63=21\,A^*\Longrightarrow A^*=3$

$x_2=2$: $3\cdot(2)^2-22\cdot(2)+38=\mathbf{0}+B^*\cdot[(2)+1]\cdot[2\cdot(2)-5]+\mathbf{0}$ $\Longrightarrow 6=-3\,B^*\Longrightarrow B^*=-2$

$x=0$: $3\cdot(0)^2-22\cdot(0)+38=A^*\cdot[(0)-2]\cdot[2\cdot(0)-5]+B^*\cdot[(0)+1]\cdot[2\cdot(0)-5]+C^*\cdot 2\cdot[(0)+1]\cdot[(0)-2]$

$38=10\,A^*-5\,B^*-4\,C^* \overset{A,\,B}{\Longrightarrow} 38=10\cdot(3)-5\cdot(-2)-4\,C^*$ $\Longrightarrow -2=-4\,C^*\Longrightarrow C^*=\frac{1}{2}$

Výsledný rozklad je

$$\frac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = \frac{A^*}{x+1} + \frac{B^*}{x-2} + \frac{C^*}{x-\frac{5}{2}} = \frac{3}{x+1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{5}{2}}$$

a po úpravě

$$\frac{3}{x+1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{5}{2}} = \frac{3}{x+1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{1}{2\left(x-\frac{5}{2}\right)} = \frac{3}{x+1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{1}{2\,x-5}$$

Vidíme, že nám vyšel stejný rozklad zlomku $Q(x)$ jako předtím, jenom jinak zapsaný. To nás opravňuje odhadovat parciální zlomky i ve tvaru

$$\frac{A}{(\beta x-\alpha)^k} \quad \text{nebo} \quad \frac{Mx+N}{(\beta x^2+px+q)^k}\,, \qquad \text{kde } \beta \neq 0\,.$$

Interpolace a aproximace

Obsah kapitoly: Interpolace a aproximace

1. Interpolace diskrétních hodnot vhodnou funkcí **336**
1.1. Langrangeův interpolační mnohočlen (polynom) 337
Příklad 1.1.1. 338
Příklad 1.1.2. 351
Příklad 1.1.3. 361
1.2. Poznámka k interpolačním polynomům 368

2. Aproximace diskrétních hodnot vhodnou funkcí **369**
2.1. Metoda nejmenších čtverců 369
2.1.1. Aproximace přímkou 369
Příklad 372
2.1.2. Aproximace parabolou 383
Příklad 385
2.2. Poznámka k metodě nejmenších čtverců 395

1. Interpolace diskrétních hodnot vhodnou funkcí

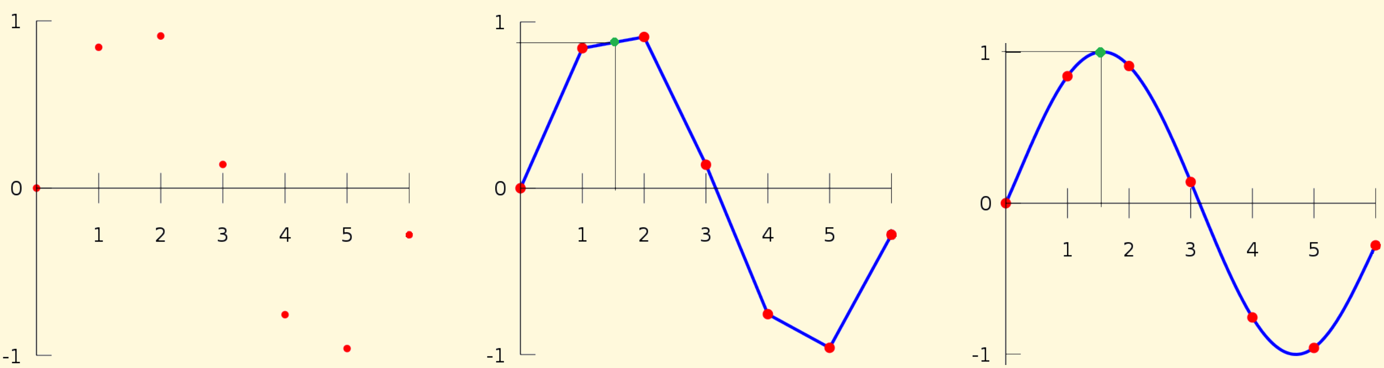
Interpolaci můžeme chápat jako nalezení přibližné hodnoty funkce ***uvnitř*** nějakého intervalu, je-li hodnota uvažované funkce známa jen v některých jiných bodech tohoto intervalu. Používá se v případě, že hodnoty funkce v určitých bodech intervalu jsou buďto uvedeny v tabulce, anebo získány měřením.

Podobného původu je i slovo ***extrapolace***, které označuje nalézání přibližné hodnoty funkce ***mimo*** interval známých hodnot, což je méně spolehlivé. Užívá se nejčastěji pro odhady tendencí do budoucnosti, například cen v ekonomii.

Interpolace se vyznačuje tím, že hledaná křivka (graf uvažované funkce) ***přesně prochází*** všemi známými (změřenými) body.

Na následujícím obrázku můžeme odečtením zjistit například hodnotu v čísle 1,5:

Vlevo je 7 hodnot funkce **sinus**.
Uprostřed jsme sestrojili lomenou čáru, která všemi zadanými body prochází.
Nebo-li hledaná funkce je složena ze šesti úseček.
Vpravo jsme body proložili mnohočlenem šestého stupně.



Někdy se interpolací rozumí proložení bodů $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$ analytickou křivkou (grafem hledané funkce), která pak umožňuje jednoduchý výpočet funkčních hodnot ve všech mezilehlých bodech.

1.1. Langrangeův interpolační mnohočlen (polynom)

je jedním ze známějších a také snadných způsobů interpolace funkce zadané pouze v diskrétních bodech (nazýváme je ***uzlovými body*** — v předchozím obrázku byly značeny červeně), po kterých požadujeme, aby měly různé hodnoty x_i.

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot L_i(x) \tag{28}$$

kde

$$L_i = \frac{\overbrace{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n)}^{f(x)}}{\underbrace{(x_i - x_1) \cdot (x_i - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{n-1}) \cdot (x_i - x_n)}_{f(x_i)}}$$

Všimněte si, že jak v čitateli, tak ve jmenovateli je pro i vynechána závorka, ve které bychom měli odečítat člen x_i.

Použití zdánlivě „nezapamatovatelného“ vzorce si ukážeme na konkrétním příkladu.

Příklad 1.1.1.

Máme dány čtyři body, jejichž hodnoty jsou v následující tabulce. Na základě těchto bodů máme pomocí Lagrangeova interpolačního mnohočlenu odhadnout, jaká hodnota by asi v tomto případě nastala pro $x = 0$.

x	-9	-4	-1	7
y	5	2	-2	9

Tedy požadujeme odhadnout – doplnit souřadnici daného bodu $[0; ?]$.
Nebo ještě jinak řečeno, požadujeme doplnit tabulku o další hodnotu.

x	-9	-4	-1	7	0
y	5	2	-2	9	$?$

Řešení.

Protože máme zadány čtyři dvojice hodnot (čtyři body), dosadíme do vzorce (28) za $n = 4$. Dostaneme:

$$L(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) + y_4 \cdot L_4(x)$$

Nyní určíme jednotlivé zlomky $L_i(x)$, kde $i = 1; 2; 3; 4$.

Příklad. Máme dány čtyři body

x	-9	-4	-1	7	0
y	5	2	-2	9	?

a požadujeme doplnit tabulku.

Řešení. Pro $n = 4$ dostaneme: $L(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) + y_4 \cdot L_4(x)$

Nyní určíme jednotlivé zlomky $L_i(x)$.

Obrázek 23: Konstrukce Lagrangeova interpolačního polynomu (černá křivka)

x	-9	-4	-1	7
$y_1 \cdot L_1(x)$	**5** $=(5)\cdot 1$	**0** $=(5)\cdot 0$	**0** $=(5)\cdot 0$	**0** $=(5)\cdot 0$

x	-9	-4	-1	7
$y_2 \cdot L_2(x)$	0	2	0	0

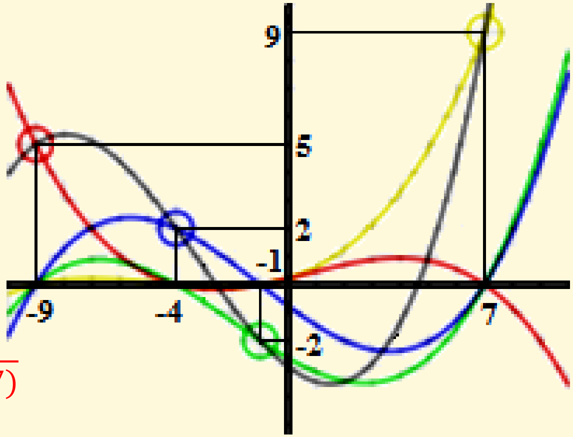
$L_1(-9) = 1;\quad L_1(-4) = 0;$

$L_1(-1) = 0;\quad L_1(7) = 0$

x	-9	-4	-1	7
$y_3 \cdot L_3(x)$	0	0	-2	0

x	-9	-4	-1	7
$y_4 \cdot L_4(x)$	0	0	0	9

podmínky	výsledná funkce
$L_1(-9) = 1$	$L_1(x) = 1$
$L_1(-9) = 1$, $L_1(-4) = 0$	$L_1 = 1 \cdot \dfrac{x-(-4)}{(-9)-(-4)}$
$L_1(-9) = 1$, $L_1(-4) = 0$, $L_1(-1) = 0$	$L_1 = \dfrac{x-(-4)}{(-9)-(-4)} \cdot \dfrac{x-(-1)}{(-9)-(-1)}$
$L_1(-9) = 1$, $L_1(-4) = 0$, $L_1(-1) = 0$, $L_1(\,7\,) = 0$	$L_1 = \dfrac{x-(-4)}{(-9)-(-4)} \cdot \dfrac{x-(-1)}{(-9)-(-1)} \cdot \dfrac{x-(7)}{(-9)-(7)}$



x	-9	-4	-1	7	0
y	5	2	-2	9	$\doteq -3$

$L(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) + y_4 \cdot L_4(x)$

x	-9	-4	-1	7	0
y	5	2	-2	9	??

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$; pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; ...

x	-9	-4	-1	7	0
y	5	2	-2	9	??

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$; pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; ...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} =$$

x	-9	-4	-1	7	0
y	5	2	-2	9	??

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$; pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; ...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5\,x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2\,x^2-31\,x-28)$$

x	-9	-4	-1	7	0
y	5	2	-2	9	??

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$; pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; ...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5\,x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2\,x^2-31\,x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} =$$

x	-9	-4	-1	7	0
y	5	2	-2	9	??

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$; pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; ...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5\,x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2\,x^2-31\,x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} = \frac{(x^2+10\,x+9)\cdot(x-7)}{(5)\cdot(-3)\cdot(-11)} = \frac{1}{165}\cdot(x^3+3\,x^2-61\,x-63)$$

x	-9	-4	-1	7	0
y	5	2	-2	9	??

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$; pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; ...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2x^2-31x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} = \frac{(x^2+10x+9)\cdot(x-7)}{(5)\cdot(-3)\cdot(-11)} = \frac{1}{165}\cdot(x^3+3x^2-61x-63)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(7)]}{[(-1)-(-9)]\cdot[(-1)-(-4)]\cdot[(-1)-(7)]} =$$

x	-9	-4	-1	7	0
y	5	2	-2	9	??

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$; pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; ...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5\,x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2\,x^2-31\,x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} = \frac{(x^2+10\,x+9)\cdot(x-7)}{(5)\cdot(-3)\cdot(-11)} = \frac{1}{165}\cdot(x^3+3\,x^2-61\,x-63)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(7)]}{[(-1)-(-9)]\cdot[(-1)-(-4)]\cdot[(-1)-(7)]} = \frac{(x^2+13\,x+36)\cdot(x-7)}{(8)\cdot(3)\cdot(-8)} = \frac{-1}{192}\cdot(x^3+6\,x^2-55\,x-252)$$

x	-9	-4	-1	7	0
y	5	2	-2	9	??

