Mějme rovnici $F(x;y)=0$ a bod $\mathcal{A}[x_0;y_0]$.
Pokud platí všechny tři následující podmínky:

1. $F(x_0;y_0)=0$;
2. v jistém okolí bodu $\mathcal{A}$ existují obě parciální derivace $F_x=\frac{\partial F}{\partial x}$ a $F_y=\frac{\partial F}{\partial y}$ a obě jsou v bodě $\mathcal{A}$ spojité;
3. a navíc $F_y(x_0;y_0)\neq 0$,

pak v nějakém okolí bodu $\mathcal{A}$ ***existuje*** právě jedna spojitá funkce jedné reálné proměnné (určitě existuje, i když ji třeba neumíme vyjádřit) $y=y(x)$, pro jejíž derivaci platí:

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}\,.$$

Potom říkáme, že funkce $y=y(x)$ je v okolí bodu $\mathcal{A}$ určena ***implicitně*** rovnicí

$$F(x;y)=0\,.$$

Derivaci implicitní funkce nejčastěji počítáme, jako derivaci ***složené*** funkce, protože tento způsob umožňuje výpočet derivací vyšších řádů bez použití stále komplikovanějších vzorců.

1.1. $[x\in\mathbb{R};\ y\in\mathbb{R}]$ V bodě $A[0;2]$ napište hodnotu třetí derivace $y'''(A)$, pokud je rovnicí

$$\underbrace{y^3-xy-8}_{F(x;y)}=0$$

určena implicitní funkce $y=y(x)$.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu A vyhovují zadané rovnici:

$$\underbrace{2^3}_{8}-0\cdot 2-8=0$$

Potom spočítáme první ***parciální derivace***. Pokud jsou obě dvě F_x , F_y v okolí bodu A spojité a navíc hodnota $F_y(A)\neq 0$, pak existuje v okolí tohoto bodu funkce $y=y(x)$ daná implicitně rovnicí.

$F_x=-y$ derivace F_x je spojitá $\forall y$
$F_y=3y^2-x$ derivace F_y je spojitá $\forall x;y$ a $F_y(A)=12\neq 0$

V okolí bodu A uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y=y(x)$.

Její (**„obyčejnou“**)

první derivaci budeme počítat jako derivaci složené funkce, kde písmeno y označuje ***funkci*** proměnné x:

$$\begin{aligned}
\left(y^3 - xy - 8\right)' &= (0)' \\
\left(y^3\right)' - (xy)' - (8)' &= 0 \\
\left[3y^2 \cdot y'\right] - \left[(1 \cdot y) + (x \cdot y')\right] - 0 &= 0 \\
3y^2y' - y - xy' &= 0 \\
y'(3y^2 - x) &= y
\end{aligned}$$

pro $x \neq 3y^2$ (bod A splňuje) $y' = \dfrac{y}{3y^2 - x}$

Druhou derivaci budeme ..., kde $y = y(x)$:

$$y'' = (y')' = \frac{y' \cdot (3y^2 - x) - y \cdot (6yy' - 1)}{\left(3y^2 - x\right)^2} = \frac{y - xy' - 3y^2y'}{9y^4 - 6xy^2 + x^4}$$

Nebo

$$\begin{aligned}
(3y^2y' - y - xy')' &= (0)' \\
(6y \cdot y' + 3y^2 \cdot y'') - (y') - (1 \cdot y' + x \cdot y'') &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Třetí derivaci ..., kde $y = y(x)$:

$$y''' = \frac{\left[y' - (1 \cdot y' + x \cdot y'') - 3(2yy' \cdot y' + y^2 \cdot y'')\right] \cdot (9y^4 - 6xy^2 + x^4)}{\left(9y^4 - 6xy^2 + x^4\right)^2} - \\ - \frac{(y - xy' - 3y^2y') \cdot \left[36y^3y' - 6(1 \cdot y^2 + x \cdot 2yy') + 4x^3\right]}{\left(9y^4 - 6xy^2 + x^4\right)^2}$$

