FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Operace s maticemi

Studijní materiály

Pro listování dokumentem NEpoužívejte kolečko myši
nebo zvolte možnost *Full Screen*.

Brno 2014

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Operace s maticemi

Podobně jako s čísly zavádíme i s maticemi početní operace s příslušnými pravidly.

Rovnost matic: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ Dvě matice $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})$, $\boldsymbol{B} = (b_{i,j})$ téhož typu (m, n) jsou si rovny (píšeme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$), právě když platí: $a_{i,j} = b_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, nebo-li $a_{i,j} = b_{i,j}$; $\forall\, i, j$.

Symbol $\forall i, j$ čteme **pro každé** i, j.

Z této definice a ze známých vlastností reálných čísel vyplývají tyto vlastnosti [1] rovnosti matic:

1. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ reflexivnost
2. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ symetrie
3. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$ tranzitivnost

Každá rovnost mezi maticemi je stručným zápisem právě jedné soustavy rovností mezi příslušnými prvky (čísly). Například:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ t \\ 3-4t \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1+t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= 3-4t \end{aligned}$$

[1] *Relace*, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní, se nazývá **ekvivalence.**

Součin matice s číslem: $k \, . \, A$ je matice stejného typu jako násobená matice, jejíž všechny prvky jsou tímto číslem násobeny.

Například

$$(-2)\cdot\begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot(-3) & (-2)\cdot 6 \\ (-2)\cdot 2 & (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -12 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Součet a rozdíl matic: $A + B$, $A - B$. **Součtem matic** $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})$, $\boldsymbol{B} = (b_{i,j})$ téhož typu (m, n) rozumíme matici $\boldsymbol{C} = (c_{i,j})$ stejného typu, jejíž prvky jsou: $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$, $\forall i, j$ (píšeme: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$).

Analogicky **rozdílem matic** $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ téhož typu rozumíme matici $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$, pro kterou platí: $c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}$, $\forall i, j$. Jinak řečeno: rozdíl dvou matic určíme jako součet těchto matic, z nichž druhá je vynásobena číslem **−1**.

Například

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 5 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

Z uvedených definic a ze známých vlastností reálných čísel vyplývají následující vlastnosti [2] pro libovolné matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ téhož typu a libovolná čísla k, k_1, k_2 :

- pro sčítání matic (kde $\boldsymbol{0}$ je nulová matice stejného typu jako matice $\boldsymbol{A}$)

1. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ komutativní zákon
2. $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$ asociativní zákon pro součet matic
3. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$
4. $\forall \boldsymbol{A}\ \exists(-\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = (-\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$

Vztah č.4 čteme: Ke každé ($\forall$) matici $\boldsymbol{A}$ existuje ($\exists$) matice, kterou nazýváme maticí opačnou k matici $\boldsymbol{A}$ a označujeme $-\boldsymbol{A}$, pro kterou platí (:), že jejich součet je nulová matice ($\boldsymbol{0}$).

- pro násobení matic číslem:

5. $1 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$
6. $k_1 \cdot (k_2 \cdot \boldsymbol{A}) = (k_1 k_2) \cdot \boldsymbol{A}$ asociativní zákon pro násobení matice číslem
7. $(k_1 + k_2) \cdot \boldsymbol{A} = k_1 \cdot \boldsymbol{A} + k_2 \cdot \boldsymbol{A}$ distributivní zákony pro
8. $k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k \cdot \boldsymbol{A} + k \cdot \boldsymbol{B}$ násobení matice číslem

[2] Struktura vyhovující požadavkům 1.– 4. se nazývá **komutativní grupa vzhledem ke sčítání.**
Struktura vyhovující všem požadavkům 1.– 8. se nazývá **vektorový prostor.**

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, kterou požadujeme zapsat symbolicky, kde $\boldsymbol{A}$ je matice koeficientů, $\boldsymbol{X}$ je (sloupcová) matice neznámých a $\boldsymbol{B}$ matice pravých stran.

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, kterou požadujeme zapsat symbolicky, kde $\boldsymbol{A}$ je matice koeficientů, $\boldsymbol{X}$ je (sloupcová) matice neznámých a $\boldsymbol{B}$ matice pravých stran.

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Nyní definujme násobení matic (matice koeficientů ***krát*** matice neznámých) tak, abychom obdrželi levé strany rovnic zadaného systému.

