FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Matematika 1

Mnohočleny a racionální (lomená) funkce

Studijní materiály

Pro listování dokumentem NEpoužívejte kolečko myši nebo zvolte možnost *Full Screen*.

Brno 2016

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Obsah

1. Mnohočleny — polynomy

Mějme nezáporné celé číslo n ($n \in \mathbb{N}_0$) a reálná čísla $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ a nenulové reálné číslo $a_n \neq 0$. Funkci

$$P_n : y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 , \qquad x \in \mathbb{R} ,$$

nazýváme (reálný) **mnohočlen** (polynom).
Čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ nazýváme **koeficienty mnohočlenu** a
číslo $\boldsymbol{n}$ nazýváme **stupeň mnohočlenu** (píšeme: $\operatorname{st} P = n$).

Stupeň mnohočlenu je tedy nejvyšší mocnina neznámé (proměnné) s nenulovým koeficientem.

Poznámka: Mezi mnohočleny počítáme i tzv. ***nulový mnohočlen*** $P : y = 0$, který nemá žádné nenulové koeficienty. Nulový mnohočlen nemá přiřazen žádný stupeň.
Je nutné důsledně rozlišovat mezi

mnohočlenem stupně nula — což je vlastně nenulová konstantní funkce, jejímž grafem je rovnoběžka s osou ***x*** různá od této osy

a

nulovým mnohočlenem — což je nulová konstantní funkce, jejímž grafem je právě osa ***x***.

Například:

Mnohočlen $R : y = x^3$ má stupeň 3. Přitom $a_3 = 1$, $a_2 = a_1 = a_0 = 0$, protože platí
$y = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0 = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0$

Mnohočlen $P : y = 3\,x^2 - 4\,x + 2$ má stupeň 2. Přitom $a_2 = 3$, $a_1 = -4$, $a_0 = 2$.

Mnohočlen $S : y = 2\,x - 3$ má stupeň 1. Přitom $a_1 = 2$, $a_0 = -3$.

Mnohočlen $T : y = 3$ má stupeň 0. Přitom $a_0 = 3$.

Mnohočleny jsou funkce. Lze je tedy:

sčítat — sečteme koeficienty u stejných mocnin,

odčítat — odečteme koeficienty u stejných mocnin a

násobit — násobíme každý člen jednoho mnohočlenu s každým členem druhého mnohočlenu a sloučíme členy se stejnými mocninami

a ***výsledkem je opět mnohočlen***.

Dělením dvou mnohočlenů nemusíme dostat mnohočlen. Výsledkem dělení dvou mnohočlenů je většinou obecnější funkce, kterou nazýváme *racionální (lomená) funkce*.

Rozklad mnohočlenu na součin

Smyslem rozkladu je napsat daný mnohočlen jako součin co nejjednodušších mnohočlenů. V reálném oboru jsou to činitelé (to co se násobí) v rozkladu

- buď ***lineární*** — tvaru: $x - \alpha$ (= kořenový činitel, pak α je kořenem daného mnohočlenu)
- nebo ***kvadratické*** — tvaru: $x^2 + p\,x + q$, kde $p^2 - 4q < 0$.

Pro zopakování uvedeme následující vzorce (známé ze střední školy), které využíváme při rozkladu mnohočlenu na součin kořenových činitelů.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a-b)^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

$$(a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \qquad a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$$

1.1. Nalezení kořenů mnohočlenu

Nalézt (reálné) kořeny mnohočlenu $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ s reálnými koeficienty $\boldsymbol{a}_i$, kde $n \geq 1$, znamená vyřešit *algebraickou rovnici* $P(x) = 0$, tedy

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Hledání kořenů mnohočlenu převádíme na hledání *kořenů rovnice* (1) $\Longrightarrow$ řešíme rovnici. Všimněme si, jak lze pro malá $\boldsymbol{n}$ algebraické rovnice řešit.

1.1.1. Lineární rovnice

Pro ***n* = 1** jde o lineární rovnici $a\,x + b = 0$, $a \neq 0$, jejíž jediný kořen je

$$x_1 = -\frac{b}{a}\ .$$

1.1.2. Kvadratické rovnice

Pro ***n* = 2** jde o kvadratickou rovnici $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, $a \neq 0$, pro jejíž kořeny se na střední škole odvozuje (doplněním na čtverec) vzorec

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ .$$

O povaze kořenů rozhoduje ***diskriminant*** *kvadratické rovnice* $D = b^2 - 4ac$. Je-li $D > 0$, má rovnice dva reálné různé kořeny, je-li $D = 0$, má jeden dvojnásobný reálný kořen, a je-li $D < 0$, má dvojici komplexně sdružených kořenů.

1.1.3. Rovnice třetího (kubické) a čtvrtého stupně

Pro ***n* = 3** jde o kubickou rovnici $a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$, $a \neq 0$, pro jejíž kořeny sice existují tzv. *Cardanovy vzorce* které však vyjadřují reálné kořeny pomocí třetích odmocnin z komplexních čísel.

Pro rovnice čtvrtého stupně existují také obecné vztahy k výpočtu kořenů (stejně jako Cardanovy vzorce byly nalezeny v první polovině 16. století). Jejich řešení je však ještě obtížnější než řešení rovnic třetího stupně.

1.1.4. Rovnice pátého stupně a vyšších stupňů

Norský matematik Abel dokázal, že pro kořeny rovnic pátého stupně (a tudíž ani vyšších stupňů) neexistuje univerzální vzorec. To však v žádném případě neznamená, že rovnice vyšších stupňů nemají kořeny. Tento Abelův výsledek pouze říká, že tyto kořeny nelze vyjádřit jistým vzorcem přesně popsaného typu.

Na počátku 19. století Gauss poprvé přesně dokázal větu, která je vzhledem k velkému významu pro tehdejší matematiku nazývána ***základní větou algebry***. Tato věta říká: *Libovolný polynom (s reálnými nebo komplexními koeficienty) stupně alespoň jedna má v množině komplexních čísel alespoň jeden kořen.*

Důsledky základní věty algebry:

1. Každý polynom stupně n má v komplexním oboru právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost.
2. Má-li mnohočlen s reálnými koeficienty komplexní kořen, potom má i kořen komplexně sdružený, přičemž jejich násobnosti jsou stejné.

Poznámka: Z předchozího textu je jasné, že neexistuje žádný univerzální postup, kterým bychom byli schopni zjistit všechny kořeny daného polynomu. Existuje sice celá řada numerických metod, kterými lze kořeny přibližně vyjádřit, ale to není náplní tohoto kurzu.

1.1.5. Mnohočleny s celočíselnými koeficienty

Mějme mnohočlen R s celočíselnými koeficienty:

$$R_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{n}$ je přirozené číslo ($1 \leq n \in \mathbb{N}$), $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ jsou **celá** čísla, kdy $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$.

Pokud je $\alpha = \dfrac{p}{q}$ (kde p, q jsou nesoudělná celá čísla) ***kořenem*** mnohočlenu R, pak $\boldsymbol{p}$ dělí beze zbytku koeficient a_0 (píšeme $p \mid a_0$) a $\boldsymbol{q}$ dělí beze zbytku koeficient a_n ($q \mid a_n$).

