

Charakteristická (vlastní) čísla λ a charakteristické (vlastní) vektory \vec{X} matice A

jsou taková čísla a vektory, pro která platí:

$$A \cdot \vec{X} = \lambda \cdot \vec{X}$$

kde vektor neznámých \vec{X} je sloupcový vektor.

Charakteristická matice k matici A

$$(A - \lambda \cdot E)$$

kde E je jednotková matice.

Charakteristická rovnice matice A

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0 \quad \text{nebo} \quad 0 = |A - \lambda \cdot E|$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakteristickému číslu λ je řešením soustavy zapsané maticově $(A - \lambda \cdot E | 0)$

1. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Charakteristická rovnice matice A

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

Stanovení hodnoty determinantu úpravou na schodovitý tvar

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[\leftrightarrow]{\frac{2}{\lambda-1}} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda-1} & \frac{2}{\lambda-1}-1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[\leftrightarrow]{\frac{1-\lambda}{\lambda^2-2\lambda-1}} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda-1} & \frac{2}{\lambda-1}-1 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda^3+3\lambda^2-4}{\lambda^2-2\lambda-1} \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \frac{-\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda-1} \cdot \frac{-\lambda^3+3\lambda^2-4}{\lambda^2-2\lambda-1} = -\lambda^3+3\lambda^2-4$$

Stanovení hodnoty determinantu pomocí Sarrusova pravidla

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = [(1-\lambda)^3 + 0 - 2] - [0 + (1-\lambda) + 2(1-\lambda)] =$$

$$= (1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 2) - (3 - 3\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$$

Kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \quad \text{kandidáti na kořen} \quad \pm 1; \pm 2; \pm 4 \quad \text{rozklad} \quad (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 2)^2$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_1 = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} -3t \\ 4t \\ 2t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{např}} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_{2,3} = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p \\ p \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{např}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Charakteristická rovnice matice A

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_{1;2} = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{např}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Charakteristická rovnice matice A

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_1 = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{např}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_2 = 3$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} w \\ w \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{např}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Charakteristická rovnice matice A

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = [(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 + 0] - [-2(2-\lambda) + 2(1-\lambda) + 0] = \\ = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \quad \text{kandidáti : } \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_1 = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xleftrightarrow{(-1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2p \\ p \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{např}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_2 = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \xleftrightarrow{(-1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \xleftrightarrow{(2)} \sim \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} q \\ q \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{např}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_3 = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xleftrightarrow{(-2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xleftrightarrow{(-1)} \sim \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} 2r \\ 2r \\ r \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{např}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Charakteristická rovnice matice A

$$0 = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(5 - \lambda) - 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda - 2)(\lambda - 6)$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_1 = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} (-3) \\ \leftrightarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{např}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_2 = 6$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} (1) \\ \leftrightarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} s \\ 3s \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{např}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

6. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Charakteristická rovnice matice A

$$0 = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 3 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 12 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_1 = -5$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} (-\frac{4}{3}) \\ \leftrightarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} p \\ -p \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{např}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_2 = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} (1) \\ \leftrightarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} 3q \\ 4q \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{např}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

7. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

Charakteristická rovnice matice A

$$0 = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 5 & 3 \\ -4 & -9 - \lambda & -6 \\ 6 & 15 & 10 - \lambda \end{vmatrix} = [(3 - \lambda)(-9 - \lambda)(10 - \lambda) - 180 - 180] - \\ -[18(-9 - \lambda) - 90(3 - \lambda) - 20(10 - \lambda)] = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = \\ = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \quad \text{kandidáti: } \pm 1; \pm 2$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_{1;2} = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 0 \\ -4 & -10 & -6 & 0 \\ 6 & 15 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} -5u - 3w \\ 2u \\ 2w \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{např}} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_3 = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -4 & -11 & -6 & 0 \\ 6 & 15 & 8 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(4)(-6)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & 0 \\ 0 & -15 & -10 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\left(\frac{5}{3}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} v \\ -2v \\ 3v \end{pmatrix}$$

například $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

8. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

Charakteristická rovnice matice A

$$0 = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 8 & 6 \\ -4 & 10 - \lambda & 6 \\ 4 & -8 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = [(-2 - \lambda)(10 - \lambda)(-4 - \lambda) + 192 + 192] - \\ -[24(10 - \lambda) - 48(-2 - \lambda) - 32(-4 - \lambda)] = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = \\ = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -\lambda(\lambda - 2)^2$$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_1 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 8 & 6 & 0 \\ -4 & 10 & 6 & 0 \\ 4 & -8 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\left(\frac{8}{6}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} -p \\ -p \\ p \end{pmatrix}$$

například $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Charakteristický vektor matice A příslušný charakter. číslu $\lambda_{2;3} = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 8 & 6 & 0 \\ -4 & 8 & 6 & 0 \\ 4 & -8 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} 2q + 3r \\ q \\ 2r \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{např}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$