Pro hodnotu třetí derivace v bodě $A[0;2]$ dosadíme souřadnice daného bodu.
Ve skriptech [1] **je** na straně 50 (osmý řádek shora) uvedena **chybná hodnota druhé derivace**.

$$y' = \frac{y}{3y^2 - x} \qquad \Rightarrow \qquad y'(A) = \frac{2}{3 \cdot 2^2 - 0} = \frac{1}{6}$$

$$y'' = \frac{y - xy' - 3y^2y'}{9y^4 - 6xy^2 + x^4} \qquad \Rightarrow \qquad y''(A) = \frac{2 - 0 \cdot \frac{1}{6} - 3 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{6}}{9y^4 - 6xy^2 + x^4} = \underline{\underline{0}}$$

$$y'''(A) = \frac{\left[\underbrace{\frac{1}{6} - \frac{1}{6}}_{0} - 12 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2\right] \cdot (9 \cdot 2^4) - \left(\underbrace{2 - 12 \cdot \frac{1}{6}}_{0}\right) \cdot \left[36 \cdot 8 \cdot \frac{1}{6} - 24\right]}{(9 \cdot 2^4)^2} = \frac{-\frac{1}{3}}{9 \cdot 16} = -\frac{1}{432}$$

[1] Tryhuk, V., Dlouhý, O. *Matematika I – Diferenciální počet funkcí více reálných proměnných.* 1. vydání. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s. r. o., 2004. 85 s. ISBN 80–214–2776–0

1.2. $[x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}]$ V bodě $T[x_T;1]$, (kde $x_T < 0$) napište rovnici tečny a normály procházející bodem T pokud je rovnicí

$$x^2y - 2 = xy^3$$

určena implicitní funkce $y = y(x)$.

Napřed dopočítáme chybějící souřadnici bodu T :

$$x_T^2 \cdot 1 - 2 = x_T \cdot 1^3$$
$$x_T^2 - x_T - 2 = 0$$
$$(x_T + 1) \cdot (x_T - 2) = 0$$

Tečný bod $T[-1;1]$, protože $x_{T_2} = 2 > 0$.

Potom rovnici upravíme na tvar ***F(x ; y) = 0*** a spočítáme první ***parciální derivace***.

$$\underbrace{xy^3 - x^2y + 2}_{F(x\,;\,y)} = 0$$

Pokud jsou obě dvě F_x , F_y v okolí bodu T spojité a navíc hodnota $F_y(T) \neq 0$, pak existuje v okolí bodu T funkce $y = y(x)$ daná implicitně uvedenou rovnicí a k této funkci v bodě T existuje tečna a normála.

$F_x = y^3 - 2xy$ derivace F_x je spojitá $\forall x; y$

$F_y = 3xy^2 - x^2$ derivace F_y je spojitá $\forall x; y$ a $F_y(T) = -4 \neq 0$

V okolí bodu T uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y(x)$. Její („***obyčejnou***")

derivaci budeme počítat jako derivaci složené funkce, kde písmeno y označuje ***funkci*** proměnné x :

$$\left(x^2y - 2\right)' = \left(xy^3\right)'$$
$$\left(x^2y\right)' - (2)' = 1 \cdot y^3 + x \cdot (y^3)'$$
$$2x \cdot y + x^2 \cdot y' - 0 = y^3 + x \cdot (3y^2 \cdot y')$$
$$x^2 \cdot y' - 3xy^2 \cdot y' = y^3 - 2xy$$

pro $x \neq 3y^2$ (bod T splňuje) $\quad y' = \dfrac{y^3 - 2xy}{x^2 - 3xy^2}$

Víme, že hodnota derivace funkce v daném bodě je rovna směrnici tečny ke grafu této funkce v tomto bodě.

Pro hodnotu derivace v bodě $T[-1;1]$ dosadíme souřadnice daného bodu.

$$y' = \frac{y^3 - 2xy}{x^2 - 3xy^2} \qquad \Rightarrow \qquad y'(T) = \frac{(1)^3 - 2\cdot(-1)\cdot(1)}{(-1)^2 - 3\cdot(-1)\cdot(1)^2} = \frac{3}{4}$$

Rovnice tečny k funkci $y(x)$ **v bodě** $T[x_T;y_T]$ **:** $y - y_T = y'(T)\cdot(x - x_T)$

$$y - 1 = \tfrac{3}{4}\cdot[x - (-1)]$$
$$4y - 4 = 3x + 3$$
$$3x - 4y + 7 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{n} = (3;-4)\,,$$

kde $\vec{n}$ je normálový vektor.