Při hledání racionálních kořenů mnohočlenu $R_n(x)$ (2) ***postupujeme*** tak, že určíme k-n-k *„kandidáty na kořen“*. Tedy:

1. Vypíšeme všechna možná racionální čísla $\text{k-n-k} = \dfrac{p}{q}$ (p, q nesoudělná $\Rightarrow$ pokud lze, tak krátit) splňující podmínky $p \mid a_0$ (p dělí bezezbytku koeficient a_0) , $q \mid a_n$ (q dělí bezezbytku a_n)

2. Dosazením každého „kandidáta“ do mnohočlenu ověříme, zda tento je kořenem: $R_n(\text{k-n-k}) \overset{?}{=} 0$

Pokud mezi takto určenými „kandidáty“ kořen není, pak daný mnohočlen vůbec racionální kořen nemá.

Poznámka: Uvědomte si, že předchozí postup lze použít i pro mnohočleny s racionálními koeficienty. Stačí totiž vytknout společný jmenovatel všech koeficientů $a_0, \ldots, a_n$.

Příklad: Najděte (racionální) kořeny mnohočlenu $P_3(x) = 3\,x^3 - 5\,x^2 + 8\,x - 4$.

Řešení: Koeficienty mnohočlenu jsou celočíselné, stejně jako v případě (2), proto se pokusíme najít kořen ve tvaru: $\dfrac{p \mid -4}{q \mid 3}$. Kandidáty na kořeny jsou následující čísla: k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\,2\,;\,4}{1\,;\,3}$,

tedy $\pm 1\,, \pm 2\,, \pm 4\,, \pm\frac{1}{3}\,, \pm\frac{2}{3}\,, \pm\frac{4}{3}$

Zbývá ověřit, které z nich je skutečně kořenem. Podle důsledků základní věty algebry má daný mnohočlen právě tři kořeny v komplexním oboru, tedy z našich kandidátů mohou vyhovovat nejvýše tři čísla (přesněji: buď jedno, nebo tři). Ověření provedeme dosazením, přičemž pro kořen mnohočlenu platí: ***P*(kořen) = 0**.

$P(1) = 2,\quad P(-1) = -20,\quad P(2) = 16,\quad P(-2) = -64,\quad P(4) = 140,\quad P(-4) = -308,$

$P(\frac{1}{3}) \doteq 1{,}778,\quad P(-\frac{1}{3}) \doteq -7{,}333,\quad P(\frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}$ je kořen.

Tady můžeme dosazování ukončit, protože jsme našli jeden kořen a každý ***mnohočlen lze vyjádřit jako součin svých kořenových činitelů***. Proto provedeme následující dělení

$$
\begin{array}{lllll}
(3\,x^3 & -\,5\,x^2 & +\,8\,x & -\,4) : (x - \frac{2}{3}) = (3\,x^2 - 3\,x + 6) \\
\quad 0 & -\,3\,x^2 & +\,8\,x & \\
 & \quad 0 & +\,6\,x & -\,4 \\
 & & \quad 0 & \quad 0
\end{array}
$$

a po rozkladu: $3\,x^3 - 5\,x^2 + 8\,x - 4 = (x - \frac{2}{3}) \cdot (3x^2 - 3x + 6)$ nám zbývá najít kořeny druhé závorky, což je mnohočlen druhého stupně. Takže vlastně řešíme kvadratickou rovnici $3\,x^2 - 3\,x + 6 = 0$, která má komplexně sdružené kořeny.

Zadaný mnohočlen $P_3(x) = 3\,x^3 - 5\,x^2 + 8\,x - 4$ má jediný reálný kořen $x_1 = \frac{2}{3}$.

Výpočet funkčních hodnot mnohočlenu $P_3(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ můžeme zapsat následujícím způsobem:

$$3x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = \{3x^3 - 5x^2 + 8x\} - 4 = x\{3x^2 - 5x + 8\} - 4 = x\{[3x^2 - 5x] + 8\} - 4 =$$

$$= x\{x[3x - 5] + 8\} - 4 = x\{x[x(3) - 5] + 8\} - 4$$

Tedy

$$P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = x\{x[x(3) - 5] + 8\} - 4$$

a například

$$P(2) = 2 \cdot \{2 \cdot [2 \cdot (3) - 5] + 8\} - 4$$

což můžeme zapsat do následující tabulky, která se nazývá Hornerovo schéma.

HS	3	-5	8	-4
		$2 \cdot (3) - 5$	$2 \cdot [1] + 8$	$2 \cdot \{10\} - 4$
2	(3)	[1]	{10}	16
$\frac{2}{3}$	3	-3	6	0

1.2. Hornerovo schéma

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

$$\frac{p \mid 6}{q \mid 1}$$

Koeficienty mnohočlenu jsou celočíselné, stejně jako v případě (2). Proto vyzkoušíme po řadě ***všechny dělitele*** čísla **6** (k-n-k $= \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$), jestli nejsou kořenem.

Ověření, zda konkrétní kandidát je kořenem, budeme zapisovat takto.

- Do hlavičky schématu napíšeme postupně koeficienty u ***všech*** mocnin neznámé, seřazené podle mocnin sestupně (od koeficientu u nejvyšší mocniny po absolutní člen). ***Žádný koeficient nesmíme vynechat.*** Pokud některá mocnina v mnohočlenu není obsažena, píšeme na patřičné místo schématu nulu.

- Do prvního sloupce vlevo budeme postupně vkládat jednotlivé (k-n-k) kandidáty na kořeny.

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	1	-1	-7	1	6
k-n-k	1				

Doplňování schématu: číslo uvnitř schématu (**1**) ***vynásobíme záhlavím řádku*** (**k-n-k**) a k součinu ***přičteme přičteme záhlaví dalšího sloupce*** (-1). ***Výsledek*** (k-n-k) $\cdot$ (1) $+$ (-1) napíšeme v daném řádku do dalšího (volného) sloupce, místo červeného obdélníku.

A s číslem uvnitř schématu (výsledkem) provedeme tutéž operaci. Vynásobíme záhlavím řádku ...

... jak je ukázáno na následujících stranách.

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	1	-1	-7	1	6
	1				

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
		$1 \cdot (1) + (-1)$			
1	1				

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
		$1 \cdot (1) + (-1)$			
1	1	0			

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
			$1 \cdot (0) + (-7)$		
1	1	0			

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
			$1 \cdot (0) + (-7)$		
1	1	0	-7		

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	$1 \cdot (-7) + (1)$	

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
				$1 \cdot (-7) + (1)$	
1	1	0	-7	-6	

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
					$1 \cdot (-6) + (6)$
1	1	0	-7	-6	

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	−1	−7	1	6
					$1 \cdot (-6) + (6)$
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	0	-7	-6	0	$P(1) = 0$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6	Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6
1	1	0	-7	-6	0	$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6
	1			

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	−7	−6
1	1			

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6
1	1	1		

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6
1	1	1	-6	

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme ±1; ±2; ±3; ±6

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12

Zkoušíme ±1; ±2; ±3; ±6

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6
1	1	1	-6	-12
	1			

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12
−1	1			

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12
−1	1	−1	−6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen

$\Rightarrow x_2 = -1$ je (druhý) *kořen*

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12
−1	1	−1	−6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen

$\Rightarrow x_2 = -1$ je (druhý) *kořen*

HS	1	−1	−6
	1		

Zkoušíme -1; ± 2; ± 3; ± 6

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	-1	-7	1	6
1	1	0	-7	-6	0

Zkoušíme ±1; ±2; ±3; ±6

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	-7	-6
1	1	1	-6	-12
-1	1	-1	-6	0

