FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Matematika 1

Výpočet determinantů vyšších řádů Laplaceovým rozvojem

Studijní materiály

Pro listování dokumentem NEpoužívejte kolečko myši
nebo zvolte možnost *Full Screen*.

Brno 2016

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Laplaceův rozvoj determinantu

$$\boldsymbol{D} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \boldsymbol{D}_{ij} \qquad \text{rozvoj podle řádku } \boldsymbol{i} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{D} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \boldsymbol{D}_{ij} \qquad \text{rozvoj podle sloupce } \boldsymbol{j} \tag{2}$$

Příklad

Určete hodnotu determinantu 4. řádu rozvojem podle *nějakého* ***řádku*** $\Longrightarrow$ vzorec (1).
Tedy: ***Řádkový*** index $\boldsymbol{i}$ si zvolíme pevně výběrem řádku
a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ se bude (pro zvolený řádek) měnit od 1 do 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \sum_{\forall j} (-1)^{i+j} \cdot a_{i;j} \cdot \boldsymbol{D}_{i;j} = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{i+j} \cdot a_{i;j} \cdot \boldsymbol{D}_{i;j}$$

Cvičení

Determinant rozvineme podle **4. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se rovná **4** (1)
a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3, 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{4+} \cdot a_{4;} \cdot \boldsymbol{D}_{4;} \Longleftarrow 4.\ \text{řádek}\ /$$

Cvičení

Determinant rozvineme podle **4. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se rovná **4** (1)
a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3, 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

1. sčítanec: $(-1)^{4+1} \cdot a_{4;1} \cdot \boldsymbol{D}_{4;1} \Longleftarrow$ 4. řádek / 1. sloupec

$$= (-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+} \cdot \qquad + (-1)^{4+} \cdot$$

$$+(-1)^{4+} \cdot$$

$$= (1)\cdot[+(-1)\cdot(1)\cdot(-1) + (8)\cdot(0)\cdot(3) + (-3)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-3) - (1)\cdot(0)\cdot(-1) - (-1)\cdot(0)\cdot(8)\,]+$$

$+$

$+ \quad +$

$=$

Cvičení

Determinant rozvineme podle **4. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se rovná **4** (1)

a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3, 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

2. sčítanec: $(-1)^{4+2} \cdot a_{4;2} \cdot \boldsymbol{D}_{4;2} \Longleftarrow$ 4. řádek / 2. sloupec

$$= (-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+} \quad \cdot$$

$$+(-1)^{4+} \quad \cdot$$

$$= (1)\cdot[+(-1)\cdot(1)\cdot(-1) + (8)\cdot(0)\cdot(3) + (-3)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-3) - (1)\cdot(0)\cdot(-1) - (-1)\cdot(0)\cdot(8)\,]+$$

$$+(-2)\cdot[+(2)\cdot(1)\cdot(-1) + (1)\cdot(0)\cdot(3) + (-4)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-4) - (1)\cdot(0)\cdot(2) - (-1)\cdot(0)\cdot(1)\,]+$$

$$+ \quad +$$

$$=$$

Cvičení

Determinant rozvineme podle **4. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se rovná **4** (1)
a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3, 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

3. sčítanec: $(-1)^{4+3} \cdot a_{4;3} \cdot \boldsymbol{D}_{4;3} \Longleftarrow$ 4. řádek / 3. sloupec

$$= (-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot (0) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{4+} \quad \cdot$$

$$= (1)\cdot[+(-1)\cdot(1)\cdot(-1) + (8)\cdot(0)\cdot(3) + (-3)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-3) - (1)\cdot(0)\cdot(-1) - (-1)\cdot(0)\cdot(8)\,]+$$
$$+(-2)\cdot[+(2)\cdot(1)\cdot(-1) + (1)\cdot(0)\cdot(3) + (-4)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-4) - (1)\cdot(0)\cdot(2) - (-1)\cdot(0)\cdot(1)\,]+$$
$$+0+$$
$$=$$

Vidíme, že v pořadí třetí subdeterminant jsme vůbec nemuseli sestavovat a vyčíslovat, protože prvek $a_{4;3} = 0$ a tím pádem celý součin je také roven NULE.

Cvičení

Determinant rozvineme podle **4. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se rovná **4** (1)
a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3, 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

4. sčítanec: $(-1)^{4+4} \cdot a_{4;4} \cdot \boldsymbol{D}_{4;4} \Longleftarrow$ 4. řádek / 4. sloupec

$$= (-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot (0) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{4+4} \cdot (5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (1)\cdot[+(-1)\cdot(1)\cdot(-1) + (8)\cdot(0)\cdot(3) + (-3)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-3) - (1)\cdot(0)\cdot(-1) - (-1)\cdot(0)\cdot(8)\,]+$$

$$+(-2)\cdot[+(2)\cdot(1)\cdot(-1) + (1)\cdot(0)\cdot(3) + (-4)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-4) - (1)\cdot(0)\cdot(2) - (-1)\cdot(0)\cdot(1)\,]+$$

$$+0 + (5)\cdot[+(2)\cdot(8)\cdot(0) + (1)\cdot(-3)\cdot(0) + (-4)\cdot(-1)\cdot(1) - (0)\cdot(8)\cdot(-4) - (1)\cdot(-3)\cdot(2) - (0)\cdot(-1)\cdot(1)\,] =$$

$$=$$

Vidíme, že v pořadí třetí subdeterminant jsme vůbec nemuseli sestavovat a vyčíslovat, protože prvek $a_{4;3} = 0$ a tím pádem celý součin je také roven NULE.