Obecná rovnice tečny t **:** $3x - 4y + 7 = 0$

Parametrické rovnice normály n **:**

$$x = -1 + 3p \mid \cdot 4$$
$$y = 1 - 4p \quad \mid \cdot 3$$

Obecná rovnice normály n : $4x + 3y + 1 = 0$

1.3. $[x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}]$ Určete $y'(0)$ a $y''(0)$ pokud je rovnicí

$$y\cdot\sin x + x^2 + y^3 = 1$$

určena implicitní funkce $y = y(x)$, pro kterou platí $y(0) = 1$.

Z podmínky $y(0) = 1$ plyne, že nás zajímá okolí bodu $B[0;1]$. Proto napřed ověříme, zda souřadnice bodu B vyhovují zadané rovnici:

$$1\cdot\underbrace{\sin 0}_{0} + 0^2 + 1^3 = 1$$

Potom rovnici upravíme na tvar ***F(x ; y) = 0*** a spočítáme první ***parciální derivace.***

$$\underbrace{y\cdot\sin x + x^2 + y^3 - 1}_{F(x\,;\,y)} = 0$$

Pokud jsou obě dvě F_x , F_y v okolí bodu B spojité a navíc hodnota $F_y(B) \neq 0$, pak existuje v okolí tohoto bodu funkce $y = y(x)$ daná implicitně rovnicí.

$F_x = y\cdot\cos x + 2x$ derivace F_x je spojitá $\forall x; y$

$F_y = \sin x + 3y^2$ derivace F_y je spojitá $\forall x; y$ a $F_y(B) = 3 \neq 0$

V okolí bodu B uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y = y(x)$.

Její (*„obyčejnou“*)

první derivaci budeme počítat jako derivaci složené funkce, kde písmeno y označuje ***funkci*** proměnné x :

$$\left(y \cdot \sin x + x^2 + y^3 - 1\right)' = (0)'$$

$$(y \cdot \sin x)' + \left(x^2\right)' + \left(y^3\right)' - (1)' = 0$$

$$[y' \cdot \sin x + y \cdot \cos x] + 2x + 3y^2 \cdot y' - 0 = 0$$

$$y'\left(\sin x + 3y^2\right) = -2x - y \cdot \cos x$$

pro $\sin x \neq -3y^2$ (bod B splňuje) $y' = -\dfrac{2x + y \cdot \cos x}{\sin x + 3y^2}$

Druhou derivaci budeme ..., kde $y = y(x)$:

$$y'' = -\frac{(2x + y \cdot \cos x)' \cdot (\sin x + 3y^2) - (2x + y \cdot \cos x) \cdot \left(\sin x + 3y^2\right)'}{\left(\sin x + 3y^2\right)^2} =$$

$$= -\frac{\{2 + [y' \cdot \cos x + y \cdot (-\sin x)]\} \cdot (\sin x + 3y^2) - (2x + y \cdot \cos x) \cdot (\cos x + 6y \cdot y')}{\left(\sin x + 3y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{-(2 + y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x) \cdot (\sin x + 3y^2) + (2x + y \cdot \cos x) \cdot (\cos x + 6y \cdot y')}{\left(\sin x + 3y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{(y \cdot \sin x - 2 - y' \cdot \cos x) \cdot (\sin x + 3y^2) + (2x + y \cdot \cos x) \cdot (\cos x + 6y \cdot y')}{\left(\sin x + 3y^2\right)^2}$$

Pro hodnotu obou derivací v bodě $B[0;1]$ dosadíme souřadnice daného bodu.