Zkoušíme ±1; ±2; ±3; ±6

x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen

$\Rightarrow x_2 = -1$ je (druhý) *kořen*, opět jednonásobný

HS	1	-1	-6
-1	1	-2	-4
2	1		

Zkoušíme -1; ±2; ±3; ±6

x_2 již není kořen

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	−1	−7	1	6	Zkoušíme ±1; ±2; ±3; ±6
1	1	0	−7	−6	0	$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	−7	−6	Zkoušíme ±1; ±2; ±3; ±6
1	1	1	−6	−12	x_1 podruhé již není kořen ⇒ ***jednonásobný*** kořen
−1	1	−1	−6	0	$\Rightarrow x_2 = -1$ je (druhý) *kořen*, opět jednonásobný

HS	1	−1	−6	Zkoušíme −1; ±2; ±3; ±6
−1	1	−2	−4	x_2 již není kořen
2	1	1	−4	není kořen
−2	1			

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot (x+1) \cdot ($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12
−1	1	−1	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen

$\Rightarrow x_2 = -1$ je (druhý) *kořen*, opět jednonásobný

HS	1	−1	−6
−1	1	−2	−4
2	1	1	−4
−2	1	−3	0

Zkoušíme $-1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

x_2 již není kořen

není kořen

$\Rightarrow x_3 = -2$ je (třetí) *kořen*

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot($

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12
−1	1	−1	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen

$\Rightarrow x_2 = -1$ je (druhý) *kořen*, opět jednonásobný

HS	1	−1	−6
−1	1	−2	−4
2	1	1	−4
−2	1	−3	0

Zkoušíme $-1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

x_2 již není kořen

není kořen

$\Rightarrow x_3 = -2$ je (třetí) *kořen*, opět jednonásobný

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

HS	1	−3
3	1	0

kde (čtvrtým) *kořenem* je $x_4 = 3\,.$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme ±1; ±2; ±3; ±6

$\Rightarrow x_1 = 1$ je *kořen*

Rozklad mnohočlenu: $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 + 0x^2 - 7x - 6) = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Nyní hledáme kořeny mnohočlenu $x^3 - 7x - 6$

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12
−1	1	−1	−6	0

Zkoušíme ±1; ±2; ±3; ±6

x_1 podruhé již není kořen $\Rightarrow$ ***jednonásobný*** kořen

$\Rightarrow x_2 = -1$ je (druhý) *kořen*, opět jednonásobný

Rozklad: $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6) = (x-1)\cdot[x-(-1)]\cdot(x^2 - x - 6)$

Hledáme kořeny mnohočlenu $x^2 - x - 6$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo schéma)

HS	1	−1	−6
−1	1	−2	−4
2	1	1	−4
−2	1	−3	0

Zkoušíme -1; ±2; ±3; ±6

x_2 již není kořen

není kořen

$\Rightarrow x_3 = -2$ je (třetí) *kořen*, opět jednonásobný

Rozklad mnohočlenu na součin jeho kořenových činitelů:

$$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

HS	1	−3
3	1	0

kde (čtvrtým) *kořenem* je $x_4 = 3$.

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$

HS	

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies \text{k-n-k} = \pm\dfrac{1\,;\,2\,;\,5\,;\,10}{1\,;\,2}$

Zkoušíme postupně: $\pm\frac{1}{1} = \pm 1$, $\frac{2}{1} = \pm 2$, $\pm\frac{5}{1} = \pm 5$, $\pm\frac{10}{1} = \pm 10$, $\pm\frac{1}{2}$, $(\pm\frac{2}{2} = \pm 1)$, $\pm\frac{5}{2}$, $(\pm\frac{10}{2} = \pm 5)$

	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	2	-7	1	10
	2			

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: $\pm\frac{1}{1} = \pm 1$, $\frac{2}{1} = \pm 2$, $\pm\frac{5}{1} = \pm 5$, $\pm\frac{10}{1} = \pm 10$, $\pm\frac{1}{2}$, $(\pm\frac{2}{2} = \pm 1)$, $\pm\frac{5}{2}$, $(\pm\frac{10}{2} = \pm 5)$

	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	2	-7	1	10
		$1 \cdot (2) + (-7)$	$1 \cdot (-5) + (1)$	$1 \cdot (-4) + (10)$
1	2	-5	-4	6

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\;2\,;\;5\,;\;10}{1\,;\;2}$

Zkoušíme postupně: $\pm 1\,,\quad \pm 2\,,\quad \pm 5\,,\quad \pm 10\,,\; \pm\frac{1}{2}\,,\quad \pm\frac{5}{2}\,,$

HS	2	−7	1	10			
1	2	−5	−4	6	$\neq 0$	$\Rightarrow$	není kořen
−1	2						

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\,2\,;\,5\,;\,10}{1\,;\,2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	-7	1	10	
1	2	-5	-4	6	$\neq 0 \Rightarrow$ není kořen
-1	2	-9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\quad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm \dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10	
1	2	−5	−4	6	$\neq 0 \implies$ není kořen
−1	2	−9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2x^2 - 9x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{5}{2}$,

	x^2	x^1	x^0
HS			

Rozklad mnohočlenu

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1) \cdot (2x^2 - 9x + 10)$$

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \quad \Longrightarrow \quad \text{k-n-k} = \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10	
1	2	−5	−4	6	$\neq 0 \Rightarrow$ není kořen
−1	2	−9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2x^2 - 9x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

	x^2	x^1	x^0
HS	2	−9	10
	2		

Rozklad mnohočlenu

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(2x^2 - 9x + 10)$$

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \quad \Longrightarrow \quad \text{k-n-k} = \pm \dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10	
1	2	−5	−4	6	$\neq 0 \;\Rightarrow$ není kořen
−1	2	−9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2x^2 - 9x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{5}{2}$,

HS	2	−9	10	
−1	2	−11	21	již není kořen
2				

Rozklad mnohočlenu

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x + 1) \cdot (2x^2 - 9x + 10)$$

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1;\ 2;\ 5;\ 10}{1;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10	
1	2	−5	−4	6	$\neq 0 \Rightarrow$ není kořen
−1	2	−9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2x^2 - 9x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−9	10	
−1	2	−11	21	již není kořen
2	2	−5	0	$x_2 = 2$ je kořen

Rozklad mnohočlenu

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(2x^2 - 9x + 10)$$

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$$

2. Racionální lomená funkce

Funkci danou předpisem

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ jsou mnohočleny a $\boldsymbol{Q}$ je navíc nenulový mnohočlen, nazýváme **racionální (lomenou) funkcí**. Říkáme, že funkce $\boldsymbol{R}$ je **ryze lomená** jestliže $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a **neryze lomená** jestliže $\operatorname{st} P \geq \operatorname{st} Q$.

Například

1. $R_1 : y = \dfrac{3x^2 + 2}{x - 2}$ je neryze lomená racionální funkce;
2. $R_2 : y = \dfrac{2x}{5x^3 + 7x^2 + x - 2}$ je ryze lomená racionální funkce.

Je-li $\boldsymbol{R}$ neryze lomená racionální funkce, pak lze provést dělení mnohočlenu mnohočlenem. Při dělení $P(x) : Q(x)$ dostaneme podíl $S(x)$ a zbytek $\mathrm{T}(\mathrm{x})$.
Přitom platí $\operatorname{st} T < \operatorname{st} Q$ (dělíme prostě tak dlouho, dokud to jde), tedy

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{T(x)}{Q(x)}. \tag{3}$$

U mnohočlenů (v předchozí kapitole) hrál důležitou roli rozklad na součin (lineárních či kvadratických činitelů). Podobně u racionálních lomených funkcí je v řadě aplikací důležité něco podobného. Na rozdíl od mnohočlenů, kde jde o rozklad na součin, půjde zde o rozklad na ***součet*** jednodušších racionálních lomených funkcí, které nazýváme ***parciální zlomky***. Vlastně jde o opačný postup, kterým je sčítání zlomků po převodu na společného jmenovatele.