Cvičení

Determinant rozvineme podle **4. řádku** $\Longrightarrow$ řádkový index $\boldsymbol{i}$ se rovná **4** (1)
a sloupcový index $\boldsymbol{j}$ nabývá postupně hodnot 1, 2, 3, 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \qquad (-1)^{4+} \cdot a_{4;} \cdot \boldsymbol{D}_{4;} \Longleftarrow 4.\ \text{řádek} \ /$$

$$= (-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot (0) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{4+4} \cdot (5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (1)\cdot[+(-1)\cdot(1)\cdot(-1) + (8)\cdot(0)\cdot(3) + (-3)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-3) - (1)\cdot(0)\cdot(-1) - (-1)\cdot(0)\cdot(8)\,]+$$
$$+(-2)\cdot[+(2)\cdot(1)\cdot(-1) + (1)\cdot(0)\cdot(3) + (-4)\cdot(0)\cdot(1) - (3)\cdot(1)\cdot(-4) - (1)\cdot(0)\cdot(2) - (-1)\cdot(0)\cdot(1)\,]+$$
$$+0 + (5)\cdot[+(2)\cdot(8)\cdot(0) + (1)\cdot(-3)\cdot(0) + (-4)\cdot(-1)\cdot(1) - (0)\cdot(8)\cdot(-4) - (1)\cdot(-3)\cdot(2) - (0)\cdot(-1)\cdot(1)\,] =$$

$$= (1)\cdot(+1 + 0 - 0 + 9 + 0 + 0) + (-2)\cdot(-2 + 0 - 0 + 12 - 0 + 0) + (5)\cdot(+0 - 0 + 4 + 0 + 6 + 0) =$$
$$= 1\cdot(10) - 2\cdot(10) + 5\cdot(10) = 10 - 20 + 50 = 40$$

Vidíme, že v pořadí třetí subdeterminant jsme vůbec nemuseli sestavovat a vyčíslovat, protože prvek $a_{4;3} = 0$ a tím pádem celý součin je také roven NULE.

Proto je nejvýhodnější, zvolit si rozvoj podle toho řádku či sloupce, který obsahuje nejvíce nul!
V tomto případě počítat rozvoj podle třetího sloupce.

Určete hodnotu determinantu rozvojem podle 3. sloupce

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0+(-1)^{2+3}\cdot(1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}+0+0 = (-1)\cdot(-30+24-1-9-4-20) = 40$$

Z právě uvedeného důvodu je výhodné použít některých operací s determinanty, které nemění jejich hodnotu [1] a pokud možno zjednodušují vyčíslení determinantů.

Tedy si pomocí vhodných úprav determinantu v nějaké jeho ***řadě*** (řádku či sloupci) vyrobíme co nejvíce nul. Nejlépe bude, když některá řada bude obsahovat ***pouze jeden nenulový*** prvek.

Úpravy determinantu

Za všechny jmenujme alespoň tuto nejpoužívanější.

Determinant se nezmění, přičteme-li k jedné jeho řadě (řádku či sloupci) libovolný **nenulový** násobek řady s ní rovnoběžné.

A pokud budeme upravovat ***vhodné*** řady determinantu tak, abychom získali jeho ***trojúhelníkový tvar***, můžeme potom hodnotu determinantu určovat následujícím způsobem:

[1] Případně pouze mění znaménko determinantu, či umožňují za určitých podmínek vytknout výraz před determinant.

(Horní – U) Trojúhelníkový tvar determinantu

(Horní – U) Trojúhelníkový tvar determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 5 & & \\ & & 8 & \\ & & & 10 \end{vmatrix}$$

Hlavní diagonála: $a_{1;1}$, $a_{2;2}$, $a_{3;3}$, … , $a_{n;n}$

(Horní – U) Trojúhelníkový tvar determinantu $\Leftarrow$ **pod hlavní diagonálou jsou pouze *NULY*!**

Všechny ostatní prvky mohou být naprosto libovolné.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

Hlavní diagonála: $a_{1;1}$, $a_{2;2}$, $a_{3;3}$, … , $a_{n;n}$

Hodnotu determinantu 4. řádu určíme **rozvojem podle 1. sloupce** $\Leftarrow$ má nejvíce nul

(Horní – U) Trojúhelníkový tvar determinantu $\Leftarrow$ **pod hlavní diagonálou jsou pouze *NULY*!**

Všechny ostatní prvky mohou být naprosto libovolné.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = [1] \cdot \left\{ \qquad \qquad \right\} =$$

Hlavní diagonála: $a_{1;1}$, $a_{2;2}$, $a_{3;3}$, … , $a_{n;n}$

Hodnotu determinantu 4. řádu určíme **rozvojem podle 1. sloupce** $\Leftarrow$ má nejvíce nul
(nebo můžeme počítat rozvojem podle *4. řádku* – má také hodně nul).