$$y' = -\frac{2x + y \cdot \cos x}{\sin x + 3y^2} \quad \Rightarrow \quad y'(B) = -\frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot \overbrace{\cos 0}^{1}}{\underbrace{\sin 0}_{0} + 3 \cdot 1^2} = -\frac{1}{3}$$

$$y''(B) = \frac{(1 \cdot \sin 0 - 2 + \frac{1}{3} \cdot \cos 0) \cdot (\sin 0 + 3 \cdot 1^2) + (2 \cdot 0 + 1 \cdot \cos 0) \cdot (\cos 0 - 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3})}{\left(\sin 0 + 3 \cdot 1^2\right)^2} =$$

$$= \frac{(0 - 2 + \frac{1}{3}) \cdot (0 + 3) + (0 + 1) \cdot (1 - 2)}{(3)^2} = \frac{-5 - 1}{9} = -\frac{2}{3}$$

1.4. $[x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}]$ Určete $y'(C)$ pokud je rovnicí

$$x^2 + y^2 + x + y = 2xy + 2$$

a bodem $C = [1;?]$ určena implicitní funkce $y = y(x)$.

Napřed dopočítáme chybějící souřadnici tak, aby bod C vyhovoval zadané rovnici:

$$1^2 + y^2 + 1 + y = 2 \cdot 1 \cdot y + 2$$
$$y^2 - y = 0$$
$$y \cdot (y - 1) = 0$$

Dostáváme dva body $C_1 = [1;0]$ a $C_2 = [1;1]$.
Potom rovnici upravíme na tvar ***F(x ; y) = 0*** a spočítáme první ***parciální derivace***.

$$\underbrace{x^2 + y^2 - 2xy + x + y - 2}_{F(x\,;\,y)} = 0$$

Pokud jsou obě dvě F_x , F_y v okolí bodu C spojité a navíc hodnota $F_y(C) \neq 0$, pak existuje v okolí tohoto bodu funkce $y = y(x)$ daná implicitně rovnicí.

$F_x = 2x - 2y + 1$ derivace F_x je spojitá $\forall x; y$

$F_y = 2y - 2x + 1$ derivace F_y je spojitá $\forall x; y$ a $F_y(C_1) = -1 \neq 0$; $F_y(C_2) = 1 \neq 0$

V okolí obou bodů C_1 i C_2 uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y = y(x)$.

$$\underbrace{1}_{a} \cdot y^2 - (\underbrace{2x - 1}_{b}) \cdot y + (\underbrace{x^2 + x - 2}_{c}) = 0$$

$$y_{1;2} = \frac{2x - 1 \pm \sqrt{[-(2x-1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^2 + x - 2)}}{2} = \frac{2x - 1 \pm \sqrt{9 - 8x}}{2}$$

Úloha má tedy dvě řešení. V okolí bodu $C_1 = [1;0]$ lze implicitní funkci vyjádřit explicitně, jako

$$y_1 = \frac{2x - 1 - (9 - 8x)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2} \cdot \left[2 - \frac{1}{2} \cdot (9 - 8x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-8)\right] \qquad y'(1) = 3$$

a v okolí bodu $C_2 = [1;1]$ jako

$$y_2 = \frac{2x - 1 + (9 - 8x)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2} \cdot \left[2 + \frac{1}{2} \cdot (9 - 8x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-8)\right] \qquad y'(1) = -1$$

A co když nedokážeme funkci vyjádřit explicitně? Pak budeme (***„obyčejnou“***)

derivaci počítat jako derivaci složené funkce, kde písmeno y označuje ***funkci*** proměnné x :

$$\left(x^2+y^2+x+y\right)'=(2xy+2)'$$
$$\left(x^2\right)'+\left(y^2\right)'+(x)'+(y)'=(2xy)'+(2)'$$
$$2x+2yy'+1+y'=2(1\cdot y+x\cdot y')+0$$
$$y'(2y+1-2x)=-2x-1+2y$$

pro $2x\neq 2y+1$ (oba body C splňují) $\quad y'=\dfrac{2y-2x-1}{2y+1-2x}$

Pro hodnotu derivací v obou bodech $C_1[1;0]$ **a** $C_2[1;1]$ dosadíme souřadnice daného bodu.