Parciální zlomky

jsou speciální racionální lomené funkce. Rozlišujeme dva typy parciálních zlomků:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \qquad \text{kde } k \text{ je přirozené číslo, } \alpha,\ A \text{ jsou reálná čísla}$$

a

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \qquad \text{kde } k \text{ je přirozené číslo, } M,\ N,\ p,\ q \text{ jsou reálná čísla a navíc } p^2-4q<0\,.$$

U prvního typu je ve jmenovateli nějaká mocnina (třeba i první) lineárního dvojčlenu tvaru $x-\alpha$ a v čitateli je konstanta. U druhého typu je jmenovateli nějaká mocnina (třeba i první) kvadratického trojčlenu tvaru x^2+px+q majícího komplexní kořeny (záporný diskriminant) a v čitateli je lineární dvojčlen (nebo konstanta, pokud je M rovno nule). ***Parciální zlomky jsou vždy ryze lomené***. A protože součet ryze lomených racionálních funkcí (parciálních zlomků) nemůže být neryze lomená racionální funkce, můžeme na parciální zlomky rozkládat pouze ryzí racionální funkce. V případě neryzí racionální funkce ji nejprve dělením převedeme na tvar (3) a rozkládáme funkci $\frac{T(x)}{Q(x)}$.

2.1. Typy rozkladů na parciální zlomky

Nyní si ukážeme, jak lze napsat v konkrétních případech rozklady ***ryze lomené*** racionální funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,.$$

Reálný jednonásobný kořen jmenovatele $Q(x)$, pak: $R(x) = \dfrac{A}{x-a}$

kde ***a*** je kořen jmenovatele dané racionální lomené funkce, ***x–a*** (**x mínus *kořen***) je příslušný ***kořenový činitel*** a ***A*** je číslo (parametr), který hledáme.

Reálný n násobný kořen jmenovatele $Q(x)$, pak:

$$R(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{C}{(x-a)^{n-1}} + \frac{D}{(x-a)^n}$$

kde ***a*** je násobný kořen jmenovatele (s násobností n) dané racionální lomené funkce, ***x–a*** je příslušný ***kořenový činitel*** a ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** jsou čísla (parametry), která hledáme.

Dvojice jednonásobných komplexně sdružených kořenů jmenovatele $Q(x)$, pak:

$$R(x) = \frac{Ax+B}{a\cdot x^2 + b\cdot x + c}$$

kde ***a***, ***b***, ***c*** jsou koeficienty kvadratického dvojčlenu takové, že $a \neq 0$ a $b^2 - 4ac < 0$, ***A***, ***B*** jsou čísla (parametry), která hledáme.

Dvojice n násobných komplexně sdružených kořenů jmenovatele $Q(x)$, pak:

$$R(x) = \frac{Ax+B}{a\cdot x^2+b\cdot x+c} + \frac{Cx+D}{(a\cdot x^2+b\cdot x+c)^2} + \dots + \frac{Ex+F}{(a\cdot x^2+b\cdot x+c)^{n-1}} + \frac{Gx+H}{(a\cdot x^2+b\cdot x+c)^n}$$

kde $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ jsou koeficienty kvadratického dvojčlenu takové, že $a \neq 0$ a $b^2 - 4ac < 0$,
$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ jsou čísla (parametry), která hledáme.

2.2. Postup rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.
Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny. Přitom využíváme následující vlastnost:

Celočíselný kořen mnohočlenu s celočíselnými koeficienty

$$R_n(x) = \boldsymbol{a_n} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + \boldsymbol{a_0}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je přirozené číslo ($1 \leq n \in \mathbb{N}$), $\boldsymbol{a_0}, a_1, \ldots, a_{n-1}, \boldsymbol{a_n}$ jsou **celá** čísla, ($\boldsymbol{a_n} \neq 0$, $\boldsymbol{a_0} \neq 0$) musí bezezbytku dělit (být dělitelem) jeho absolutní člen (koeficient a_0 u proměnné x^0 – *která tam není!*)

Pro racionální kořen $\alpha = \frac{p}{q}$ (kde $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ jsou ***nesoudělná*** celá čísla ⇒ **pokrátit!**) mnohočlenu s celočíselnými koeficienty platí, že: $\boldsymbol{p}$ dělí bezezbytku koeficient $\boldsymbol{a_0}$ a $\boldsymbol{q}$ dělí $\boldsymbol{a_n}$.

$$\text{Tedy:} \qquad \alpha = \frac{p \mid \boldsymbol{a_0}}{q \mid \boldsymbol{a_n}}$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za $\boldsymbol{x}$ vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna $\boldsymbol{x}$.

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné $\boldsymbol{x}$.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli „*nahoře*“ zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele „*dole*“), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + 2(x) - 1}{(x) \cdot [(x)+1] \cdot [(x)-1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1} \quad | \; x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za *x* vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.
Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna ***x*** .

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné *x* .
Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + 2(x) - 1}{(x) \cdot [(x)+1] \cdot [(x)-1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1} \quad | \; x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

Určení parametrů: $(x)^2 + 2(x) - 1 = A \cdot [(x)+1] \cdot [(x)-1] + B \cdot (x) \cdot [(x)-1] + C \cdot (x) \cdot [(x)+1]$

$$
\begin{array}{lll}
x = 0: & (0)^2 + 2 \cdot (0) - 1 = A \cdot [(0)+1] \cdot [(0)-1] + 0 + 0 & \Longrightarrow -1 = -A \Longrightarrow \quad A = 1 \\
x = 1: & (1)^2 + 2 \cdot (1) - 1 = 0 + 0 + C \cdot (1) \cdot [(1)+1] & \Longrightarrow \quad 2 = 2C \Longrightarrow \quad C = 1 \\
x = -1: & (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = 0 + B \cdot (-1) \cdot [(-1)-1] + 0 & \Longrightarrow -2 = 2B \Longrightarrow \quad B = -1
\end{array}
$$

Reálné jednonásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + 2(x) - 1}{(x) \cdot [(x) + 1] \cdot [(x) - 1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x + 1} + \dfrac{C}{x - 1} \quad | \ x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

Výsledek: $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{-1}{x + 1} + \dfrac{1}{x - 1}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že všechny tři parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli „*nahoře*“ zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele „*dole*“), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x - 1)$

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x - 1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) - 1}{(x)^2 \cdot [(x) - 1]} = \dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2} \quad | \quad x^2 \cdot (x - 1)$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za x vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna x .

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné x .

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x-1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) - 1}{(x)^2 \cdot [(x)-1]} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2} \quad \Big| \quad x^2 \cdot (x-1)$

Určení parametrů: $(x)^2 + (x) - 1 = A \cdot (x)^2 + B \cdot (x) \cdot [(x)-1] + C \cdot [(x)-1]$

$$\begin{array}{llllll}
x = 0: & (0)^2 + (0) - 1 = \mathbf{0} + \mathbf{0} + C \cdot [(0)-1] & \Longrightarrow & -1 = -C & \Longrightarrow & C = 1 \\
x = 1: & (1)^2 + (1) - 1 = A \cdot (1)^2 + \mathbf{0} + \mathbf{0} & \Longrightarrow & 1 = A & \Longrightarrow & A = 1 \\
x^2 \; : & 1 = A + B & \overset{A=1}{\Longrightarrow} & 1 = 1 + B & \Longrightarrow & B = 0
\end{array}$$

Reálné vícenásobné kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x - 1)$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) - 1}{(x)^2 \cdot [(x) - 1]} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2} \quad | \quad x^2 \cdot (x - 1)$

Výsledek: $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{0}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že oba dva parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Součin kořenových činitelů: $x^3 + x = x \cdot (x^2 + 1)$ Kořeny závorky jsou komplexní.