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, kterou požadujeme zapsat symbolicky, kde $\boldsymbol{A}$ je matice koeficientů, $\boldsymbol{X}$ je (sloupcová) matice neznámých a $\boldsymbol{B}$ matice pravých stran.

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{matrix}$$

Nyní definujme násobení matic (matice koeficientů ***krát*** matice neznámých) tak, abychom obdrželi levé strany rovnic zadaného systému.

Násobení matic: $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ **.** Součinem matice $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_m^n$ a matice $\boldsymbol{B} = (b_{i,j})_n^p$ **v daném pořadí** je matice $\boldsymbol{C} = (c_{i,j})_m^p$, pro jejíž prvky platí: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$ pro každé $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, p$.

Definice říká, že chceme-li určit prvek součinu dvou matic $\boldsymbol{c}_{i,j}$, musíme ***každý*** člen ***i. řádku*** *první* matice (vlevo – levý index) ***vynásobit*** členem ***j. sloupce*** *druhé* matice (vpravo – pravý index) se ***stejným pořadím*** (první×první + druhý×druhý + …+ poslední×poslední) a tyto ***součiny sečíst***.

Příklad násobení dvou matic: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 4x + 5y \end{bmatrix}$

Pomůžeme si například takto zapsaným postupem:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} x + 2y \\ 4x + 5y \end{bmatrix} \end{array}$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} =$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} =$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ & & & \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & \\ -1 & \\ 2 & \\ -2 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (3)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(-2)\cdot(2)+(4)\cdot(-2) & \\ & \end{bmatrix}$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ & & & \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} & 3 \\ & 2 \\ & -1 \\ & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (3)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(-2)\cdot(2)+(4)\cdot(-2) & (3)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(-2)\cdot(-1)+(4)\cdot(-2) \\ & \end{bmatrix}$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} & & & \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & \\ -1 & \\ 2 & \\ -2 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 3 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (3)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(-2)\cdot(2)+(4)\cdot(-2) & (3)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(-2)\cdot(-1)+(4)\cdot(-2) \\ (2)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(0)\cdot(2)+(-1)\cdot(-2) & \end{bmatrix}$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} & & & \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} & 3 \\ & 2 \\ & -1 \\ & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (3)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(-2)\cdot(2)+(4)\cdot(-2) & (3)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(-2)\cdot(-1)+(4)\cdot(-2) \\ (2)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(0)\cdot(2)+(-1)\cdot(-2) & (2)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(0)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) \end{bmatrix}$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (3)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(-2)\cdot(2)+(4)\cdot(-2) & (3)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(-2)\cdot(-1)+(4)\cdot(-2) \\ (2)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(0)\cdot(2)+(-1)\cdot(-2) & (2)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(0)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) \end{bmatrix}$$

Jsou dány matice $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (3)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(-2)\cdot(2)+(4)\cdot(-2) & (3)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(-2)\cdot(-1)+(4)\cdot(-2) \\ (2)\cdot(1)+(1)\cdot(-1)+(0)\cdot(2)+(-1)\cdot(-2) & (2)\cdot(3)+(1)\cdot(2)+(0)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -6 \\ 4 & 1 & -4 & 9 \\ -10 & -4 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1)\cdot(3)+(3)\cdot(2) & (1)\cdot(1)+(3)\cdot(1) & (1)\cdot(-2)+(3)\cdot(0) & (1)\cdot(4)+(3)\cdot(-1) \\ (-1)\cdot(3)+(2)\cdot(2) & (-1)\cdot(1)+(2)\cdot(1) & (-1)\cdot(-2)+(2)\cdot(0) & (-1)\cdot(4)+(2)\cdot(-1) \\ (2)\cdot(3)+(-1)\cdot(2) & (2)\cdot(1)+(-1)\cdot(1) & (2)\cdot(-2)+(-1)\cdot(0) & (2)\cdot(4)+(-1)\cdot(-1) \\ (-2)\cdot(3)+(-2)\cdot(2) & (-2)\cdot(1)+(-2)\cdot(1) & (-2)\cdot(-2)+(-2)\cdot(0) & (-2)\cdot(4)+(-2)\cdot(-1) \end{bmatrix}$$

1. Již z uvedeného příkladu vidíme, že pro násobení matic obecně neplatí komutativní zákon (o záměně činitelů).

   Matice $\boldsymbol{A}$ je typu $(2,4)$, matice $\boldsymbol{B}$ je typu $(4,2)$. Proto:

   - první vypočítaný součin $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ je typu $(2,\boxed{4})(\boxed{4},2) = (2,2)$,
   - kdežto druhý vypočítaný součin $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$ je typu $(4,\boxed{2})(\boxed{2},4) = (4,4)$.