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$; pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; ...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5\,x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2\,x^2-31\,x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} = \frac{(x^2+10\,x+9)\cdot(x-7)}{(5)\cdot(-3)\cdot(-11)} = \frac{1}{165}\cdot(x^3+3\,x^2-61\,x-63)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(7)]}{[(-1)-(-9)]\cdot[(-1)-(-4)]\cdot[(-1)-(7)]} = \frac{(x^2+13\,x+36)\cdot(x-7)}{(8)\cdot(3)\cdot(-8)} = \frac{-1}{192}\cdot(x^3+6\,x^2-55\,x-252)$$

$$L_4 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]}{[(7)-(-9)]\cdot[(7)-(-4)]\cdot[(7)-(-1)]} =$$

x	-9	-4	-1	7	0
y	5	2	-2	9	??

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$; pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; ...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5\,x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2\,x^2-31\,x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} = \frac{(x^2+10\,x+9)\cdot(x-7)}{(5)\cdot(-3)\cdot(-11)} = \frac{1}{165}\cdot(x^3+3\,x^2-61\,x-63)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(7)]}{[(-1)-(-9)]\cdot[(-1)-(-4)]\cdot[(-1)-(7)]} = \frac{(x^2+13\,x+36)\cdot(x-7)}{(8)\cdot(3)\cdot(-8)} = \frac{-1}{192}\cdot(x^3+6\,x^2-55\,x-252)$$

$$L_4 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]}{[(7)-(-9)]\cdot[(7)-(-4)]\cdot[(7)-(-1)]} = \frac{(x^2+13\,x+36)\cdot(x+1)}{(16)\cdot(11)\cdot(8)} = \frac{1}{1408}\cdot(x^3+14\,x^2+49\,x+36)$$

x	-9	-4	-1	7	0
y	5	2	-2	9	??

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$; pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; ...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5\,x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2\,x^2-31\,x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} = \frac{(x^2+10\,x+9)\cdot(x-7)}{(5)\cdot(-3)\cdot(-11)} = \frac{1}{165}\cdot(x^3+3\,x^2-61\,x-63)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(7)]}{[(-1)-(-9)]\cdot[(-1)-(-4)]\cdot[(-1)-(7)]} = \frac{(x^2+13\,x+36)\cdot(x-7)}{(8)\cdot(3)\cdot(-8)} = \frac{-1}{192}\cdot(x^3+6\,x^2-55\,x-252)$$

$$L_4 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]}{[(7)-(-9)]\cdot[(7)-(-4)]\cdot[(7)-(-1)]} = \frac{(x^2+13\,x+36)\cdot(x+1)}{(16)\cdot(11)\cdot(8)} = \frac{1}{1408}\cdot(x^3+14\,x^2+49\,x+36)$$

Výsledný **Lagrangeův interpolační mnohočlen** je potom

$$L(x) = y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x) + y_3\cdot L_3(x) + y_4\cdot L_4(x) = \mathbf{5}\cdot\frac{-1}{640}\cdot(x^3-2\,x^2-31\,x-28)+$$

$$+\mathbf{2}\cdot\frac{1}{165}\cdot(x^3+3\,x^2-61\,x-63)+(-\mathbf{2})\cdot\frac{-1}{192}\cdot(x^3+6\,x^2-55\,x-252)+\mathbf{9}\cdot\frac{1}{1408}\cdot(x^3+14\,x^2+49\,x+36) =$$

$$= \left[5\cdot\frac{-1}{640}+2\cdot\frac{1}{165}+(-2)\cdot\frac{-1}{192}+9\cdot\frac{1}{1408}\right]\cdot x^3 + [\ldots]\cdot x^2 + [\ldots]\cdot x + [\ldots] \doteq$$

$$\doteq 0{,}021\,x^3 + 0{,}204\,x^2 - 0{,}757\,x - 2{,}94$$

x	-9	-4	-1	7	0
y	5	2	-2	9	??

$$L(0) \doteq 0{,}021 \cdot (0)^3 + 0{,}204 \cdot (0)^2 - 0{,}757 \cdot (0) - 2{,}94 = -2{,}94$$

Pro $i = 1$ je $x_1 = -9$, $y_1 = 5$; pro $i = 2$ je $x_2 = -4$, $y_2 = 2$; ...

$$L_1 = \frac{[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-9)-(-4)]\cdot[(-9)-(-1)]\cdot[(-9)-(7)]} = \frac{(x^2+5x+4)\cdot(x-7)}{(-5)\cdot(-8)\cdot(-16)} = \frac{-1}{640}\cdot(x^3-2x^2-31x-28)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-1)]\cdot[x-(7)]}{[(-4)-(-9)]\cdot[(-4)-(-1)]\cdot[(-4)-(7)]} = \frac{(x^2+10x+9)\cdot(x-7)}{(5)\cdot(-3)\cdot(-11)} = \frac{1}{165}\cdot(x^3+3x^2-61x-63)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(7)]}{[(-1)-(-9)]\cdot[(-1)-(-4)]\cdot[(-1)-(7)]} = \frac{(x^2+13x+36)\cdot(x-7)}{(8)\cdot(3)\cdot(-8)} = \frac{-1}{192}\cdot(x^3+6x^2-55x-252)$$

$$L_4 = \frac{[x-(-9)]\cdot[x-(-4)]\cdot[x-(-1)]}{[(7)-(-9)]\cdot[(7)-(-4)]\cdot[(7)-(-1)]} = \frac{(x^2+13x+36)\cdot(x+1)}{(16)\cdot(11)\cdot(8)} = \frac{1}{1408}\cdot(x^3+14x^2+49x+36)$$

Výsledný **Lagrangeův interpolační mnohočlen** je potom

$$L(x) = y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x) + y_3\cdot L_3(x) + y_4\cdot L_4(x) = \mathbf{5}\cdot\frac{-1}{640}\cdot(x^3-2x^2-31x-28)+$$

$$+\mathbf{2}\cdot\frac{1}{165}\cdot(x^3+3x^2-61x-63)+(-\mathbf{2})\cdot\frac{-1}{192}\cdot(x^3+6x^2-55x-252)+\mathbf{9}\cdot\frac{1}{1408}\cdot(x^3+14x^2+49x+36) =$$

$$= \left[5\cdot\frac{-1}{640} + 2\cdot\frac{1}{165} + (-2)\cdot\frac{-1}{192} + 9\cdot\frac{1}{1408}\right]\cdot x^3 + [\dots]\cdot x^2 + [\dots]\cdot x + [\dots] \doteq$$

$$\doteq 0{,}021\,x^3 + 0{,}204\,x^2 - 0{,}757\,x - 2{,}94$$

Příklad 1.1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Určete Lagrangeův tvar polynomu, který prochází všemi body:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

Příklad 1.1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Určete Lagrangeův tvar polynomu, který prochází všemi body:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} =$$

Příklad 1.1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Určete Lagrangeův tvar polynomu, který prochází všemi body:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

Příklad 1.1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Určete Lagrangeův tvar polynomu, který prochází všemi body:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1)]\cdot[(0)-(2)]} =$$

Příklad 1.1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Určete Lagrangeův tvar polynomu, který prochází všemi body:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1)]\cdot[(0)-(2)]} = \frac{(x^2-1)\cdot(x-2)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}\cdot(x^3-2\,x^2-x+2)$$

Příklad 1.1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Určete Lagrangeův tvar polynomu, který prochází všemi body:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1)]\cdot[(0)-(2)]} = \frac{(x^2-1)\cdot(x-2)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}\cdot(x^3-2\,x^2-x+2)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(2)]}{[(1)-(-1)]\cdot[(1)-(0)]\cdot[(1)-(2)]} =$$

Příklad 1.1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Určete Lagrangeův tvar polynomu, který prochází všemi body:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1)]\cdot[(0)-(2)]} = \frac{(x^2-1)\cdot(x-2)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}\cdot(x^3-2\,x^2-x+2)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(2)]}{[(1)-(-1)]\cdot[(1)-(0)]\cdot[(1)-(2)]} = \frac{(x^2-x-2)\cdot x}{(2)\cdot(1)\cdot(-1)} = \frac{-1}{2}\cdot(x^3-x^2-2\,x)$$

Příklad 1.1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Určete Lagrangeův tvar polynomu, který prochází všemi body:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1)]\cdot[(0)-(2)]} = \frac{(x^2-1)\cdot(x-2)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}\cdot(x^3-2\,x^2-x+2)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(2)]}{[(1)-(-1)]\cdot[(1)-(0)]\cdot[(1)-(2)]} = \frac{(x^2-x-2)\cdot x}{(2)\cdot(1)\cdot(-1)} = \frac{-1}{2}\cdot(x^3-x^2-2\,x)$$

$$L_4 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(1)]}{[(2)-(-1)]\cdot[(2)-(0)]\cdot[(2)-(1)]} =$$

Příklad 1.1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Určete Lagrangeův tvar polynomu, který prochází všemi body:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1)]\cdot[(0)-(2)]} = \frac{(x^2-1)\cdot(x-2)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}\cdot(x^3-2\,x^2-x+2)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(2)]}{[(1)-(-1)]\cdot[(1)-(0)]\cdot[(1)-(2)]} = \frac{(x^2-x-2)\cdot x}{(2)\cdot(1)\cdot(-1)} = \frac{-1}{2}\cdot(x^3-x^2-2\,x)$$

$$L_4 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(1)]}{[(2)-(-1)]\cdot[(2)-(0)]\cdot[(2)-(1)]} = \frac{(x^2-1)\cdot x}{(3)\cdot(2)\cdot(1)} = \frac{1}{6}\cdot(x^3-x)$$

Příklad 1.1.2. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Určete Lagrangeův tvar polynomu, který prochází všemi body:

x	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	5

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1)]\cdot[(-1)-(2)]} = \frac{x\cdot(x^2-3\,x+2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1)]\cdot[x-(2)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1)]\cdot[(0)-(2)]} = \frac{(x^2-1)\cdot(x-2)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}\cdot(x^3-2\,x^2-x+2)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(2)]}{[(1)-(-1)]\cdot[(1)-(0)]\cdot[(1)-(2)]} = \frac{(x^2-x-2)\cdot x}{(2)\cdot(1)\cdot(-1)} = \frac{-1}{2}\cdot(x^3-x^2-2\,x)$$

$$L_4 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(1)]}{[(2)-(-1)]\cdot[(2)-(0)]\cdot[(2)-(1)]} = \frac{(x^2-1)\cdot x}{(3)\cdot(2)\cdot(1)} = \frac{1}{6}\cdot(x^3-x)$$

Výsledný Lagrangeův interpolační mnohočlen je potom

$$L(x) = y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x) + y_3\cdot L_3(x) + y_4\cdot L_4(x) = (-\mathbf{4})\cdot\frac{-1}{6}\cdot(x^3-3\,x^2+2\,x)+$$

$$+(-\mathbf{1})\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^3-2\,x^2-x+2) + \mathbf{0}\cdot\frac{-1}{2}\cdot(x^3-x^2-2\,x) + \mathbf{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot(x^3-x) =$$

$$= \left[\tfrac{4}{6}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{6}\right]\cdot x^3 + \left[\tfrac{-12}{6}+\tfrac{2}{2}\right]\cdot x^2 + \left[\tfrac{8}{6}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{-5}{6}\right]\cdot x + \left[\tfrac{-2}{2}\right] =$$

$$= \left[\tfrac{4-3+5}{6}\right]\cdot x^3 + (-2+1)\cdot x^2 + \left[\tfrac{8+3-5}{6}\right]\cdot x - 1 = \mathbf{x^3 - x^2 + x - 1}$$

Příklad 1.1.3. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 3 body

x	-1	0	$1{,}5$
y	$2{,}25$	$0{,}25$	1

Určete mnohočlen, který všemi prochází.

Příklad 1.1.3. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 3 body

x	-1	0	$1{,}5$
y	$2{,}25$	$0{,}25$	1

Určete mnohočlen, který všemi prochází.

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1{,}5)]} = \frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2 - 1{,}5\,x)$$

Příklad 1.1.3. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 3 body

x	-1	0	$1{,}5$
y	$2{,}25$	$0{,}25$	1

Určete mnohočlen, který všemi prochází.

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1{,}5)]} = \frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1{,}5)]} = \frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5)$$

Příklad 1.1.3. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 3 body

x	-1	0	$1{,}5$
y	$2{,}25$	$0{,}25$	1

Určete mnohočlen, který všemi prochází.

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1{,}5)]} = \frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1{,}5)]} = \frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]}{[(1{,}5)-(-1)]\cdot[(1{,}5)-(0)]} = \frac{1}{3{,}75}\cdot(x^2+x)$$

Příklad 1.1.3. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 3 body

x	-1	0	$1{,}5$
y	$2{,}25$	$0{,}25$	1

Určete mnohočlen, který všemi prochází.