Protože $x^2 \geq 0$ (pro každé reálné číslo $\boldsymbol{x}$), musí platit $x^2 + 1 \geq 1$. Tedy $x^2 + 1 \neq 0$ a proto neexistuje reálný kořen (kvadratického dvojčlenu) mnohočlenu v závorce.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^3+x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 + x = x \cdot (x^2+1)$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2+(x)+1}{(x)\cdot[(x)^2+1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B\cdot x + C}{x^2+1} \qquad \Big| \quad x\cdot(x^2+1)$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za *x* vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.
Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna ***x*** .

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné *x* .
Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 + x = x \cdot (x^2 + 1)$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) + 1}{(x) \cdot [(x)^2 + 1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B \cdot x + C}{x^2 + 1} \qquad | \quad x \cdot (x^2 + 1)$

Určení parametrů: $(x)^2 + (x) + 1 = A \cdot [(x)^2 + 1] + [B \cdot (x) + C] \cdot (x)$

$$
\begin{array}{llll}
x = 0: & (0)^2 + (0) + 1 = A \cdot [(0)^2 + 1] + 0 & \Longrightarrow 1 = A & \Longrightarrow \quad A = 1 \\
x^2 \quad : & 1 = A + B & \overset{A=1}{\Longrightarrow} 1 = 1 + B & \Longrightarrow \quad B = 0 \\
x \quad : & 1 = C & & \Longrightarrow \quad C = 1
\end{array}
$$

Jednonásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (2) je menší než stupeň jmenovatele (3).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů: $x^3 + x = x \cdot (x^2 + 1)$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $R(x) = \dfrac{(x)^2 + (x) + 1}{(x) \cdot [(x)^2 + 1]} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B \cdot x + C}{x^2 + 1} \quad | \quad x \cdot (x^2 + 1)$

Výsledek: $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{0 \cdot x + 1}{x^2 + 1} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že oba dva výsledné parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3}$.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli „*nahoře*“ zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele „*dole*“), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny.

Součin kořenových činitelů $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3 \cdot (x^2 + 1)^2$ Kořeny závorky jsou komplexní.

Protože $x^2 \geq 0$ (pro každé reálné číslo $\boldsymbol{x}$), musí platit $x^2 + 1 \geq 1$. Tedy $x^2 + 1 \neq 0$ a proto neexistuje reálný kořen (kvadratického dvojčlenu) mnohočlenu v závorce.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3 \cdot (x^2+1)^2$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků $R(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D \cdot x + E}{x^2+1} + \dfrac{F \cdot x + G}{(x^2+1)^2} \quad \Big| \quad x^3 \cdot (x^2+1)^2$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za x **vhodná čísla,** nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna x.

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné x.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2\,x^2 + 1}{x^7 + 2\,x^5 + x^3}$.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

Součin kořenových činitelů $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3 \cdot (x^2 + 1)^2$ Kořeny závorky jsou komplexní.

Typy parciálních zlomků $R(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D \cdot x + E}{x^2 + 1} + \dfrac{F \cdot x + G}{(x^2 + 1)^2} \quad \Big| \quad x^3 \cdot (x^2 + 1)^2$

Určení parametrů: $x^4 + x^3 + 2x^2 + 1 =$

$$= A \cdot x^2 \cdot (x^2 + 1)^2 + B \cdot x \cdot (x^2 + 1)^2 + C \cdot (x^2 + 1)^2 + (D \cdot x + E) \cdot x^3 \cdot (x^2 + 1) + (F \cdot x + G) \cdot x^3$$

$x^4 + x^3 + 2x^2 + 1 =$

$$= A \cdot (x^6 + 2x^4 + x^2) + B \cdot (x^5 + 2x^3 + x) + C \cdot (x^4 + 2x^2 + 1) + D \cdot (x^6 + x^4) + E \cdot (x^5 + x^3) + F \cdot x^4 + G \cdot x^3$$

$$
\begin{array}{llllll}
x = 0: & 1 = C & & & \Longrightarrow & C = 1 \\
x \quad : & 0 = B & & & \Longrightarrow & B = 0 \\
x^2 \quad : & 2 = A + 2C & \overset{C=1}{\Longrightarrow} & 2 = A + 2 & \Longrightarrow & A = 0 \\
x^5 \quad : & 0 = B + E & \overset{B=0}{\Longrightarrow} & 0 = 0 + E & \Longrightarrow & E = 0 \\
x^6 \quad : & 0 = A + D & \overset{A=0}{\Longrightarrow} & 0 = 0 + D & \Longrightarrow & D = 0 \\
x^4 \quad : & 1 = 2A + C + D + F & \overset{A,C,D}{\Longrightarrow} & 1 = 0 + 1 + 0 + F & \Longrightarrow & F = 0 \\
x^3 \quad : & 1 = 2B + E + G & \overset{B,E}{\Longrightarrow} & 1 = 0 + 0 + G & \Longrightarrow & G = 1
\end{array}
$$

Vícenásobné komplexně sdružené kořeny jmenovatele

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3}$.

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (4) je menší než stupeň jmenovatele (7).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Součin kořenových činitelů $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3 \cdot (x^2+1)^2$ Kořeny závorky jsou komplexní.

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků $R(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D\cdot x + E}{x^2+1} + \dfrac{F\cdot x + G}{(x^2+1)^2} \quad \Big| \quad x^3 \cdot (x^2+1)^2$

Výsledek $R(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^7 + 2x^5 + x^3} = \dfrac{0}{x} + \dfrac{0}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{0\cdot x + 0}{x^2+1} + \dfrac{0\cdot x + 1}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že oba dva výsledné parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$.

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6}$

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny. Přitom využíváme následující vlastnost:

Celočíselný kořen mnohočlenu s celočíselnými koeficienty

$$R_n(x) = \boldsymbol{a}_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + \boldsymbol{a}_0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je přirozené číslo ($1 \le n \in \mathbb{N}$), $\boldsymbol{a}_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \boldsymbol{a}_n$ jsou **celá** čísla, ($\boldsymbol{a}_n \neq 0$, $\boldsymbol{a}_0 \neq 0$) musí bezezbytku dělit (být dělitelem) jeho absolutní člen (koeficient a_0 u proměnné x^0 – *která tam není!*)

Pro racionální kořen $\alpha = \frac{p}{q}$ (kde $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ jsou ***nesoudělná*** celá čísla ⇒ **pokrátit!**) mnohočlenu s celočíselnými koeficienty platí, že: $\boldsymbol{p}$ dělí bezezbytku koeficient $\boldsymbol{a}_0$ a $\boldsymbol{q}$ dělí $\boldsymbol{a}_n$.

$$\text{Tedy:} \qquad \alpha = \frac{p \mid \boldsymbol{a}_0}{q \mid \boldsymbol{a}_n}$$

Hledáme kořeny mnohočlenu $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6\,.$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
HS					

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	1	-1	-7	1	6
	1				

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm \dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
		$1 \cdot (1) + (-1)$			
1	1	0			

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	-1	-7	1	6
			$1 \cdot (0) + (-7)$		
1	1	0	-7		

Zkoušíme ±1; ±2; ±3; ±6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\ ;\ 2\ ;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
				$1 \cdot (-7) + (1)$	
1	1	0	−7	−6	

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
					$1 \cdot (-6) + (6)$
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	0	−7	−6	0	$P(1) = 0$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \Longrightarrow$ k-n-k $= \pm \dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
	1			