$$y'=\frac{2y-2x-1}{2y+1-2x}\quad\Rightarrow\quad y'(C_1)=\frac{2\cdot 0-2\cdot 1-1}{2\cdot 0+1-2\cdot 1}=\frac{-3}{-1}=3$$

$$y'=\frac{2y-2x-1}{2y+1-2x}\quad\Rightarrow\quad y'(C_2)=\frac{2\cdot 1-2\cdot 1-1}{2\cdot 1+1-2\cdot 1}=\frac{-1}{1}=-1$$

1.5. $[x\in\mathbb{R}\setminus\{0\};\ y\in\mathbb{R}]$ V bodě $D=[1;0]$ určete hodnotu (první) derivace $y'(D)$, pokud je rovnicí

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

určena implicitní funkce $y=y(x)$.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu D vyhovují zadané rovnici:

$$\underbrace{\ln\sqrt{1^2+0^2}}_{0}=\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{0}{1}}_{0}$$

Potom rovnici upravíme na tvar ***F(x ; y) = 0*** a spočítáme první ***parciální derivace***.

$$F:\ \ln\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}-\operatorname{arctg}\left(y\cdot\frac{1}{x}\right)=0$$

Pokud jsou obě dvě F_x , F_y v okolí bodu D spojité a navíc hodnota $F_y(D) \neq 0$, pak existuje v okolí tohoto bodu funkce $y = y(x)$ daná implicitně rovnicí.

$$F_x = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot y \cdot \frac{-1}{x^2} \quad \text{derivace } F_x \text{ je spojitá } \forall x \neq 0$$

$$F_y = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{x} \quad \text{derivace } F_y \text{ je spojitá } \forall x \neq 0$$

$$F_y(D) = -1 \neq 0$$

V okolí bodu $D = [1;0]$ tedy uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y = y(x)$.

Její (*„obyčejnou“*)

první derivaci budeme počítat jako derivaci složené funkce, kde písmeno y označuje ***funkci*** proměnné x :

$$\left[\ln\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'$$

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+2y\cdot y') = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y'\cdot x - y\cdot 1}{x^2}$$

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \cancel{2} \cdot (x+yy') = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy'-y}{x^2}$$

$$\frac{x+yy'}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy'-y}{x^2}$$

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{\cancel{x^2}}{x^2+y^2} \cdot \frac{xy'-y}{\cancel{x^2}} \qquad |\left(x^2+y^2\right)$$

$$x+yy' = xy'-y$$

$$x+y = xy'-yy'$$

pro $x \neq y$ (bod D splňuje) $\dfrac{x+y}{x-y} = y'$

Pro hodnotu derivace v bodě $D[1;0]$ dosadíme souřadnice daného bodu.

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \quad \Rightarrow \quad y'(D) = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

1.6. $[x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}]$ V bodě $E[0;1]$ určete hodnotu (první) derivace $y'(E)$, pokud je rovnicí

$$\underbrace{\left(x^2+y^2\right)^2-3x^2y-y^3}_{F(x;y)}=0$$

určena implicitní funkce $y=y(x)$.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu E vyhovují zadané rovnici:

$$\underbrace{\left(0^2+1^2\right)^2}_{1}-3\cdot 0\cdot 1-1^3=0$$

Potom spočítáme první ***parciální derivace***. Pokud jsou obě dvě F_x , F_y v okolí bodu E spojité a navíc hodnota $F_y(E)\neq 0$, pak existuje v okolí tohoto bodu funkce $y=y(x)$ daná implicitně rovnicí.

$F_x=2(x^2+y^2)^1\cdot 2x-6xy$ derivace F_x je spojitá $\forall x;y$

$F_y=2(x^2+y^2)\cdot 2y-3x^2-3y^2$ derivace F_y je spojitá $\forall x;y$ a $F_y(E)=1\neq 0$

V okolí bodu E uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y=y(x)$.