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1{,}5)]} = \frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1{,}5)]} = \frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]}{[(1{,}5)-(-1)]\cdot[(1{,}5)-(0)]} = \frac{1}{3{,}75}\cdot(x^2+x)$$

Lagrangeův interpolační mnohočlen: $L(x) = y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x) + y_3\cdot L_3(x) =$

$$(\mathbf{2{,}25})\cdot\frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x) + (\mathbf{0{,}25})\cdot\frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5) + \mathbf{1}\cdot\frac{1}{3{,}75}\cdot(x^2+x) =$$

$$= \left[\frac{2{,}25}{2{,}5}+\frac{-0{,}25}{1{,}5}+\frac{1}{3{,}75}\right]\cdot x^2 + \left[\frac{2{,}25\cdot(-1{,}5)}{2{,}5}+\frac{0{,}25\cdot 0{,}5}{1{,}5}+\frac{1}{3{,}75}\right]\cdot x + \left[\frac{0{,}25\cdot 1{,}5}{1{,}5}\right] = = x^2 - x + 0{,}25$$

Příklad 1.1.3. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 3 body

x	-1	0	$1{,}5$
y	$2{,}25$	$0{,}25$	1

Určete mnohočlen, který všemi prochází.

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1{,}5)]} = \frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2 - 1{,}5\,x)$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1{,}5)]} = \frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2 - 0{,}5\,x - 1{,}5)$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]}{[(1{,}5)-(-1)]\cdot[(1{,}5)-(0)]} = \frac{1}{3{,}75}\cdot(x^2 + x)$$

Lagrangeův interpolační mnohočlen: $L(x) = y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x) + y_3\cdot L_3(x) =$

$$(\mathbf{2{,}25})\cdot\frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x) + (\mathbf{0{,}25})\cdot\frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5) + \mathbf{1}\cdot\frac{1}{3{,}75}\cdot(x^2+x) =$$

$$= \left[\frac{2{,}25}{2{,}5} + \frac{-0{,}25}{1{,}5} + \frac{1}{3{,}75}\right]\cdot x^2 + \left[\frac{2{,}25\cdot(-1{,}5)}{2{,}5} + \frac{0{,}25\cdot 0{,}5}{1{,}5} + \frac{1}{3{,}75}\right]\cdot x + \left[\frac{0{,}25\cdot 1{,}5}{1{,}5}\right] = = x^2 - x + 0{,}25$$

A co když vznikne požadavek, aby mnohočlen procházel ještě dalším bodem?

Příklad 1.1.3. — Lagrangeův tvar interpolačního mnohočlenu

Jsou dány 3 body

x	-1	0	$1{,}5$	$0{,}5$
y	$2{,}25$	$0{,}25$	1	$-0{,}5$

Určete mnohočlen, který všemi prochází.

$$L_1 = \frac{[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(-1)-(0)]\cdot[(-1)-(1{,}5)]} = \frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x)\cdot\frac{x-0{,}5}{-1-0{,}5}$$

$$L_2 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(0)-(-1)]\cdot[(0)-(1{,}5)]} = \frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5)\cdot\frac{x-0{,}5}{0-0{,}5}$$

$$L_3 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]}{[(1{,}5)-(-1)]\cdot[(1{,}5)-(0)]} = \frac{1}{3{,}75}\cdot(x^2+x)\cdot\frac{x-0{,}5}{1{,}5-0{,}5}$$

$$L_4 = \frac{[x-(-1)]\cdot[x-(0)]\cdot[x-(1{,}5)]}{[(0{,}5)-(-1)]\cdot[(0{,}5)-(0)]\cdot[(0{,}5)-(1)]}$$

Lagrangeův interpolační mnohočlen: $L(x) = y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x) + y_3\cdot L_3(x) =$

$$(\mathbf{2{,}25})\cdot\frac{1}{2{,}5}\cdot(x^2-1{,}5\,x) + (\mathbf{0{,}25})\cdot\frac{-1}{1{,}5}\cdot(x^2-0{,}5\,x-1{,}5) + \mathbf{1}\cdot\frac{1}{3{,}75}\cdot(x^2+x) =$$

$$= \left[\frac{2{,}25}{2{,}5}+\frac{-0{,}25}{1{,}5}+\frac{1}{3{,}75}\right]\cdot x^2 + \left[\frac{2{,}25\cdot(-1{,}5)}{2{,}5}+\frac{0{,}25\cdot 0{,}5}{1{,}5}+\frac{1}{3{,}75}\right]\cdot x + \left[\frac{0{,}25\cdot 1{,}5}{1{,}5}\right] = = x^2 - x + 0{,}25$$

A co když vznikne požadavek, aby mnohočlen procházel ještě dalším bodem? Pak musíme výpočty následovně doplnit.

$$L(x) = y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x) + y_3\cdot L_3(x) + y_4\cdot L_4(x)$$

1.2. Poznámka k interpolačním polynomům

Interpolace. Interpolační polynom v Lagrangeově tvaru má tu nevýhodu, že chceme-li přidat další uzlový bod, musíme celý polynom přepočítat znovu.

Také výpočet hodnoty tohoto polynomu pro větší počet uzlových bodů je dosti pracný. Proto je někdy výhodnější hledat interpolační polynom v jiném tvaru [20].

Aproximace. [21] V případe, že jsou funkční hodnoty získány experimentálně, například jako výsledky nějakého měření, je interpolace nevhodná. Výsledky jsou totiž zatíženy chybami a interpolační funkce by tyto chyby kopírovala, což je přesně to, čeho se chceme vyvarovat.

Kromě toho povaha experimentu nevylučuje možnost několika měření s různými výsledky při nezměněné hodnotě $\boldsymbol{x}$ [22].

Vzhledem k těmto okolnostem není vždy žádoucí, aby aproximační funkce nabývala v uzlových bodech předem daných hodnot (aby křivka procházela všemi uzlovými body).

---

[20] Například Newtonův interpolační polynom, Taylorův rozvoj, apod.

[21] **Aproximace** (*přiblížení*) je znázornění něčeho, co není naprosto přesné, ale je to stále dost blízko na to, aby to bylo použitelné. Aproximaci je možné využít, když chybějící informace znemožňují získání přesného výsledku.

[22] Ale funkce (a Lagrangeův interpolační mnohočlen je funkcí, která prochází všemi uzlovými body) nemůže mít pro jednu hodnotu x různé funkční hodnoty!

2. Aproximace diskrétních hodnot vhodnou funkcí

2.1. Metoda nejmenších čtverců

V mnoha případech máme určitou představu o povaze funkce, jejíž hodnoty jsme naměřili; například se může jednat o lineární nebo kvadratickou závislost. Pak hledáme mezi všemi funkcemi tohoto známého typu takovou, která prochází k zadaným (dříve jsme je nazývaly uzlové a požadovali jsme, aby jimi interpolační funkce procházela) bodům v jistém smyslu „***co nejblíže***“.

2.1.1. Aproximace přímkou

Nejprve podrobně rozebereme nejjednodušší případ — aproximaci přímkou. Výchozí situace je tato: Je dáno n bodů o souřadnicích $[x_1; y_1]$, $[x_2; y_2]$, $[x_3; y_3]$, ..., $[x_{n-1}; y_{n-1}]$, $[x_n; y_n]$. Budeme hledat přímku, jejíž rovnice je následující

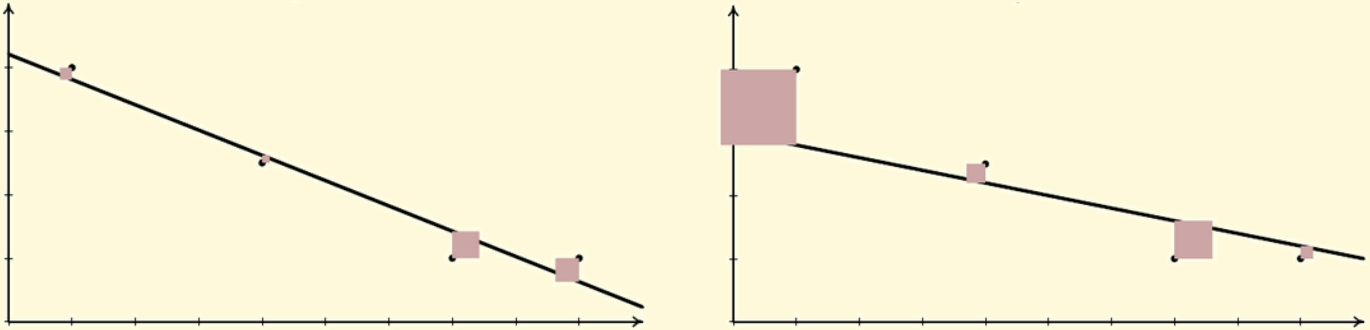
$$y = a + b \cdot x\,, \tag{29}$$

která bude ***co nejlépe*** procházet mezi body $[x_i; y_i]$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pokud bychom uvažovali pouze odchylky přímky od zadaných bodů, mohlo by se stát (jako v levé části obrázku 24), že součet chyb s kladným znaménkem (vzdálenosti bodů ležících pod přímkou od této přímky) je stejný jako součet chyb se záporným znaménkem (vzdálenosti bodů ležících nad přímkou od této přímky), takže se navzájem odečtou. A ***nulový*** součet všech chyb znamená, že chyby neexistují a přímka prochází přesně všemi body. Což ovšem není pravda, jak je z obrázku 24 zřejmé.

Abychom vyloučili vzájemné odečítání chyb, musíme ze záporných hodnot chyb vyrobit jejich kladné protějšky. K tomu můžeme využít buď absolutní hodnoty ze záporných chyb nebo jejich druhých mocnin.

Obrázek 24: Přímky procházející „blízko“ zadaných bodů. Autorem obrázků je Robert Mařík.



A která z nich prochází bodům „blížeji“?

Jelikož body $[x_i; y_i]$ jsou dány, chyba závisí pouze na koeficientech přímky a a b. Ukazuje se, že vhodné kritérium pro určení onoho „co nejlepšího“ procházení je, aby součet druhých mocnin (neboli čtverců) chyb v jednotlivých bodech byl minimální. Tedy zapsáno symbolicky:

$$\sum_{i=1}^{n}[(a+b\cdot x_i)-y_i]^2 \longrightarrow \min\ .$$

Ze střední školy si možná pamatujete (my to budeme probírat v dalším semestru), že extrém (maximum či minimum) funkce může nastat pouze v bodech, kde první derivace neexistuje, nebo se rovná nule. V tomto případě máme dva proměnné koeficienty přímky, proto se při výpočtu používají parciální derivace. Ty položíme rovny nule a obdržíme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a \cdot n \quad + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \end{aligned} \tag{30}$$

Tuto soustavu pak vyřešíme, což si ukážeme na následujícím příkladu. Řešit můžeme například Gaussovou eliminační metodou, Cramerovým pravidlem či jinak, protože čtvercová matice této soustavy je vždy regulární.

Příklad: Určete rovnici přímky, která bude procházet co *„nejblíže“* bodům

$$[-1;1] \quad ; \quad [0;2] \quad ; \quad [2;-2] \quad ; \quad [3;-7] \quad .$$

Nejprve si zadané body přepíšeme do tabulky, nejlépe SVISLE, jak si ukážeme na další straně. Tuto tabulku pak budeme doplňovat potřebnými sloupci.