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad: x_1 $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot (x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6	
						Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$
1	1	0	−7	−6	0	$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6	
					Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$
1	1				

Rozklad: x_1 $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1		

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad: x_1 $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad: x_1 $\qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1;\ 2;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Rozklad: x_1 $\qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	**−12**
	1			

Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$

$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $x_1 = 1$ je ***jednonásobný***

Rozklad: x_1 $\qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12
−1	1			

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $x_1 = 1$ je ***jednonásobný***

Rozklad: x_1 $\qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\qquad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	-1	-7	1	6	Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$
1	1	0	-7	-6	0	$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	-7	-6	Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$
1	1	1	-6	-12	$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $\ x_1 = 1\ $ je ***jednonásobný***
-1	1	-1	-6	0	

Rozklad: x_1 $\qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6	
						Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	0	−7	−6	0	$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6	Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$
1	1	1	−6	**−12**	$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $x_1 = 1$ je ***jednonásobný***
−1	1	−1	−6	**0**	$\Rightarrow \quad x_2 = -1$ je (druhý) kořen:

Rozklad: $x_1 \qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

$x_{1;2} \qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot[x-(-1)]\cdot(x^2 - x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12
−1	1	−1	−6	0

Zkoušíme ± 1; ± 2; ± 3; ± 6

$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $x_1 = 1$ je ***jednonásobný***

$\Rightarrow \quad x_2 = -1$ je (druhý) kořen: $x^2 - x - 6 = 0$

řešíme rozkladem, ***diskriminantem***, Hornerovým s.

Rozklad: $x_1 \qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x^3 - 7x - 6)$

$x_{1;2} \qquad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot[x-(-1)]\cdot(x^2 - x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	−1	−7	1	6
1	1	0	−7	−6	0

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	−7	−6
1	1	1	−6	−12
−1	1	−1	−6	0
	a	b	c	

Zkoušíme $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $x_1 = 1$ je ***jednonásobný***

$\Rightarrow \ x_2 = -1$ je (druhý) kořen: $x^2 - x - 6 = 0$

řešíme rozkladem, ***diskriminantem***, Hornerovým s.

$$x_{3;4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Rozklad: x_1 $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 1) \cdot (x^3 - 7x - 6)$

$x_{1;2}$ $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x - 1) \cdot [x - (-1)] \cdot (x^2 - x - 6)$

Najděte kořeny mnohočlenu $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\quad \dfrac{p \mid 6}{q \mid 1} \implies$ k-n-k $= \pm \dfrac{1;\ 2;\ 3;\ 6}{1}$

HS	1	-1	-7	1	6	Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$
1	1	0	-7	-6	0	$P(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ je kořen

HS	1	0	-7	-6	Zkoušíme $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6$
1	1	1	-6	-12	$\neq 0 \ \Rightarrow$ (první) kořen $x_1 = 1$ je ***jednonásobný***
-1	1	-1	-6	0	$\Rightarrow \quad x_2 = -1$ je (druhý) kořen: $x^2 - x - 6 = 0$
	a	b	c		řešíme rozkladem, ***diskriminantem***, Hornerovým s.

$$x_{3;4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_3 = \tfrac{1+5}{2} = 3 \qquad x_4 = \tfrac{1-5}{2} = -2$$

Rozklad:

x_1 $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot (x^3 - 7x - 6)$

$x_{1;2}$ $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot [x - (-1)] \cdot (x^2 - x - 6)$

$x_{1;2;3;4}$ $\quad P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-3) \cdot (x+2)$

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14\,x^2 - 3\,x - 24}{x^4 - x^3 - 7\,x^2 + x + 6}$

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $\dfrac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x+2} + \dfrac{D}{x-3}$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za x vhodná čísla, nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna x.

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné x.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6}$

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $$\frac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-3}$$

Určení parametrů po vynásobení společným jmenovatelem (dosadíme postupně kořeny):

$$x^3 + 14x^2 - 3x - 24 =$$
$$= A\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3) + B\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3) + C\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-3) + D\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

$x = 1$: $(1)^3+14\cdot(1)^2-3\cdot(1)-24 = A\cdot[(1)+1]\cdot[(1)+2]\cdot[(1)-3]+0+0+0 \Longrightarrow -12 = -12A \Longrightarrow A = 1$

$x = -1$: $(-1)^3+14\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-24 = 0+B\cdot[(-1)-1]\cdot[(-1)+2]\cdot[(-1)-3]+0+0 \Longrightarrow -8 = 8B \Longrightarrow B = -1$

$x = -2$: $(-2)^3+14\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)-24 = 0+0+C\cdot[(-2)-1]\cdot[(-2)+1]\cdot[(-2)-3]+0 \Longrightarrow 30 = -15C \Longrightarrow C = -2$

$x = 3$: $(3)^3+14\cdot(3)^2-3\cdot(3)-24 = 0+0+0+D\cdot[(3)-1]\cdot[(3)+1]\cdot[(3)+2] \Longrightarrow 120 = 40D \Longrightarrow D = 3$

Příklad 1. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $R(x) = \dfrac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6}$

ANO, je ryzí. Stupeň čitatele (3) je menší než stupeň jmenovatele (4).

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $$\frac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-3}$$

do kterých dosadíme vypočtené parametry: $A = 1$; $B = -1$; $C = -2$; $D = 3$

Výsledek:

$$R(x) = \frac{x^3 + 14x^2 - 3x - 24}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-2}{x+2} + \frac{3}{x-3}$$

Správnost výpočtu můžeme ověřit tak, že všechny čtyři výsledné parciální zlomky sečteme (samozřejmě je při sčítání převedeme na společného jmenovatele) a musíme dostat opět zadanou funkci $R(x)$

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$R(x) = P(x) + Q(x)$, kde $Q(x) = \dfrac{\text{zbytek po dělení}}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$. Proto podělíme čitatel jmenovatelem.

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

Pokud NENÍ ryzí (v čitateli *„nahoře“* zadané racionální lomené funkce je mnohočlen stejného či vyššího řádu jako má mnohočlen jmenovatele *„dole“*), provedeme zlomkovou čarou naznačené dělení. Případný zbytek po tomto dělení je již **ryzí** racionální lomená funkce.

Pokud JE ryzí, pokračujeme druhým bodem.

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$R(x) = P(x) + Q(x)$, kde $Q(x) = \dfrac{\text{zbytek po dělení}}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$. Proto podělíme čitatel jmenovatelem.

$$
\begin{array}{l}
(2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28) : (2x^3 - 7x^2 + x + 10) = x^2 - 1 + \dfrac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} \\
\underline{-(2x^5 - 7x^4 + x^3 + 10x^2)} \\
\qquad -2x^3 + 10x^2 - 23x + 28 \\
\qquad \underline{-(-2x^3 + 7x^2 - x - 10)} \\
\qquad\qquad 3x^2 - 22x + 38
\end{array}
$$

Nebo jinak: $R(x) = P(x) + Q(x)$, kde $P(x) = x^2 - 1$ a $Q(x) = \dfrac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$.

Tedy

$$R(x) = \frac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$$

Na parciální zlomky budeme rozkládat racionální lomenou funkci $Q(x)$.

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$

1. Ověříme, zda zadaná racionální lomená funkce je ryzí.

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$R(x) = P(x) + Q(x)$, kde $P(x) = x^2 - 1$ a $Q(x) = \dfrac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$.

Tedy

$$R(x) = \frac{2x^5 - 7x^4 - x^3 + 20x^2 - 23x + 28}{2x^3 - 7x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3x^2 - 22x + 38}{2x^3 - 7x^2 + x + 10}$$

Na parciální zlomky budeme rozkládat racionální lomenou funkci $Q(x)$.