2. Je-li například $\boldsymbol{A}$ typu $(2,4)$ a matice $\boldsymbol{B}$ je typu $(4,5)$, pak součin $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ existuje a je to matice typu $(2,\boxed{4})(\boxed{4},5) = (2,5)$, kdežto součin $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$ vůbec není definován (neexistuje).

3. **Násobení matic tedy nemá naprosto stejné vlastnosti, jako násobení čísel.**

   Další odlišnosti si ukážeme ve cvičení k této kapitole.

4. Jsou-li matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{0}$ (nulová) a $\boldsymbol{E}$ (jednotková) ***čtvercové matice stejného řádu***,

   platí:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A},$$

   jak snadno zjistíme vynásobením.

Vlastnosti násobení matic

Násobení matic dává poněkud odlišné výsledky, než které dostáváme při násobení čísel, jak bylo naznačeno v předchozí poznámce.
Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ jsou matice a $\boldsymbol{k}$ číslo. Potom:

1. Obecně **neplatí komutativní zákon** o záměně činitelů. Tedy *nelze předpokládat* (viz první a druhý bod předchozí poznámky), že vždy platí $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$. Toto funguje pouze u čtvercových matic. A navíc pouze u některých. Tyto pak nazveme **zaměnitelné**.

Spíše platí: $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$

2. Z rovnosti $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ nemůžeme usuzovat, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ nebo $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$. Pokud součin dvou matic je roven nulové matici, nutně z toho neplyne, že alespoň jedna z nich je také nulová, jak je ukázáno v příkladech 2. a) a 6.

3. Z rovnosti $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ nemůžeme usuzovat, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ nebo $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, jak je ukázáno v příkladu 2. b) i když řešením kvadratické rovnice $x^2 = x$ je právě *jednička* a *nula*.

4. Při násobení matic nelze krátit, jak je ukázáno v příkladu 4.

5. $(\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}) \bullet \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \bullet (\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C})$ asociativní zákon (o sdružování činitelů).

6. $k \cdot (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}) = (k \cdot \boldsymbol{A}) \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \bullet (k \cdot \boldsymbol{B})$ asociativní zákon pro násobení součinu matic číslem.

7. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \bullet \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C}$ distributivní zákon, kdy závorka je vlevo.

8. $\boldsymbol{A} \bullet (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{C}$ distributivní zákon, kdy závorka je vpravo.

Cvičení

1. Jsou dány matice $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

   Vypočtěte $2\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ a $-\frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{A}+3\cdot\boldsymbol{B}$.

   Řešení:

$$2\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=2\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -4 & 0 & 12 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ -4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{A}+3\cdot\boldsymbol{B}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -12 & 6 & 18 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -13 & \frac{11}{2} & 16 \\ 1 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

2. Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ Určete $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 18 \\ 27 & 19 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 18 \\ 27 & 19 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A} \quad \Longrightarrow$ Matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou zaměnitelné.

3. Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Vypočtěte: a) $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$
b) $\boldsymbol{A}^2$

Řešení a)

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

Z rovnosti $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ nevyplývá, že by alespoň jedna z matic $\boldsymbol{A}$ nebo $\boldsymbol{B}$ musela být nulová. Nebo jinak: součinem dvou nenulových matic může být nulová matice.

Řešení b)

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

Z rovnosti $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$) nevyplývá, že by matice $\boldsymbol{A}$ musela být jednotková nebo nulová.

4. Jsou dány matice $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Vypočtěte $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{C}$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Z rovnosti $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{C}$ nelze činit závěr, že $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. **Při násobení matic proto nemůžeme krátit.**

5. Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Vypočtěte $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}$.

Řešení: $$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3 + 1.2 + 1.1 & 2.1 + 1.1 + 1.0 \\ 3.3 + 0.2 + 1.1 & 3.1 + 0.1 + 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Jsou dány matice $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ Vypočtěte $\boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{D}$.

Řešení: $$\boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Je dána matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ Vypočtěte $\boldsymbol{A}^5$.

Řešení: $\boldsymbol{A}^5 = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A}) \bullet \{(\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A}) \bullet \boldsymbol{A}\} =$

$$= \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\right) \bullet \left\{\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\right) \bullet \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\right) \bullet \left\{\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

8. Jsou dány matice $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ Vypočtěte $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{B}$.

Řešení: $\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$