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

Pro 4 body je ve vztazích (30) $n = 4$:

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

Pro 4 body je ve vztazích (30) $n = 4$:

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$

Výpočty potřebné pro nalezení koeficientů soustavy provedeme v následující tabulce:

i	x_i	y_i		
1	-1	1		
2	0	2		
3	2	-2		
4	3	-7		
$\sum$				

$$\begin{aligned} 4a + \quad b &= \\ a + \quad b &= \end{aligned}$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

Pro 4 body je ve vztazích (30) $n = 4$:

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$

Výpočty potřebné pro nalezení koeficientů soustavy provedeme v následující tabulce:

i	x_i	y_i	x_i^2	
1	-1	1		
2	0	2		
3	2	-2		
4	3	-7		
$\sum$	4	-6		

$$4\,a + 4\,b = -6$$
$$4\,a + \,b =$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

Pro 4 body je ve vztazích (30) $n = 4$:

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$

Výpočty potřebné pro nalezení koeficientů soustavy provedeme v následující tabulce:

i	x_i	y_i	x_i^2	
1	-1	1	1	
2	0	2	0	
3	2	-2	4	
4	3	-7	9	
$\sum$	4	-6		

$$\begin{aligned} 4\,a + 4\,b &= -6 \\ 4\,a + b &= \end{aligned}$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

Pro 4 body je ve vztazích (30) $n = 4$:

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$

Výpočty potřebné pro nalezení koeficientů soustavy provedeme v následující tabulce:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	-1	1	1	
2	0	2	0	
3	2	-2	4	
4	3	-7	9	
$\sum$	4	-6	14	

$$\begin{aligned} 4\,a + 4\,b &= -6 \\ 4\,a + 14\,b &= \end{aligned}$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

Pro 4 body je ve vztazích (30) $n = 4$:

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$

Výpočty potřebné pro nalezení koeficientů soustavy provedeme v následující tabulce:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	-1	1	1	-1
2	0	2	0	0
3	2	-2	4	-4
4	3	-7	9	-21
$\sum$	4	-6	14	

$$\begin{aligned} 4\,a + 4\,b &= -6 \\ 4\,a + 14\,b &= \end{aligned}$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

Pro 4 body je ve vztazích (30) $n = 4$:

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$

Výpočty potřebné pro nalezení koeficientů soustavy provedeme v následující tabulce:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	-1	1	1	-1
2	0	2	0	0
3	2	-2	4	-4
4	3	-7	9	-21
$\sum$	4	-6	14	-26

$$\begin{aligned} 4\,a + 4\,b &= -6 \\ 4\,a + 14\,b &= -26 \end{aligned}$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

Pro 4 body je ve vztazích (30) $n = 4$:

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$

Výpočty potřebné pro nalezení koeficientů soustavy provedeme v následující tabulce:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	-1	1	1	-1
2	0	2	0	0
3	2	-2	4	-4
4	3	-7	9	-21
$\sum$	4	-6	14	-26

$$\begin{aligned} 4\,a + 4\,b &= -6 \quad |\cdot(-1) \\ 4\,a + 14\,b &= -26 \\ \hline 0 + 10\,b &= -20 \quad |:10 \end{aligned}$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

Pro 4 body je ve vztazích (30) $n = 4$:

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$

Výpočty potřebné pro nalezení koeficientů soustavy provedeme v následující tabulce:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	-1	1	1	-1
2	0	2	0	0
3	2	-2	4	-4
4	3	-7	9	-21
$\sum$	4	-6	14	-26

$$\begin{array}{rcll} 4a + 4b & = & -6 & \mid \cdot (-1) \\ 4a + 14b & = & -26 & \\ \hline 0 + 10b & = & -20 & \mid : 10 \\ b & = & -2 & \end{array}$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

Pro 4 body je ve vztazích (30) $n = 4$:

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$

Výpočty potřebné pro nalezení koeficientů soustavy provedeme v následující tabulce:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	-1	1	1	-1
2	0	2	0	0
3	2	-2	4	-4
4	3	-7	9	-21
$\sum$	4	-6	14	-26

$$\begin{array}{rcll} 4\,a + 4\,b & = & -6 & | \cdot (-1) \\ 4\,a + 14\,b & = & -26 & \\ \hline 0 + 10\,b & = & -20 & | : 10 \\ b & = & -2 & \end{array}$$

Po dosazení za $b = -2$ do první rovnice dostáváme $4\,a + 4 \cdot (-2) = -6$ a odsud $a = \frac{1}{2}$.

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

Pro 4 body je ve vztazích (30) $n = 4$:

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$

Výpočty potřebné pro nalezení koeficientů soustavy provedeme v následující tabulce:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	-1	1	1	-1
2	0	2	0	0
3	2	-2	4	-4
4	3	-7	9	-21
$\sum$	4	-6	14	-26

$$\begin{array}{rcll} 4\,a + \ \ 4\,b & = & -6 & |\cdot(-1) \\ 4\,a + 14\,b & = & -26 & \\ \hline 0 + 10\,b & = & -20 & |:10 \\ b & = & -2 & \end{array}$$

Po dosazení za $b = -2$ do první rovnice dostáváme $4\,a + 4\cdot(-2) = -6$ a odsud $a = \frac{1}{2}$.

Aproximační přímka (29) má rovnici: $y = 0,5 - 2\,x$.

2.1.2. Aproximace parabolou

Budeme postupovat analogicky jako v případě lineárního vyrovnání. Hledáme parabolu, která má rovnici:

$$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 \qquad \text{nebo také} \qquad y = a \cdot x^0 + b \cdot x + c \cdot x^2 \,. \tag{31}$$

Jelikož body $[x_i; y_i]$ jsou dány, chyba závisí pouze na koeficientech paraboly a, b a c. Stejně jako u lineárního vyrovnání se ukazuje, že vhodné kritérium pro určení onoho „co nejlepšího“ procházení je, aby součet druhých mocnin (neboli čtverců) chyb v jednotlivých bodech byl minimální. Tedy:

$$\sum_{i=1}^{n} [(a + b \cdot x_i + c \cdot x_i^2) - y_i]^2 \longrightarrow \min \,.$$

Parciální derivace podle proměnných a, b a c položíme rovny nule a dostaneme (kde $a \cdot \sum_{i=1}^{n} x^0 = a \cdot n$):

$$\begin{aligned} a \cdot n \quad &+ b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i &+ b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &+ b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y_i \end{aligned} \tag{32}$$

Tuto soustavu lineárních rovnic vyřešíme.

Příklad. Vezmeme stejné body,

$$[-1; 1] \quad [0; 2] \quad [2; -2] \quad [3; -7]$$

jako v minulém příkladu.

Teď požadujeme najít mnohočlen druhého stupně (kvadratický trojčlen, jehož grafem je parabola) tak, aby jeho graf procházel „***co nejblíže***“ zadaným bodům. Tak jako v předchozím budeme pomocné výpočty zapisovat do tabulky. A protože máme zadané stejné body jako v předchozím případě, základ tabulky již máme hotov. Jenom ji doplníme o další potřebné sloupce.

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

předchozí výpočet

$$
\begin{aligned}
a \cdot 4 \quad + b \cdot \sum_{\forall i} x_i + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 &= \sum_{\forall i} y_i \\
a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 &= \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i \\
a \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^4 &= \sum_{\forall i} x_i^2 \cdot y_i
\end{aligned}
$$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	x_i^3		
1	-1	1	1	-1			
2	0	2	0	0			
3	2	-2	4	-4			
4	3	-7	9	-21			
$\sum$	4	-6	14	-26			

$$
\begin{aligned}
4a + 4b + c &= -6 \\
4a + 14b + c &= -26 \\
a + b + c &=
\end{aligned}
$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

předchozí výpočet

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^4 = \sum_{\forall i} x_i^2 \cdot y_i$$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	x_i^3		
1	-1	1	1	-1	-1		
2	0	2	0	0	0		
3	2	-2	4	-4	8		
4	3	-7	9	-21	27		
$\sum$	4	-6	14	-26			

$$\begin{aligned} 4a + 4b + 14c &= -6 \\ 4a + 14b + c &= -26 \\ 14a + b + c &= \end{aligned}$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

předchozí výpočet

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^4 = \sum_{\forall i} x_i^2 \cdot y_i$$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	x_i^3	x_i^4	
1	-1	1	1	-1	-1		
2	0	2	0	0	0		
3	2	-2	4	-4	8		
4	3	-7	9	-21	27		
$\sum$	4	-6	14	-26	34		

$$\begin{aligned} 4a + 4b + 14c &= -6 \\ 4a + 14b + 34c &= -26 \\ 14a + 34b + c &= \end{aligned}$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

předchozí výpočet

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^4 = \sum_{\forall i} x_i^2 \cdot y_i$$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	x_i^3	x_i^4	
1	-1	1	1	-1	-1	1	
2	0	2	0	0	0	0	
3	2	-2	4	-4	8	16	
4	3	-7	9	-21	27	81	
$\sum$	4	-6	14	-26	34		

$$\begin{aligned} 4a + 4b + 14c &= -6 \\ 4a + 14b + 34c &= -26 \\ 14a + 34b + c &= \end{aligned}$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

předchozí výpočet

$$a \cdot 4 \quad + b \cdot \sum_{\forall i} x_i + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} y_i$$

$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$

$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^4 = \sum_{\forall i} x_i^2 \cdot y_i$$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 \cdot y_i$
1	-1	1	1	-1	-1	1	
2	0	2	0	0	0	0	
3	2	-2	4	-4	8	16	
4	3	-7	9	-21	27	81	
$\sum$	4	-6	14	-26	34	98	

$$4a + 4b + 14c = -6$$

$$4a + 14b + 34c = -26$$

$$14a + 34b + 98c =$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

předchozí výpočet

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^4 = \sum_{\forall i} x_i^2 \cdot y_i$$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 \cdot y_i$
1	-1	1	1	-1	-1	1	1
2	0	2	0	0	0	0	0
3	2	-2	4	-4	8	16	-8
4	3	-7	9	-21	27	81	-63
$\sum$	4	-6	14	-26	34	98	

$$\begin{aligned} 4a + 4b + 14c &= -6 \\ 4a + 14b + 34c &= -26 \\ 14a + 34b + 98c &= \end{aligned}$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

předchozí výpočet

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 \cdot y_i$
1	-1	1	1	-1	-1	1	1
2	0	2	0	0	0	0	0
3	2	-2	4	-4	8	16	-8
4	3	-7	9	-21	27	81	-63
$\sum$	4	-6	14	-26	34	98	-70

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} y_i$$

$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$

$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^4 = \sum_{\forall i} x_i^2 \cdot y_i$$

$$\begin{aligned} 4\,a + 4\,b + 14\,c &= -6 \\ 4\,a + 14\,b + 34\,c &= -26 \\ 14\,a + 34\,b + 98\,c &= -70 \end{aligned}$$

Soustavu budeme řešit Cramerovým pravidlem:

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

předchozí výpočet

$$a \cdot 4 \quad + b \cdot \sum_{\forall i} x_i + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^4 = \sum_{\forall i} x_i^2 \cdot y_i$$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 \cdot y_i$
1	-1	1	1	-1	-1	1	1
2	0	2	0	0	0	0	0
3	2	-2	4	-4	8	16	-8
4	3	-7	9	-21	27	81	-63
$\sum$	4	-6	14	-26	34	98	-70

$$\begin{aligned} 4\,a + 4\,b + 14\,c &= -6 \\ 4\,a + 14\,b + 34\,c &= -26 \\ 14\,a + 34\,b + 98\,c &= -70 \end{aligned}$$

Soustavu budeme řešit Cramerovým pravidlem:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 4 & 14 \\ -26 & 14 & 34 \\ -70 & 34 & 98 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 4 & 14 & 34 \\ 14 & 34 & 98 \end{vmatrix}} = \frac{720}{360} = 2; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -6 & 14 \\ 4 & -26 & 34 \\ 14 & -70 & 98 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 4 & 14 & 34 \\ 14 & 34 & 98 \end{vmatrix}} = \frac{0}{360} = 0; \quad c = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -6 \\ 4 & 14 & -26 \\ 14 & 34 & -70 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 4 & 14 & 34 \\ 14 & 34 & 98 \end{vmatrix}} = \frac{-360}{360} = -1$$

x	-1	0	2	3
y	1	2	-2	-7

předchozí výpočet

$$a \cdot 4 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 = \sum_{\forall i} y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 = \sum_{\forall i} x_i \cdot y_i$$
$$a \cdot \sum_{\forall i} x_i^2 + b \cdot \sum_{\forall i} x_i^3 + c \cdot \sum_{\forall i} x_i^4 = \sum_{\forall i} x_i^2 \cdot y_i$$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 \cdot y_i$
1	-1	1	1	-1	-1	1	1
2	0	2	0	0	0	0	0
3	2	-2	4	-4	8	16	-8
4	3	-7	9	-21	27	81	-63
$\sum$	4	-6	14	-26	34	98	-70