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

Kořeny hledáme pouze **reálné**. Komplexně sdružené nevyčíslujeme, ale nahradíme je kvadratickým dvojčlenem. Určíme ***definiční obor*** na který mají vliv pouze reálné kořeny. Přitom využíváme následující vlastnost:

Celočíselný kořen mnohočlenu s celočíselnými koeficienty

$$R_n(x) = \boldsymbol{a}_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + \boldsymbol{a}_0 , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je přirozené číslo ($1 \le n \in \mathbb{N}$), $\boldsymbol{a}_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \boldsymbol{a}_n$ jsou **celá** čísla, ($\boldsymbol{a}_n \neq 0$, $\boldsymbol{a}_0 \neq 0$) musí bezezbytku dělit (být dělitelem) jeho absolutní člen (koeficient a_0 u proměnné x^0 – *která tam není!*)

Pro racionální kořen $\alpha = \frac{p}{q}$ (kde $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ jsou ***nesoudělná*** celá čísla ⇒ **pokrátit!**) mnohočlenu s celočíselnými koeficienty platí, že: $\boldsymbol{p}$ dělí bezezbytku koeficient $\boldsymbol{a}_0$ a $\boldsymbol{q}$ dělí $\boldsymbol{a}_n$.

$$\text{Tedy:} \qquad \alpha = \frac{p \mid \boldsymbol{a}_0}{q \mid \boldsymbol{a}_n}$$

Hledáme kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$.

V našem případě

$$\alpha = \frac{p \mid 10}{q \mid 2} = \pm \frac{1\ ;\ 2\ ;\ 5\ ;\ 10}{1\ ;\ 2}$$

a kandidáty na kořeny jsou potom

$$\text{k-n-k} = \pm 1\ ; \quad \pm 2\ ; \quad \pm 5\ ; \quad \pm 10\ ; \quad \pm\frac{1}{2}\ ; \quad \left(\pm\frac{2}{2} = \pm 1\right) \quad \pm\frac{5}{2}\ ; \quad \left(\pm\frac{10}{2} = \pm 5\right)$$

Zlomky, které jsou tvořeny soudělnými čísly napřed zkrátíme.

Který ze všech uvedených kandidátů na kořen je skutečně kořenem, ověříme Hornerovým schématem. Z předchozího víme (důsledky základní věty algebry), že můžeme mít buď jeden reálný kořen nebo tři reálné kořeny, protože stupeň rozkládaného mnohočlenu je tři.

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$

HS	

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\,2\,;\,5\,;\,10}{1\,;\,2}$

Zkoušíme postupně: $\pm\frac{1}{1} = \pm 1$, $\frac{2}{1} = \pm 2$, $\pm\frac{5}{1} = \pm 5$, $\pm\frac{10}{1} = \pm 10$, $\pm\frac{1}{2}$, $(\pm\frac{2}{2} = \pm 1)$, $\pm\frac{5}{2}$, $(\pm\frac{10}{2} = \pm 5)$

	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	2	-7	1	10
	2			

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$ $\quad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\,2\,;\,5\,;\,10}{1\,;\,2}$

Zkoušíme postupně: $\pm\frac{1}{1} = \pm 1$, $\frac{2}{1} = \pm 2$, $\pm\frac{5}{1} = \pm 5$, $\pm\frac{10}{1} = \pm 10$, $\pm\frac{1}{2}$, $(\pm\frac{2}{2} = \pm 1)$, $\pm\frac{5}{2}$, $(\pm\frac{10}{2} = \pm 5)$

	x^3	x^2	x^1	x^0
HS	2	-7	1	10
		$1 \cdot (2) + (-7)$	$1 \cdot (-5) + (1)$	$1 \cdot (-4) + (10)$
1	2	-5	-4	6

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: $\pm 1\,,\quad \pm 2\,,\quad \pm 5\,,\quad \pm 10\,,\ \pm\frac{1}{2}\,,\quad \pm\frac{5}{2}\,,$

HS	2	−7	1	10		
1	2	−5	−4	6	$\neq 0 \Rightarrow$	není kořen
−1	2					

Najděte kořeny mnohočlenu $2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\,2\,;\,5\,;\,10}{1\,;\,2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	-7	1	10	
1	2	-5	-4	6	$\neq 0 \Rightarrow$ není kořen
-1	2	-9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10	
1	2	−5	−4	6	$\neq 0 \Rightarrow$ není kořen
−1	2	−9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2x^2 - 9x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	x^2	x^1	x^0

Rozklad mnohočlenu

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(2x^2 - 9x + 10)$$

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\dfrac{p \mid 10}{q \mid 2}$ $\Longrightarrow$ k-n-k $= \pm\dfrac{1\,;\ 2\,;\ 5\,;\ 10}{1\,;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10	
1	2	−5	−4	6	$\neq 0 \Rightarrow$ není kořen
−1	2	−9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2x^2 - 9x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

	x^2	x^1	x^0
HS	2	−9	10
	2		

Rozklad mnohočlenu

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(2x^2 - 9x + 10)$$

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \implies$ k-n-k $= \pm\dfrac{1;\ 2;\ 5;\ 10}{1;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10	
1	2	−5	−4	6	$\neq 0 \quad \Rightarrow$ není kořen
−1	2	−9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2x^2 - 9x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−9	10	
−1	2	−11	21	již není kořen
2				

Rozklad mnohočlenu

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(2x^2 - 9x + 10)$$

Najděte kořeny mnohočlenu $2x^3 - 7x^2 + x + 10$ $\qquad \dfrac{p \mid 10}{q \mid 2} \quad \Longrightarrow \quad \text{k-n-k} = \pm\dfrac{1;\ 2;\ 5;\ 10}{1;\ 2}$

Zkoušíme postupně: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−7	1	10	
1	2	−5	−4	6	$\neq 0 \quad \Rightarrow$ není kořen
−1	2	−9	10	0	$x_1 = -1$ je kořen

Hledáme kořeny mnohočlenu $2x^2 - 9x + 10$ (***metody***: rozklad, **diskriminant**, Hornerovo sch.)

Zkoušíme postupně: -1, ± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$,

HS	2	−9	10	
−1	2	−11	21	již není kořen
2	2	−5	0	$x_2 = 2$ je kořen

Rozklad mnohočlenu

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(2x^2 - 9x + 10)$$

$$2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$$

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$$R(x) = \frac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$$

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $\dfrac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{2\,x-5} \;\Big|\; (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2\,x-5)$

Při určování parametrů využíváme následující dvě metody (případně je vhodně kombinujeme) poté, co ***rovnici vynásobíme společným jmenovatelem*** (abychom se zbavili zlomků) a tím dostaneme rovnost dvou mnohočlenů.

Dosazujeme za $\boldsymbol{x}$ **vhodná čísla,** nejlépe ***kořeny*** jmenovatele.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné funkční hodnoty pro všechna $\boldsymbol{x}$.

Porovnáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné $\boldsymbol{x}$.

Protože mají-li se dva mnohočleny rovnat, musejí mít stejné příslušné koeficienty.