Hodnotu determinantu 3. řádu určíme opět **rozvojem opět podle 1. sloupce** (nebo 3. řádku).

(Horní – U) Trojúhelníkový tvar determinantu $\Longleftarrow$ **pod hlavní diagonálou jsou pouze *NULY*!**

Všechny ostatní prvky mohou být naprosto libovolné.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = [1] \cdot \left\{ (-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \right\} =$$

Hlavní diagonála: $a_{1;1}$, $a_{2;2}$, $a_{3;3}$, … , $a_{n;n}$

Hodnotu determinantu 4. řádu určíme **rozvojem podle 1. sloupce** $\Longleftarrow$ má nejvíce nul

(nebo můžeme počítat rozvojem podle *4. řádku* – má také hodně nul).

Hodnotu determinantu 3. řádu určíme opět **rozvojem opět podle 1. sloupce** (nebo 3. řádku).

Hodnotu determinantu 2. řádu určíme **křížovým pravidlem**.

$= [1] \cdot [5] \cdot [\qquad\qquad] =$

(Horní – U) Trojúhelníkový tvar determinantu $\Leftarrow$ **pod hlavní diagonálou jsou pouze *NULY*!**

Všechny ostatní prvky mohou být naprosto libovolné.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = [1] \cdot \left\{ (-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \right\} =$$

Hlavní diagonála: $a_{1;1}$, $a_{2;2}$, $a_{3;3}$, ... , $a_{n;n}$

Hodnotu determinantu 4. řádu určíme **rozvojem podle 1. sloupce** $\Leftarrow$ má nejvíce nul
(nebo můžeme počítat rozvojem podle *4. řádku* – má také hodně nul).

Hodnotu determinantu 3. řádu určíme opět **rozvojem opět podle 1. sloupce** (nebo 3. řádku).

Hodnotu determinantu 2. řádu určíme **křížovým pravidlem**.

$= [1] \cdot [5] \cdot [8 \cdot 10 - 9 \cdot 0] =$

(Horní – U) Trojúhelníkový tvar determinantu $\Leftarrow$ **pod hlavní diagonálou jsou pouze *NULY*!**

Všechny ostatní prvky mohou být naprosto libovolné.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = [1] \cdot \left\{ (-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0} \right\} =$$

Hlavní diagonála: $a_{1;1}$, $a_{2;2}$, $a_{3;3}$, … , $a_{n;n}$

Hodnotu determinantu 4. řádu určíme **rozvojem podle 1. sloupce** $\Leftarrow$ má nejvíce nul
(nebo můžeme počítat rozvojem podle *4. řádku* – má také hodně nul).

Hodnotu determinantu 3. řádu určíme opět **rozvojem opět podle 1. sloupce** (nebo 3. řádku).

Hodnotu determinantu 2. řádu určíme **křížovým pravidlem**.

$$= [1] \cdot [5] \cdot [8 \cdot 10 - 9 \cdot 0] = [1] \cdot [5] \cdot [8 \cdot 10] = 1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10$$

Hodnotu determinantu (ve schodovitém tvaru),

který má pod hlavní diagonálou pouze nuly,

vypočteme jako součin prvků stojících v hlavní diagonále.

Použitá literatura

[1] Demlová, M., Nagy, J. *Algebra.* Praha : SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha. 1982. 192 s.

[2] Diblík, J., Baštinec, J. *Matematika IV.* [skriptum] Brno : VUT, Fakulta elektrotechnická, 1991, 120 s. [Dostupné z adresy:] ⟨http://rschwarz.wz.cz/fast/DB_skripta.pdf⟩

[3] Chudý, J. *Determinanty a matice.* Praha : SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha. 1974, vydání druhé, doplněné. 216 s.

[4] Novotný, J. *Matematika I – Základy lineární algebry.* Brno : Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. VUT, Fakulta stavební, Brno, 2004, 81 s., ISBN: 80–214–2716–7

[5] Rychnovský, R. *Úvod do vyšší matematiky.* Praha : Státní zemědělské nakladatelství, Praha. 1968, vydání třetí, rozšířené. 518 s.

[6] Škrášek, J. *Základy vyšší matematiky.* Praha : Naše vojsko, 1966, 382 s.