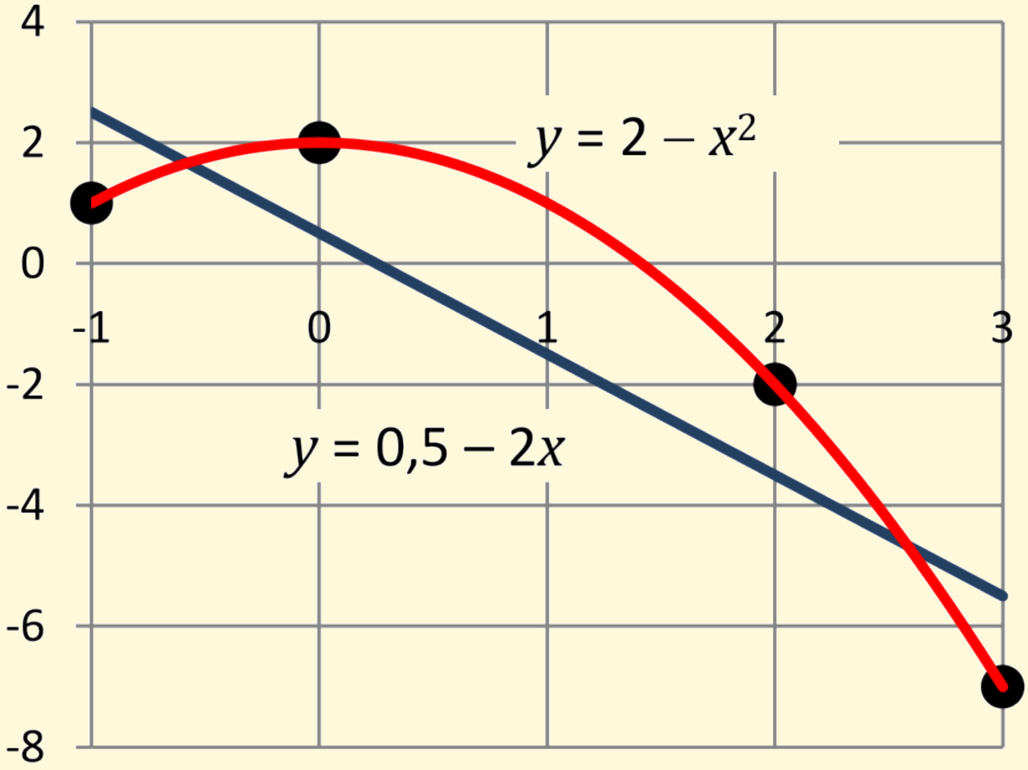
$$\begin{aligned} 4a + 4b + 14c &= -6 \\ 4a + 14b + 34c &= -26 \\ 14a + 34b + 98c &= -70 \end{aligned}$$

Soustavu budeme řešit Cramerovým pravidlem:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 4 & 14 \\ -26 & 14 & 34 \\ -70 & 34 & 98 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 4 & 14 & 34 \\ 14 & 34 & 98 \end{vmatrix}} = \frac{720}{360} = 2; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -6 & 14 \\ 4 & -26 & 34 \\ 14 & -70 & 98 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 4 & 14 & 34 \\ 14 & 34 & 98 \end{vmatrix}} = \frac{0}{360} = 0; \quad c = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -6 \\ 4 & 14 & -26 \\ 14 & 34 & -70 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 4 & 14 & 34 \\ 14 & 34 & 98 \end{vmatrix}} = \frac{-360}{360} = -1$$

Aproximační parabola (31) má rovnici: $y = 2 - x^2$.

Obrázek 25: Metoda nejmenších čtverců



Zadané body, aproximační přímka, aproximační parabola

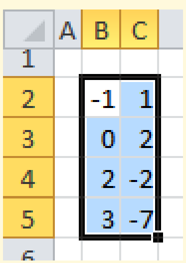
To, že parabola prochází všemi zadanými body, je jenom náhoda. Obecně nemusí procházet ani jediným, ale „dostatečně blízko“ všech, tak jako modrá přímka.

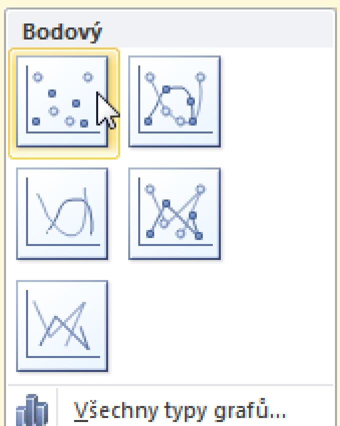
2.2. Poznámka k metodě nejmenších čtverců

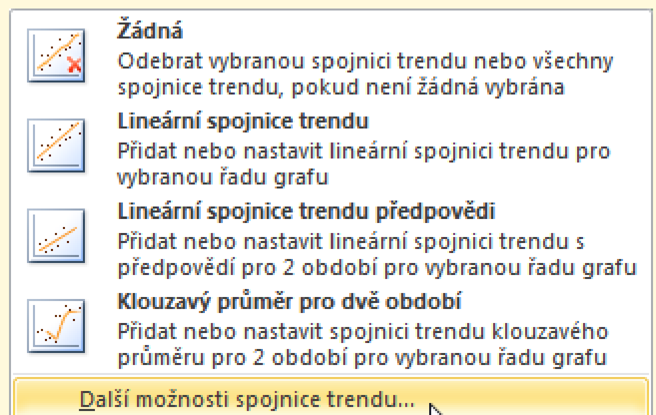
Uvedená metoda je v praxi natolik používána, že jak některé komerční programy (například ***Excel***, Mathematica, Matlab, MathCad, ...) tak jejich freewarové alternativy (například GNUplot) hledají aproximační funkce pouze na základě námi zadaných diskrétních bodů. Vše ostatní již provádějí samostatně, bez našeho přičinění.

Konkrétně v programu **Excel 2010** postupujeme následovně:

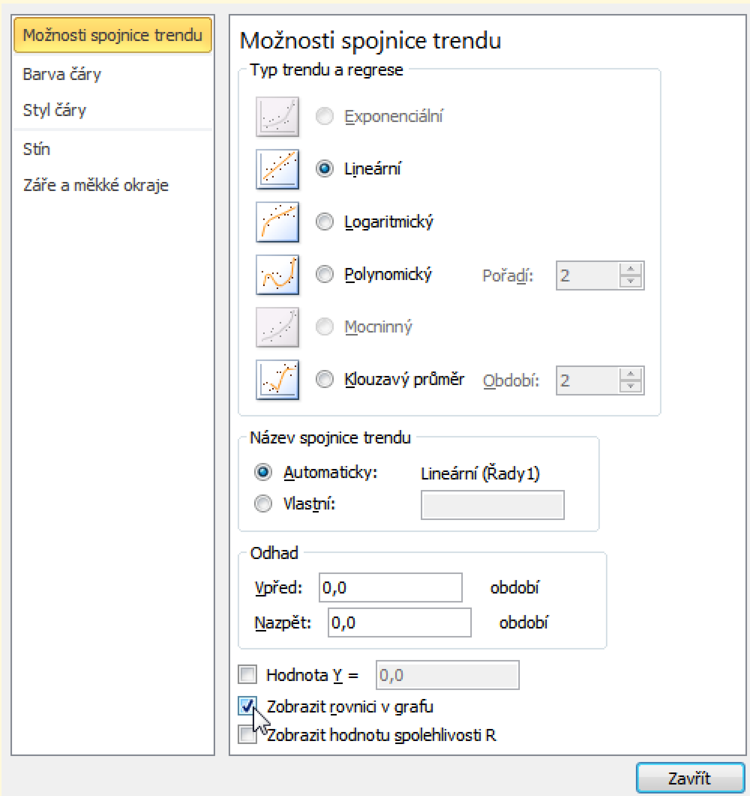
1. Zadané hodnoty označíme jako blok.
2. Potom na kartě **[*Vložení*]** v oblasti ***„Grafy“*** vybereme ***<Bodový>***
3. Nakonec na kartě **[*Nástroje grafu*]** v záložce ***„Rozložení“*** v oblasti ***<Analýza>*** a položce ***„Spojnice trendu“*** vybereme **[*Další možnosti spojnice trendu*]**

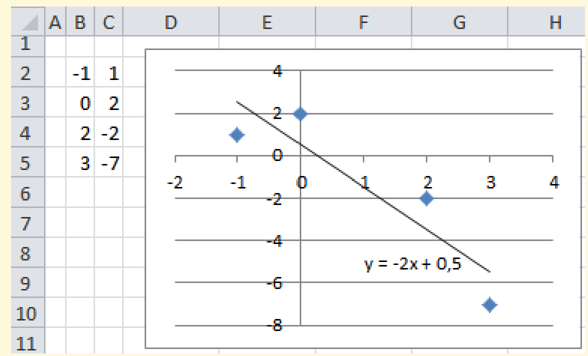






Po případném dalším upřesnění (například jaká má být barva čar, zda požadujeme v grafu vypisovat výslednou rovnici /v levém obrázku druhá volba od spodu/, ...) se již vykreslí požadovaný graf.





Posloupnosti a jejich aplikace v bankovnictví

Obsah kapitoly: Posloupnosti a jejich aplikace v bankovnictví

1. Posloupnosti **399**
1.1. Způsoby zadávání posloupností . . . 401
1.1.1. Grafem, tabulkou, výčtem prvků . . . 401
1.1.2. Rekurentním vztahem . . . 402
1.1.3. Vzorcem pro obecný člen . . . 402
1.2. Aritmetická posloupnost . . . 403
1.3. Geometrická posloupnost . . . 404
1.3.1. Aplikace geometrické posloupnosti . . . 405
Dvojková číselná soustava . . . 405
Výpočet úroků . . . 416

2. Bankovní produkty **418**
2.1. Vklady . . . 419
2.2. Spoření . . . 420
2.3. Důchody . . . 421
2.4. Úvěry . . . 422
2.5. Příklady . . . 423

1. Posloupnosti

Až doposud jsme si všímali nejrůznějších funkcí. Také nyní se zaměříme na funkce, a to speciální, jejichž definičním oborem jsou všechna přirozená čísla. Takové funkce nazveme ***posloupnosti***. To znamená, že dokážeme jejich prvky „očíslovat“, určit jejich pořadí (který je první, který druhý, atd.).

Posloupností reálných čísel (dále jen *posloupností*) budeme nazývat funkci, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.

Členy posloupnosti (její prvky $\Longrightarrow$ reálná čísla) zapisujeme do složených {svorkových} závorek.

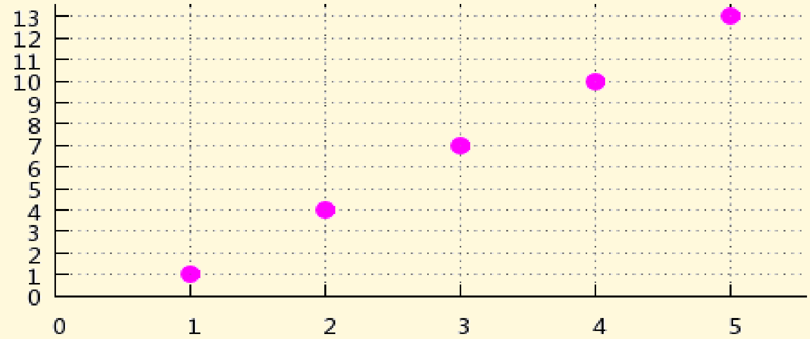
$\{\mathbf{1},\ \mathbf{4},\ \mathbf{7},\ \mathbf{10},\ \mathbf{13},\ \ldots\}$ je příkladem posloupnosti, u které jsme vyjmenovali prvních pět jejích prvků (členů posloupnosti) tak, jak jdou po sobě. Zajisté dokážete říci, jak by tato posloupnost pokračovala, jaká je mezi jejími členy zákonitost. Máme zadán první člen $\mathbf{1}$, druhý člen $\mathbf{4}$, třetí $\mathbf{7}$, čtvrtý $\mathbf{10}$, pátý $\mathbf{13}$ a zřejmě šestý člen bude $\mathbf{16}$, protože každý další člen dostaneme tak, že k předchozímu přičteme TROJKU.

Jistě si vzpomínáte, že funkci $\boldsymbol{f}$ lze zadat:

- grafem, ze kterého odečteme souřadnice potřebných bodů do tabulky;
- tabulkou, na základě které lze buď načrtnout graf nebo interpolací získat předpis funkce, která všemi danými body prochází;
- předpisem (vztahem, vzorcem), který každému $x \in D(f)$ přiřazuje právě jedno $y \in H(f)$. Vypočtené hodnoty pak můžeme zapsat do tabulky.

V případě posloupností je to stejné. Také posloupnost lze zadat:

- grafem $\Longrightarrow$ grafem posloupnosti jsou navzájem izolované body.
  Tohle je graf předchozího příkladu.