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$$R(x) = \frac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$$

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $\dfrac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{2\,x-5} \;\Big|\; (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2\,x-5)$

Určení parametrů: $3\,x^2 - 22\,x + 38 = A\cdot(x-2)\cdot(2\,x-5) + B\cdot(x+1)\cdot(2\,x-5) + C\cdot(x+1)\cdot(x-2)$

$x = -1 \quad\Longrightarrow\quad 3\cdot(-1)^2 - 22\cdot(-1) + 38 = A\cdot[(-1)-2]\cdot[2\cdot(-1)-5] + 0 + 0 \Longrightarrow 63 = 21A \quad\Longrightarrow\quad A = 3$

$x = 2 \quad\Longrightarrow\quad 3\cdot(2)^2 - 22\cdot(2) + 38 = 0 + B\cdot[(2)+1]\cdot[2\cdot(2)-5] + 0 \Longrightarrow 6 = -3B \quad\Longrightarrow\quad B = -2$

$x = 2{,}5 \;\Longrightarrow\; 3\cdot(2{,}5)^2 - 22\cdot(2{,}5) + 38 = 0 + 0 + C\cdot[(2{,}5)+1]\cdot[(2{,}5)-2] \Longrightarrow 1{,}75 = 1{,}75C \;\Longrightarrow\; C = 1$

A po dosazení

Př. 2. Rozložte na parc. zlomky rac. lomenou funkci $R(x) = \dfrac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$

NE, není ryzí. Stupeň čitatele (5) je větší než stupeň jmenovatele (3). Zadaná funkce se dá rozložit:

$R(x) = P(x) + Q(x)$, kde $P(x) = x^2 - 1$ a $Q(x) = \dfrac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$.

Tedy

$$R(x) = \frac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10}$$

Na parciální zlomky budeme rozkládat racionální lomenou funkci $Q(x)$.

2. Mnohočlen ve jmenovateli rozložíme na součin. Buď vytýkáním před závorku, nebo pro ***součin kořenových činitelů*** najdeme všechny (včetně jejich násobnosti) kořeny, např. Hornerovým schématem.

$$2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-5)$$

3. Stanovíme typy parciálních zlomků a určíme parametry. ***Počet parametrů = stupeň jmenovatele!***

Typy parciálních zlomků: $\dfrac{3\,x^2 - 22\,x + 38}{2\,x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{2\,x-5} \mid (x+1)\cdot(x-2)\cdot(2\,x-5)$

Výsledek:

$$R(x) = \frac{2\,x^5 - 7\,x^4 - x^3 + 20\,x^2 - 23\,x + 28}{2x^3 - 7\,x^2 + x + 10} = x^2 - 1 + \frac{3}{x+1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{1}{2\,x-5}$$

2.3. Závěrečná poznámka k rozkladu na parciální zlomky

V příkladu, kdy jsme měli rozložit NEryze lomenou racionální funkci, jsme jako odhadovaný rozklad na parciální zlomky uvedli

$$\frac{3\,x^2-22\,x+38}{2\,x^3-7\,x^2+x+10}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{2\,x-5}$$

kde třetí parciální zlomek má ve jmenovateli lineární dvojčlen $2\,x-5$. Tedy třetí kořen je $x_3=\frac{5}{2}$.

Přitom v úvodu jsme říkali, že parciální zlomek pro reálný kořen jmenovatele může mít pouze tvar

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k}$$

Neměli bychom odhadovaný rozklad tedy psát

$$\frac{3\,x^2-22\,x+38}{2\,x^3-7\,x^2+x+10}=\frac{A^*}{x+1}+\frac{B^*}{x-2}+\frac{C^*}{x-\frac{5}{2}}\qquad ? \tag{4}$$

Určeme tento *„ohvězdičkovaný“* rozklad. Rozložíme jmenovatele na součin jeho kořenových činitelů a odhadneme parciální zlomky takto upraveného zlomku. Potom (známým způsobem) určíme neznámé parametry.

- Nejprve obě dvě strany rovnice vynásobíme společným jmenovatelem (odstraníme zlomky).
- Pak budeme postupně za $\boldsymbol{x}$ dosazovat hodnoty jednotlivých kořenů.

Rozložíme jmenovatele na součin jeho kořenových činitelů

$$\frac{3x^2-22x+38}{2x^3-7x^2+x+10}=\frac{3x^2-22x+38}{2\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)}$$

Odhadneme parciální zlomky

$$\frac{3x^2-22x+38}{2\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)}=\frac{A^*}{x+1}+\frac{B^*}{x-2}+\frac{C^*}{x-\frac{5}{2}}$$

Určíme neznámé parametry: Vynásobíme obě strany rovnice členem $2\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)$ (nejmenším společným jmenovatelem)

$$3x^2-22x+38=A^*\cdot 2\cdot(x-2)\cdot(x-\frac{5}{2})+B^*\cdot 2\cdot(x+1)\cdot(x-\frac{5}{2})+C^*\cdot 2\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

a upravíme:

$$3x^2-22x+38=A^*\cdot(x-2)\cdot(2x-5)+B^*\cdot(x+1)\cdot(2x-5)+C^*\cdot 2\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

Nyní dosadíme za $\boldsymbol{x}$ hodnoty celočíselných kořenů a například číslo NULA.

$x_1=-1$: $3\cdot(-1)^2-22\cdot(-1)+38=A^*\cdot[(-1)-2]\cdot[2\cdot(-1)-5]+\mathbf{0}+\mathbf{0}$ $\Longrightarrow 63=21A^*\Longrightarrow A^*=3$

$x_2=2$: $3\cdot(2)^2-22\cdot(2)+38=\mathbf{0}+B^*\cdot[(2)+1]\cdot[2\cdot(2)-5]+\mathbf{0}$ $\Longrightarrow 6=-3B^*\Longrightarrow B^*=-2$

$x=0$: $3\cdot(0)^2-22\cdot(0)+38=A^*\cdot[(0)-2]\cdot[2\cdot(0)-5]+B^*\cdot[(0)+1]\cdot[2\cdot(0)-5]+C^*\cdot 2\cdot[(0)+1]\cdot[(0)-2]$

$38=10A^*-5B^*-4C^* \overset{A,\,B}{\Longrightarrow} 38=10\cdot(3)-5\cdot(-2)-4C^*$ $\Longrightarrow -2=-4C^*\Longrightarrow C^*=\frac{1}{2}$

Výsledný rozklad je

$$\frac{3\,x^2-22\,x+38}{2\,x^3-7\,x^2+x+10}=\frac{A^*}{x+1}+\frac{B^*}{x-2}+\frac{C^*}{x-\frac{5}{2}}=\frac{3}{x+1}+\frac{-2}{x-2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{5}{2}}$$

a po úpravě

$$\frac{3}{x+1}+\frac{-2}{x-2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{5}{2}}=\frac{3}{x+1}+\frac{-2}{x-2}+\frac{1}{2\left(x-\frac{5}{2}\right)}=\frac{3}{x+1}+\frac{-2}{x-2}+\frac{1}{2\,x-5}$$

Vidíme, že nám vyšel stejný rozklad zlomku $Q(x)$ jako předtím, jenom jinak zapsaný. To nás opravňuje odhadovat parciální zlomky i ve tvaru

$$\frac{A}{(\beta x-\alpha)^k}\quad \text{nebo}\quad \frac{Mx+N}{(\beta x^2+px+q)^k}\,,\qquad \text{kde } \beta\neq 0\,.$$

Použitá literatura

[1] Kuben, J., Šarmanová, P. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Ostrava : Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2006, vi+346 s. ISBN 80–248–1192–8. [on line] ⟨http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/dp/dp_obr.pdf⟩

[2] Rychnovský, R. *Úvod do vyšší matematiky.* Praha : Státní zemědělské nakladatelství, Praha. 1968, vydání třetí, rozšířené. 518 s.

[3] Škrášek, J. *Základy vyšší matematiky.* Praha : Naše vojsko, 1966, 382 s.