Její („***obyčejnou***“)

první derivaci budeme počítat jako derivaci složené funkce, kde písmeno y označuje ***funkci*** proměnné x :

$$\left[\left(x^2+y^2\right)^2-3x^2y-y^3\right]'=(0)'$$

$$\left[\left(x^2+y^2\right)^2\right]'-\left(3x^2\cdot y\right)'-\left(y^3\right)'=0$$

$$\left[2(x^2+y^2)^1\cdot(2x+2y\cdot y')\right]-\left[(6x\cdot y)+(3x^2\cdot y')\right]-(3y^2\cdot y')=0$$

$$y'[4y(x^2+y^2)-3x^2-3y^2]=6xy-4x(x^2+y^2)$$

Pro hodnotu derivace v bodě $E[0;1]$ dosadíme souřadnice daného bodu.

$$y'=\frac{6xy-4x(x^2+y^2)}{4y(x^2+y^2)-3x^2-3y^2}\quad\Rightarrow\quad y'(E)=\frac{6\cdot 0\cdot 1-4\cdot 0\cdot(0^2+1^2)}{4\cdot 1\cdot(0^2+1^2)-3\cdot 0^2-3\cdot 1^2}=0$$

Bod E je pro danou funkci *stacionárním* bodem.

1.7. $[x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}]$ Pokud je bodem $G = [1;-1]$ a rovnicí

$$\underbrace{x^4 + y^3 + 2x^2y + 2}_{F(x;y)} = 0$$

určena implicitní funkce $y = y(x)$, najděte její lokální extrémy.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu G vyhovují zadané rovnici:

$$1^4 + (-1)^3 + 2 \cdot 1^2 \cdot (-1) + 2 = 0$$

Potom spočítáme první ***parciální derivace***. Pokud jsou obě dvě F_x , F_y v okolí bodu G spojité a navíc hodnota $F_y(G) \neq 0$, pak existuje v okolí tohoto bodu funkce $y = y(x)$ daná implicitně rovnicí.

$F_x = 4x^3 + 4x \cdot y$ derivace F_x je spojitá $\forall x; y$

$F_y = 3y^2 + 2x^2$ derivace F_y je spojitá $\forall x; y$ a $F_y(G) = 5 \neq 0$

V okolí bodu G uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y = y(x)$.

Její (***„obyčejnou“***)
první derivaci budeme počítat jako derivaci složené funkce, kde $y(x)$:

$$\left(x^4 + y^3 + 2x^2y + 2\right)' = (0)'$$

$$\left(x^4\right)' + \left(y^3\right)' + \left(2x^2y\right)' + (2)' = 0$$

$$4x^3 + 3y^2 \cdot y' + (4x \cdot y + 2x^2 \cdot y') + 0 = 0$$

$$y' \cdot (3y^2 + 2x^2) = -4x^3 - 4xy$$

pro $2x^2 \neq -3y^2$ (bod G splňuje) $\qquad y' = -\dfrac{4 \cdot x \cdot (x^2 + y)}{3y^2 + 2x^2}$

Lokální extrém může nastat pouze v bodech, kde:

A) první derivace (y') neexistuje $\implies$ $x = 0 \ \wedge\ y = 0$

B) první derivace se rovná nule $\implies$ $x = 0 \ \vee\ x^2 + y = 0$

1.7.A Bod $[0;0]$ vyhovující první podmínce ovšem neleží na funkci:

$$F(0;0) = 0^4 + 0^3 + 2 \cdot 0^2 \cdot 0 + 2 = 2 \neq 0$$

1.7.B.1. **Když** $x = 0$, pak:

$$F(0;y) = 0^4 + y^3 + 2 \cdot 0^2 \cdot y + 2 = 0$$

$$y^3 = -2$$

$$y = -\sqrt[3]{2}$$

Bod, který nás zajímá, má souřadnice $A = [0;-\sqrt[3]{2}]$. Ověříme, zda je v okolí bodu A definována funkce $y = y(x)$. Podmínka spojitosti parciálních derivací je splněna (viz výše), zbývá tedy ověřit, zda $F_y(A) \neq 0$.

$$F_y = 3y^2 + 2x^2 \qquad \Rightarrow \qquad F_y(A) = 3 \cdot \left(-\sqrt[3]{2}\right)^2 + 2 \cdot 0^2 = 3 \cdot \sqrt[3]{4} \neq 0$$