- tabulkou $\Longrightarrow$ **výčtem prvků**

- předpisem (vztahem, vzorcem), kterým se zpravidla zadává prvek (člen posloupnosti, který stojí na místě n, označujeme podobně jako u matic pomocí jednoho indexu /protože určuje pouze pořadí/ tedy například a_n) jedním z následujících způsobů:

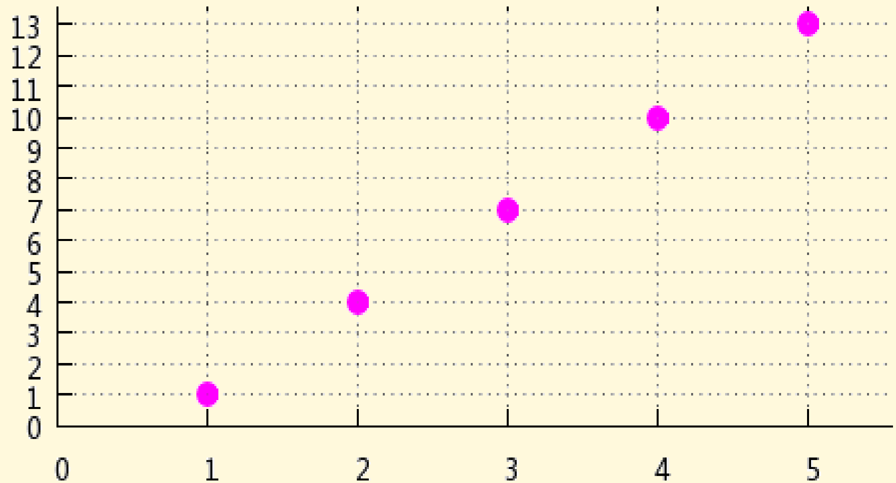
  rekurentně zadáním prvního (výjimečně N*tého*) členu posloupnosti nebo několika prvních členů posloupnosti a vzorcem, podle něhož lze určit další členy pomocí předchozích členů;
  například: $a_1 = 1\,,\quad a_2 = 3\,,\quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\,,\quad$ pro $\quad n \geq 2$;

  vzorcem pro n. člen — prvek posloupnosti, který je ***n.*** v pořadí, tedy n je přirozené;
  například: $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \sqrt{3}\,.$

Nyní si ukážeme, jak z grafu můžeme popsat posloupnost jiným způsobem, tak jako u funkcí.

1.1. Způsoby zadávání posloupností

1.1.1. Grafem, tabulkou, výčtem prvků



Jednotlivé body [1; 1] [2; 4] [3; 7] [4; 10] [5; 13] , kterými je tvořen graf posloupnosti, můžeme zapsat například do následující tabulky:

POŘADÍ **prvku** posloupnosti	1	2	3	4	5	...
HODNOTA **prvku** posloupnosti	1	4	7	10	13	...

Je zřejmé, že pro všechny možné posloupnosti budou mít jejich tabulky stejný první řádek. Proto uvedenou tabulku zjednodušíme tak, že vypíšeme jen její druhý řádek, který navíc uzavřeme do složených {svorkových} závorek.

Novou (zjednodušenou) „tabulku“ $\{\mathbf{1},\ \mathbf{4},\ \mathbf{7},\ \mathbf{10},\ \mathbf{13},\ \ldots\}$ pak nazýváme také ***výčet prvků***.

1.1.2. Rekurentním vztahem

Jak jsme již uvedli v příkladu, každý následující člen této posloupnosti dostaneme tak, když k jeho předchozímu členu přičteme číslo **tři**, což můžeme (pro následující člen) vyjádřit symbolicky:

$$a_1 = 1\,, \qquad a_{n+1} = a_n + 3$$

1.1.3. Vzorcem pro obecný člen

Pokud budeme chtít totéž vyjádřit pro obecný člen a_n pouze v závislosti na n (tedy na pořadí daného členu), využijeme skutečnosti, že:

První člen posloupnosti $\mathbf{a_1} = \mathbf{1}$.

To také můžeme zapsat: $\mathbf{a_1} = \mathbf{1} + (\{1\} - 1) \cdot cokoliv = 1 + (0) \cdot cokoliv = 1 + 0 = 1$.

Jednička ve složených závorkách teď pro nás bude představovat pořadí daného členu, tedy $n = 1$.

Druhý člen posloupnosti $\mathbf{a_2} = \mathbf{4}$ dostaneme tak, když k prvnímu členu ($a_1 = 1$) přičteme trojku.

Proto v červeném vztahu jedničku ve složených závorkách (představující n) nahradíme dvojkou a výraz $cokoliv$ nahradíme trojkou (tím co přičítáme): $a_2 = 1 + (\{2\} - 1) \cdot 3 = 1 + 1 \cdot 3 = 4$.

Třetí člen posloupnosti $\mathbf{a_3} = \mathbf{7}$ zkusíme analogicky:

$a_3 = 1 + (\{3\} - 1) \cdot 3 = 1 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7$. Odtud plyne:

Obecný n. člen posloupnosti $$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3$$ Ověřte i pro jiná n.

A nyní se stručně zmíníme o posloupnostech známých ze střední školy, a to — aritmetické a geometrické posloupnosti.

1.2. Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost má stálý rozdíl mezi sousedními členy. Tento rozdíl mezi libovolným členem kromě prvního a předcházejícím členem se obvykle značí d a nazývá ***diference***.

Diference

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Rekurentní zadání

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Zadání obecného členu

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Součet prvních n členů

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

1.3. Geometrická posloupnost

U geometrické posloupnosti je každý člen kromě prvního stálým násobkem předchozího členu. Tento násobek se obvykle značí q a nazývá ***kvocient*** geometrické posloupnosti. Pro posloupnosti s nenulovými členy je q rovno podílu libovolného členu kromě prvního a členu předchozího.

Kvocient

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Rekurentní zadání

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Zadání obecného členu

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Součet prvních n členů

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

nebo

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

1.3.1. Aplikace geometrické posloupnosti

Dvojková číselná soustava

Číselná soustava je způsob **vyjádření čísel**. Podle způsobu **určení hodnoty čísla** rozlišujeme dva hlavní druhy číselných soustav:

Poziční číselné soustavy, které jsou charakterizovány tzv. základem nebo-li bází, což je obvykle kladné celé číslo definující maximální počet číslic, které jsou v dané soustavě k dispozici. Číslo v nich zapsané lze vyjádřit součtem mocnin základu dané soustavy vynásobených příslušnými platnými číslicemi.

Jedná se tedy o geometrickou posloupnost, jejíž kvocient je představován bází číselné soustavy.

Pokud je základem číslo **2**, hovoříme o ***dvojkové*** (binární) soustavě, která je prostřednictvím logických členů (proud prochází×neprochází) přímo implementována v digitálních elektronických obvodech. Tedy interně ji používají všechny běžné digitální počítače.

Nepoziční číselné soustavy, pro které je charakteristická skutečnost, že hodnota číslice je daná jejím symbolem a nezávisí na její pozici v zapsaném čísle.

Asi nejznámnější jsou ***římské číslice***, kdy čísla zapisujeme pomocí písmen abecedy.
Potom $\mathbf{iii} = 1 + 1 + 1 = 3$, ale **111** = ***sto*** (10^2) + ***deset*** (10^1) + ***jedna*** (10^0) .

Dvojková soustava (nebo také binární soustava) je číselná soustava, která používá pouze dva symboly: NULU a JEDNIČKU. Je to poziční číselná soustava mocnin čísla 2.

Abychom se nespletli, v jaké číselné soustavě se vlastně pohybujeme, zapisujeme daná čísla do závorek a přidáme index, který označuje základ dané číselné soustavy.

V přemětu *„Základy informačních systémů“* budete často převádět čísla zapsaná ve dvojkové (binární) soustavě do desítkové (dekadické) soustavy a naopak.

Například: $(\,1101\,0110\,)_2 = (\,214\,)_{10}$, protože platí:

$$(\,1101\,0110\,)_2 = 1\cdot\mathbf{2^7} + 1\cdot\mathbf{2^6} + 0\cdot\mathbf{2^5} + 1\cdot\mathbf{2^4} \quad + \quad 0\cdot\mathbf{2^3} + 1\cdot\mathbf{2^2} + 1\cdot\mathbf{2^1} + 0\cdot\mathbf{2^0} =$$

$$= 1\cdot 128 + 1\cdot 64 + 0\cdot 32 + 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = 128 + 64 + 16 + 4 + 2 = (\,214\,)_{10}$$

V tomto případě vlastně hledáme (například Hornerovým schématem) funkční hodnotu mnohočlenu:

$$P(x) = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x$$

v čísle DVA. Tedy: $P(2) = 214$

$(\,\mathbf{1101\,0110}\,)_2$	1	1	0	1	0	1	1	0
$\mathbf{2}$	1							

V přemětu *„Základy informačních systémů“* budete často převádět čísla zapsaná ve dvojkové (binární) soustavě do desítkové (dekadické) soustavy a naopak.

Například: $(1101\,0110)_2 = (214)_{10}$, protože platí:

$$(1101\,0110)_2 = 1\cdot\mathbf{2^7} + 1\cdot\mathbf{2^6} + 0\cdot\mathbf{2^5} + 1\cdot\mathbf{2^4} \quad + \quad 0\cdot\mathbf{2^3} + 1\cdot\mathbf{2^2} + 1\cdot\mathbf{2^1} + 0\cdot\mathbf{2^0} =$$

$$= 1\cdot 128 + 1\cdot 64 + 0\cdot 32 + 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = 128 + 64 + 16 + 4 + 2 = (214)_{10}$$

V tomto případě vlastně hledáme (například Hornerovým schématem) funkční hodnotu mnohočlenu:

$$P(x) = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x$$

v čísle DVA. Tedy: $P(2) = 214$

$(\mathbf{1101\,0110})_2$	1	1	0	1	0	1	1	0
		$2\cdot 1 + 1$						
2	1	3						

V přemětu *„Základy informačních systémů“* budete často převádět čísla zapsaná ve dvojkové (binární) soustavě do desítkové (dekadické) soustavy a naopak.

Například: $(\,1101\,0110\,)_2 = (\,214\,)_{10}$, protože platí:

$$(\,1101\,0110\,)_2 = 1\cdot\mathbf{2^7} + 1\cdot\mathbf{2^6} + 0\cdot\mathbf{2^5} + 1\cdot\mathbf{2^4} \quad + \quad 0\cdot\mathbf{2^3} + 1\cdot\mathbf{2^2} + 1\cdot\mathbf{2^1} + 0\cdot\mathbf{2^0} =$$

$$= 1\cdot 128 + 1\cdot 64 + 0\cdot 32 + 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = 128 + 64 + 16 + 4 + 2 = (\,214\,)_{10}$$

V tomto případě vlastně hledáme (například Hornerovým schématem) funkční hodnotu mnohočlenu:

$$P(x) = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x$$

v čísle DVA. Tedy: $P(2) = 214$

$(\,\mathbf{1101\,0110}\,)_2$	1	1	0	1	0	1	1	0
			$2\cdot 3 + 0$					
2	1	3	6					

V přemětu *„Základy informačních systémů“* budete často převádět čísla zapsaná ve dvojkové (binární) soustavě do desítkové (dekadické) soustavy a naopak.

Například: $(\,1101\,0110\,)_2 = (\,214\,)_{10}$, protože platí:

$$(\,1101\,0110\,)_2 = 1\cdot\mathbf{2^7} + 1\cdot\mathbf{2^6} + 0\cdot\mathbf{2^5} + 1\cdot\mathbf{2^4} \quad + \quad 0\cdot\mathbf{2^3} + 1\cdot\mathbf{2^2} + 1\cdot\mathbf{2^1} + 0\cdot\mathbf{2^0} =$$

$$= 1\cdot128 + 1\cdot64 + 0\cdot32 + 1\cdot16 + 0\cdot8 + 1\cdot4 + 1\cdot2 + 0\cdot1 = 128 + 64 + 16 + 4 + 2 = (\,214\,)_{10}$$

V tomto případě vlastně hledáme (například Hornerovým schématem) funkční hodnotu mnohočlenu:

$$P(x) = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x$$

v čísle DVA. Tedy: $P(2) = 214$

$(\,\mathbf{1101\,0110}\,)_2$	1	1	0	1	0	1	1	0
2	1	3	6	$2\cdot6+1$ 13				

V přemětu *„Základy informačních systémů“* budete často převádět čísla zapsaná ve dvojkové (binární) soustavě do desítkové (dekadické) soustavy a naopak.

Například: $(1101\,0110)_2 = (214)_{10}$, protože platí:

$$(1101\,0110)_2 = 1\cdot\mathbf{2^7} + 1\cdot\mathbf{2^6} + 0\cdot\mathbf{2^5} + 1\cdot\mathbf{2^4} \quad + \quad 0\cdot\mathbf{2^3} + 1\cdot\mathbf{2^2} + 1\cdot\mathbf{2^1} + 0\cdot\mathbf{2^0} =$$

$$= 1\cdot 128 + 1\cdot 64 + 0\cdot 32 + 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = 128 + 64 + 16 + 4 + 2 = (214)_{10}$$

V tomto případě vlastně hledáme (například Hornerovým schématem) funkční hodnotu mnohočlenu:

$$P(x) = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x$$

v čísle DVA. Tedy: $P(2) = 214$

$(\mathbf{1101\,0110})_2$	1	1	0	1	0	1	1	0
					$2\cdot 13+0$			
2	1	3	6	13	26			

V přemětu *„Základy informačních systémů“* budete často převádět čísla zapsaná ve dvojkové (binární) soustavě do desítkové (dekadické) soustavy a naopak.

Například: $(1101\,0110)_2 = (214)_{10}$, protože platí:

$$(1101\,0110)_2 = 1\cdot\mathbf{2^7} + 1\cdot\mathbf{2^6} + 0\cdot\mathbf{2^5} + 1\cdot\mathbf{2^4} \quad + \quad 0\cdot\mathbf{2^3} + 1\cdot\mathbf{2^2} + 1\cdot\mathbf{2^1} + 0\cdot\mathbf{2^0} =$$

$$= 1\cdot 128 + 1\cdot 64 + 0\cdot 32 + 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = 128 + 64 + 16 + 4 + 2 = (214)_{10}$$

V tomto případě vlastně hledáme (například Hornerovým schématem) funkční hodnotu mnohočlenu:

$$P(x) = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x$$

v čísle DVA. Tedy: $P(2) = 214$

$(\mathbf{1101\,0110})_2$	1	1	0	1	0	1	1	0
						$2\cdot 26 + 1$		
2	1	3	6	13	26	53		

V přemětu *„Základy informačních systémů“* budete často převádět čísla zapsaná ve dvojkové (binární) soustavě do desítkové (dekadické) soustavy a naopak.

Například: $(\,1101\,0110\,)_2 = (\,214\,)_{10}$, protože platí:

$$(\,1101\,0110\,)_2 = 1\cdot\mathbf{2^7} + 1\cdot\mathbf{2^6} + 0\cdot\mathbf{2^5} + 1\cdot\mathbf{2^4} \quad + \quad 0\cdot\mathbf{2^3} + 1\cdot\mathbf{2^2} + 1\cdot\mathbf{2^1} + 0\cdot\mathbf{2^0} =$$

$$= 1\cdot 128 + 1\cdot 64 + 0\cdot 32 + 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = 128 + 64 + 16 + 4 + 2 = (\,214\,)_{10}$$

V tomto případě vlastně hledáme (například Hornerovým schématem) funkční hodnotu mnohočlenu:

$$P(x) = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x$$

v čísle DVA. Tedy: $P(2) = 214$

$(\,\mathbf{1101\,0110}\,)_2$	1	1	0	1	0	1	1	0
							$2\cdot 53 + 1$	
2	1	3	6	13	26	53	107	

V přemětu *„Základy informačních systémů“* budete často převádět čísla zapsaná ve dvojkové (binární) soustavě do desítkové (dekadické) soustavy a naopak.

Například: $(\,1101\,0110\,)_2 = (\,214\,)_{10}$, protože platí:

$$(\,1101\,0110\,)_2 = 1\cdot\mathbf{2^7} + 1\cdot\mathbf{2^6} + 0\cdot\mathbf{2^5} + 1\cdot\mathbf{2^4} \quad + \quad 0\cdot\mathbf{2^3} + 1\cdot\mathbf{2^2} + 1\cdot\mathbf{2^1} + 0\cdot\mathbf{2^0} =$$

$$= 1\cdot 128 + 1\cdot 64 + 0\cdot 32 + 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = 128 + 64 + 16 + 4 + 2 = (\,214\,)_{10}$$

V tomto případě vlastně hledáme (například Hornerovým schématem) funkční hodnotu mnohočlenu:

$$P(x) = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x$$

v čísle DVA. Tedy: $P(2) = 214$

$(\,\mathbf{1101\,0110}\,)_2$	1	1	0	1	0	1	1	0
2	1	3	6	13	26	53	107	$2\cdot 107 + 0$ $(\,\mathbf{214}\,)_{10}$

V přemětu *„Základy informačních systémů“* budete často převádět čísla zapsaná ve dvojkové (binární) soustavě do desítkové (dekadické) soustavy a naopak.

Například: $(\,1101\,0110\,)_2 = (\,214\,)_{10}$, protože platí:

$$(\,1101\,0110\,)_2 = 1\cdot\mathbf{2^7} + 1\cdot\mathbf{2^6} + 0\cdot\mathbf{2^5} + 1\cdot\mathbf{2^4} \quad + \quad 0\cdot\mathbf{2^3} + 1\cdot\mathbf{2^2} + 1\cdot\mathbf{2^1} + 0\cdot\mathbf{2^0} =$$

$$= 1\cdot128 + 1\cdot64 + 0\cdot32 + 1\cdot16 + 0\cdot8 + 1\cdot4 + 1\cdot2 + 0\cdot1 = 128 + 64 + 16 + 4 + 2 = (\,214\,)_{10}$$

V tomto případě vlastně hledáme (například Hornerovým schématem) funkční hodnotu mnohočlenu:

$$P(x) = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x$$

v čísle DVA. Tedy: $P(2) = 214$

$(\,\mathbf{1101\,0110}\,)_2$	1	1	0	1	0	1	1	0
2	1	3	6	13	26	53	107	$(\,\mathbf{214}\,)_{10}$

Pokud nám Hornerovo schéma *„nepřirostlo k srdci“* a chtěli bychom určovat uvedenou funkční hodnotu pomocí mocnin tak, jak je uvedeno v horní části této stránky, tedy $1\cdot2^7 + 1\cdot2^6 + \ldots$, není vůbec naškodu, umět alespoň základní mocniny čísla **2** zpaměti.

A to minimálně do hodnoty ***dvě*** ***sedmou***.

mocnina	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
hodnota	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024

V podstatě všechny současné počítače pracují ve dvojkové soustavě, protože je to z konstrukčního hlediska nejvýhodnější. Mnohaciferná dvojková čísla jsou však pro člověka dlouhá a nepřehledná a tak často převádíme dvojková čísla do šestnáctkové soustavy, kde je počet cifer 4× menší ($16 = 2^4$).

Šestnáctková číselná soustava

Proto další poziční číselnou soustavou, se kterou se také setkáte v přemětu *„Základy informačních systémů“* je ***šestnáctková soustava***, která se díky jednoduchému vzájemnému převodu s dvojkovou soustavou často používá v oblasti informatiky, například pro:

- adresy v operační paměti počítače;
- MAC adresy (z anglického „Media Access Control“) jako jedinečný identifikátor síťového zařízení (někdy se též nazývá fyzická adresa);
- IP adresy v kódování IPv6 jednoznačně identifikující síťové rozhraní v počítačové síti, která používá IP (internetový protokol).

Jak již název soustavy napovídá, jejím základem (nebo-li kvocientem geometrické řady) je číslo **16.** Proto je zapotřebí mít možnost zapsat všechna přirozená čísla menší jak ***šestnáct*** jedním znakem, protože musí být představována jedinou pozicí v poziční číselné soustavě.

U jednociferných čísel je tímto znakem právě příslušná cifra a u ostatních celých čísel menších jak 16 pak dvojici cifer nahrazujeme velkým písmenem ze začátku abecedy tak, jak je ukázáno v následující tabulce. V horním řádku tabulky je číslo v šestnáctkové soustavě a ve spodním řádku jeho desítkový (dekadický) ekvivalent. A protože nemůže dojít k omylu, vynecháme označení číselné soustavy.

šestnáctková soustava	A	B	C	D	E	F	A0	B0	C0	D0	E0	F0
desítkový ekvivalent	10	11	12	13	14	15	160	176	192	208	224	240

Potom například: $(\,B3\,)_{16} = (\,B0 + 3\,)_{16} = (\,11 \cdot 16 + 3\,)_{10} = (\,176 + 3\,)_{10} = (\,179\,)_{10}$

Výpočet úroků

Podívejme se krátce na pozoruhodné Eulerovo číslo e [23] které známe jako základ „přirozených logaritmů“. Toto číslo e se dá vyjádřit jako „mezní hodnota“ [24] (limita posloupnosti) což lze pokládat za extrémní výsledek výpočtu ***úroku z úroků***.

Příklad: Částka (například tisíc korun) se má ročně zúročit 100 %.

Řešení: To by při jediném úročení na konci roku činilo 2 000 Kč.

- Jestliže se však úroky připisují pololetně (úročí se dvakrát po 50 %), úročí se od začátku července nikoliv 1 000 Kč, ale 1 500 Kč. Na konci roku tedy v bance máme 2 250 Kč.
- Jestliže se však úroky připisují čtvrtletně (úročí se čtyřikrát po 25 %), úročí se od začátku dubna 1 250 Kč, od začátku července 1 562,50 Kč a od začátku října 1 953,13 Kč. Na konci roku v bance budeme mít 2 441,41 Kč.
- Výpočet úroků z úroků lze teoreticky stále více zužovat: měsíčně, týdně, hodinově, atd. Částka vyjadřující stav našeho konta na konci roku tak bude neustále vzrůstat. Nikoli však donekonečna, nýbrž ve stále menších krocích tak, jak se budeme blížit k hranici — více než 2 718,28 Kč to v žádném případě nemůže být: *tedy našich původních tisíc korun násobených číslem* **e**.

Na kontě tedy budeme mít náš původní vklad vynásobený číslem $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, což je vlastně zadání obecného (***n.***) členu $\boldsymbol{a_n}$ nějaké posloupnosti. Číslo $\boldsymbol{n}$ určuje, kolikrát do roka banka úročí.

---

[23] Následující příklad je i s řešením převzat z: SWOBODA, H. *Moderní statistika.* Praha : Svoboda, 1977. Str. 90.

[24] $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\quad n$ je přirozené číslo

Obecně při úrokové sazbě ***i*** [%] p. a. a úročí-li banka ***n*** *krát* do roka, bude stav našeho konta na konci roku

$$a_n = \text{původní vklad} \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n .$$

A protože se v posloupnosti dané tímto vztahem obecný člen násobí mocninou, jedná se o geometrickou posloupnost, kde:

$$a_1 = \text{původní vklad} \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^1 = \text{původní vklad} \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)$$

$$q = \left(1 + \frac{i}{n}\right)$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \text{původní vklad} \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n-1} = \text{původní vklad} \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$$

Vidíme tedy, že geometrická posloupnost má využití pro výpočet úroků.

2. Bankovní produkty

Posloupnosti (zejména geometrické) se použijí pro základní výpočty složených úroků a tím se uplatní pro takové bankovní produkty, jako jsou vklady, spoření, důchody nebo úvěry. Tyto procesy postupují v „obdobích“, například každý měsíc. Požadovaný úkon (například vklad) můžeme provést na počátku nebo na konci období a pak hovoříme o *PŘEDlhůtním* nebo *POlhůtním* úkonu. Pokud dva takové procesy na sebe navazují, je lhůtnost volena tak, aby komunikovaly správně. Tato problematika ale není dále řešena.

$\Longrightarrow$ Protože se v následujících vzorcích vyskytují:

mocniny s velkým exponentem a základem blízkým jedničce;

součiny, kdy jeden z činitelů je blízký jedničce či nule;

podíly, kdy dělitel je blízký jedničce či nule;

...

Proto neuvážené i nepatrné zaokrouhlování může způsobit dost velkou odchylku ve výsledku, je lépe raději nezaokrouhlovat.

Vždyť o peníze jde až „v první řadě“.

2.1. Vklady

Popis produktu: V případě **vkladů** vloží klient jednorázově peníze do banky, kde leží po sjednanou dobu a pouze se připisují úroky. U tohoto produktu připouštíme, že banka může úročit častěji než jednou do roka.

V ... jednorázový (termínovaný) vklad
K ... stav konta (zůstatek na účtu, jistina, kapitál)
n ... počet celých let – roků uložení
i ... úroková sazba p. a. (desetin. č.: 1 % = 0,01)
m ... počet úrokovacích období v jednom roce
z ... počet úrokovacích období nad celé roky

$$K = V \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n + z}$$

2.2. Spoření

Popis produktu: Při **spoření** jdou klientovy peníze do banky v pravidelných úložkách, banka úročí jednou do roka, úroky připisuje klientovi.

S . . . stav spořícího účtu na konci spoření

i . . . úroková sazba p. a. (desetin. č.: 1 % = 0,01)

n . . . doba spoření (v celých letech – rocích)

a . . . ukládaná konstantní (stále stejná) částka

m . . . frekvence vkladů (počet) v jednom roce

$$S = \frac{a}{i} \cdot [m + 0{,}5 \cdot (m + 1) \cdot i] \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

2.3. Důchody

Popis produktu: Na počátku si klient uloží na svůj **důchodový** účet částku D_0 Kč, ze které v pravidelných intervalem m-krát ročně odebírá výplatu a Kč po dobu n let, čímž je důchodový účet zcela vybrán (anulován). Přitom klientovi z uložené částky průběžně přibývají úroky. Navíc je možné zařídit, aby začátek vyplácení byl pozdržen o k let.

D_0 . . . počáteční stav důchodového účtu
i . . . úroková sazba p. a. (desetin. č.: 1 % = 0,01)
m . . . frekvence výběrů (počet) v jednom roce
ν . . . diskont $\quad \nu = \frac{1}{1+i}$
a . . . vybíraná konstantní (stále stejná) částka
k . . . doba odkladu (v celých letech – rocích)
n . . . doba vybírání (v celých letech – rocích)

$$D_0 = \frac{a}{i} \cdot [m + 0{,}5 \cdot (m + 1) \cdot i] \cdot [1 - \nu^n] \cdot \nu^k$$

2.4. Úvěry

Popis produktu: **Úvěrem** (půjčkou, hypotékou) rozumíme poskytnutí kapitálu ve výši U_0 Kč na určenou dobu za odměnu. Uvažujme pouze případ, kdy odměna je skryta ve výši úrokové sazby a konstantní (neměnné) splátky probíhají ve stejných intervalech, ve kterých banka úročí.

U_r . . . výše úvěru po r splátkách

i . . . úroková sazba p. a. (desetin. č.: 1 % = 0,01)

n . . . počet splátek

ν . . . diskont $\qquad \nu = \frac{1}{1+i}$

a . . . konstantní (stále stejná) splátka (anuita); pouze poslední splátka může být menší!

$$a = \frac{U_0 \cdot i}{1 - \nu^n}$$

$$U_r = U_0 \cdot (1+i)^r + \frac{a}{i} \cdot [1 - (1+i)^r]$$

2.5. Příklady

Příklad 1. **Vložím** na konto 30 000 Kč u banky, která úročí každý měsíc se sazbou 1,6 % p. a. Jaký bude stav konta za čtyři a půl roku?

Řešení 1. Nejprve podle popisů produktů určíme, že se jedná o **vklad**. Pro tento produkt jsme použili následující označení:

V . . . jednorázový (termínovaný) vklad
K . . . stav konta (zůstatek na účtu, jistina, kapitál)
n . . . počet celých let – roků uložení
i . . . úroková sazba p. a. (desetin. č.: 1 % = 0,01)
m . . . počet úrokovacích období v jednom roce
z . . . počet úrokovacích období nad celé roky

V našem případě (rozložíme-li zadání):

Vložím na konto 30 000 Kč ... $\Longrightarrow V = 30\,000$
... u banky, která úročí každý měsíc ... $\Longrightarrow m = 12$
... se sazbou 1,6 % p. a. ... $\Longrightarrow i = 0{,}016$
... Jaký bude stav konta ... $\Longrightarrow K = ?$
... za čtyři ... $\Longrightarrow n = 4$
... a půl roku? $\Longrightarrow z = 6 \left(\Leftarrow \frac{m}{2}\right)$

A po dosazení

$$K = V \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n + z} = 30\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}016}{12}\right)^{12 \cdot 4 + 6} = 30\,000 \cdot (1 + 0{,}001\,333\,333)^{48+6} =$$

$$= 30\,000 \cdot (1{,}001\,333\,333)^{54} = 30\,000 \cdot 1{,}074\,603\,788 = 32\,238{,}113\,64$$

Za čtyři a půl roku budu mít na kontě 32 238,11 Kč.

Příklad 2. Je pravdou, že při **pravidelném** měsíčním **vkladu** 1 100 Kč budu mít po šesti rocích na kontě alespoň 85 000 Kč, když banka garantuje úrokovou sazbu 2,3 % p. a.?

Řešení 2. Nejprve podle popisů produktů určíme, že se jedná o **spoření.** Pro tento produkt jsme použili následující označení:

S . . . stav spořícího účtu na konci spoření
i . . . úroková sazba p. a. (desetin. č.: 1 % = 0,01)
n . . . doba spoření (v celých letech – rocích)
a . . . ukládaná konstantní (stále stejná) částka
m . . . frekvence vkladů (počet) v jednom roce

V našem případě (rozložíme-li zadání):

Je pravdou, že při pravidelném měsíčním ... $\Longrightarrow m = 12$
... vkladu 1 100 Kč ... $\Longrightarrow a = 1\,100$
... budu mít po šesti rocích ... $\Longrightarrow n = 6$
... na kontě alespoň 85 000 Kč ... $\Longrightarrow S = 85\,000$ a víc
... když banka garantuje úrokovou sazbu 2,3 % p. a.? $\Longrightarrow i = 0{,}023$

A po dosazení

$$S = \frac{a}{i}\cdot[m+0{,}5\cdot(m+1)\cdot i]\cdot[(1+i)^n-1] = \frac{1\,100}{0{,}023}\cdot[12+0{,}5\cdot(12+1)\cdot 0{,}023]\cdot[(1+0{,}023)^6-1] =$$

$$= 47\,826{,}086\,96\cdot[12+0{,}5\cdot(13)\cdot 0{,}023]\cdot[(1{,}023)^6-1] =$$

$$= 47\,826{,}086\,96\cdot[12+0{,}149\,5]\cdot[1{,}146\,182\,576-1] =$$

$$= 47\,826{,}086\,96\cdot[12{,}149\,5]\cdot[0{,}146\,182\,576] = 84\,941{,}292\,52$$

Není to pravda, protože na kontě budu mít jen 84 941 Kč.

Příklad 3. Je pravdou, že když nyní vložím jednorázově částku 100 000 Kč, budu mít za 16 roků **pravidelný příspěvek k důchodu** (tj. měsíčně) 1 500 Kč po dobu 9 let, když banka garantuje úrokovou sazbu 2,4 % p. a.?

Řešení 3. Nejprve podle popisů produktů určíme, že se jedná o **důchod**. Pro tento produkt jsme použili následující označení:

D_0 . . . počáteční stav důchodového účtu
i . . . úroková sazba p. a. (desetin. č.: 1 % = 0,01)
m . . . frekvence výběrů (počet) v jednom roce
v . . . diskont $\quad v = \frac{1}{1+i}$
a . . . vybíraná konstantní (stále stejná) částka
k . . . doba odkladu (v celých letech – rocích)
n . . . doba vybírání (v celých letech – rocích)

V našem případě:

… vložím jednorázově částku 100 000 Kč … $\Longrightarrow D_0' = 100\,000$
… budu mít za 16 roků … $\Longrightarrow k = 16$
… pravidelný příspěvek k důchodu (tj. měsíčně) … $\Longrightarrow m = 12$
… 1 500 Kč … $\Longrightarrow a = 1\,500$
… po dobu 9 let … $\Longrightarrow n = 9$
… když banka garantuje úrokovou sazbu 2,4 % p. a.? $\Longrightarrow i = 0{,}024$

Po dosazení do vzorce zjistíme potřebnou částku D_0 a jestli námi vložená částka D_0' pokryje požadavky. Nejdříve ovšem musíme určit hodnotu diskontu $v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+0{,}024} = 0{,}976\,562\,5$. Potom

$$D_0 = \frac{a}{i} \cdot [m + 0{,}5 \cdot (m+1) \cdot i] \cdot [1 - v^n] \cdot v^k =$$

$$= \frac{1\,500}{0{,}024} \cdot [12 + 0{,}5 \cdot (12+1) \cdot 0{,}024] \cdot [1 - 0{,}976\,562\,5^9] \cdot 0{,}976\,562\,5^{16} =$$

$$= 62\,500 \cdot [12 + 0{,}5 \cdot (13) \cdot 0{,}024] \cdot [1 - 0{,}807\,793\,566\,9] \cdot 0{,}684\,227\,765\,8 = 62\,500 \cdot [12 + 0{,}156] \cdot [0{,}192\,206\,433\,1] \cdot 0{,}684\,227\,765\,8 =$$

$$= 62\,500 \cdot [12{,}156] \cdot [0{,}192\,206\,433\,1] \cdot 0{,}684\,227\,765\,8 = 99\,916{,}985\,26$$

Když $D_0 = 99\,916{,}985\,26$, pak $D_0' - D_0 = 100\,000 - 99\,916{,}985 \doteq 83$ a proto řekneme:

Je to pravda, protože na kontě mi zůstane ještě 83 Kč.

Příklad 4. Stačí mi 3 roční splátky po 11 000 Kč na splacení celého **úvěru** ve výši 30 000 Kč u banky, která úročí se sazbou 5 % p. a.?

Řešení 4. Nejprve podle popisů produktů určíme, že se jedná o **úvěr**. Pro tento produkt jsme použili následující označení:

U_r . . . výše úvěru po r splátkách $\qquad$ i . . . úroková sazba p. a. (desetin. č.: 1 % = 0,01)

n . . . počet splátek $\qquad$ ν . . . diskont $\qquad \nu = \frac{1}{1+i}$

a . . . konstantní (stále stejná) splátka (anuita); pouze poslední splátka může být v *„reálu“* menší!

V našem případě

(rozložíme-li zadání):

Stačí mi 3 roční splátky ... $\Longrightarrow$ $n = 3$

... po 11 000 Kč ... $\Longrightarrow$ $a = 11\,000$

... na splacení celého úvěru ve výši 30 000 Kč ... $\Longrightarrow$ $U_0 = 30\,000$

... u banky, která úročí se sazbou 5 % p. a.? $\Longrightarrow$ $i = 0{,}05$

A po dosazení

$$U_r = U_0 \cdot (1+i)^r + \frac{a}{i} \cdot [1-(1+i)^r] \quad \Longrightarrow \quad U_3 = 30\,000 \cdot (1+0,05)^3 + \frac{11\,000}{0,05} \cdot [1-(1+0,05)^3] =$$

$$= 30\,000 \cdot (1,05)^3 + 220\,000 \cdot [1-(1,05)^3] = 30\,000 \cdot 1{,}157\,625 + 220\,000 \cdot [1-1{,}157\,625] =$$

$$= 34\,728{,}75 + 220\,000 \cdot [-0{,}157\,625] = 34\,728{,}75 - 34\,677{,}5 = 51{,}25$$

Pro splacení celého úvěru mi bude chybět 51 Kč.

Pokud bychom chtěli sestavit splátkový kalendář, který popisuje stav úvěrového účtu po jednotlivých splátkách, je nejlepší vše zapisovat do tabulky.

Označení měny vynecháme a výpočty budeme zaokrouhlovat na haléře (setiny koruny).

	anuita	úrok 5 %	úmor	stav úvěru **30 000,00**
stav po 1. splátce	11 000,00	1 500,00	9 500,00	20 500,00
stav po 2. splátce	11 000,00	1 025,00	9 975,00	10 525,00
stav po 3. splátce	11 000,00	526,25	10 473,75	51,25
	$\sum$	3 051,25		

Při takto nastavených podmínkách úvěru zaplatíme na úrocích 3 051,25 Kč a ještě úvěr nebude zcela splacený.

Použitá literatura

[1] DEMLOVÁ, M., NAGY, J. *Algebra.* Praha : SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha. 1982. 192 stran.

[2] HORSKÝ, Z. *Vektorové prostory.* Praha : SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha. 1980. 88 stran.

[3] CHUDÝ, J. *Determinanty a matice.* Praha : SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha. 1974, vydání druhé, doplněné. 216 stran.

[4] KOVAŘÍK, P. *Matematika I.* Brno : Vysoká škola Karla Engliše, a. s., Brno. 2010, 63 stran. ISBN 978–80–86710–25–9

[5] KUBEN, J., ŠARMANOVÁ, P. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Ostrava : Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2006, 351 s. ISBN 80–248–1192–8. [on line] ⟨http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/dp/dp_obr.pdf⟩

[6] PŘIKRYL, P. *Numerické metody matematické analýzy.* Praha : Státní nakladatelství technické literatury, Praha. 1985, 192 stran.

[7] RYCHNOVSKÝ, R. *Úvod do vyšší matematiky.* Praha : Státní zemědělské nakladatelství, Praha. 1968, vydání třetí, rozšířené. 518 stran.

[8] VETCHÝ, V., ŠIKULOVÁ, B. *Lineární algebra.* Brno : Vojenská akademie v Brně [skripta]. 1988. 93 stran