1.7.B.2. Když $x^2 + y = 0$, pak:

$$F(x;-x^2) = x^4 + \left(-x^2\right)^3 + 2 \cdot x^2 \cdot \left(-x^2\right) + 2 = 0$$

$$-x^6 - x^4 + 2 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

zavedeme substituci: $x^2 = s$ $\qquad s^3 + s - 2 = 0$

HS	1	0	1	−2
1	1	1	2	0

možné kořeny ± 1 ; ± 2

$$(s-1) \cdot \left(s^2 + s + 2\right) = 0$$

$$s_1 = 1$$

(záporný diskriminant) $\quad s_{2;3} =$ komplexně sdružené

$$x^2 = 1$$

$$x_{1;2} = \pm 1$$

Body, který nás zajímají, mají souřadnice $B = [-1;-1]$ a $G = [1;-1]$. Ověříme, zda je v okolí bodu B definována funkce $y = y(x)$. Podmínka spojitosti parciálních derivací je splněna (viz výše, stejně jako bod G), zbývá tedy ověřit, zda $F_y(B) \neq 0$.

$$F_y = 3y^2 + 2x^2 \qquad \Rightarrow \qquad F_y(B) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)^2 = 5 \neq 0$$

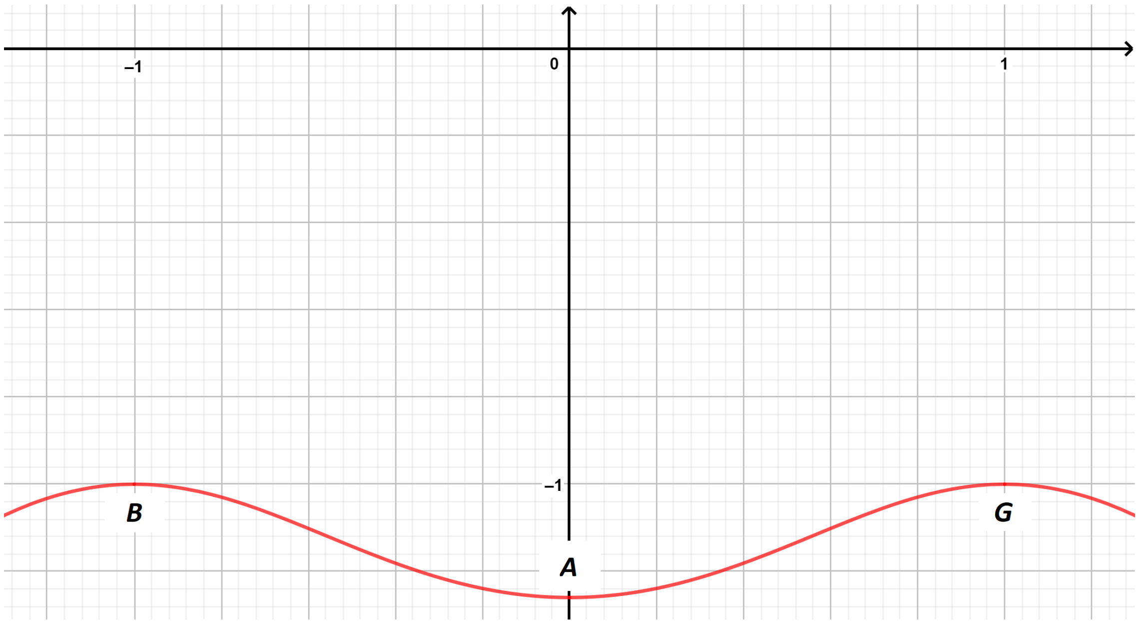
Body *„podezřelé“* z extrému (**může** v nich být lokální extrém). Zda skutečně je, zjistíme ze znamének první derivace. Jestliže $y'(\mathcal{A}) > 0$ pak v tomto bodě funkce roste, …

$$B = [-1;-1] \qquad \lim_{x \to B^-} \left[-\frac{4 \cdot x \cdot (x^2+y)}{3y^2+2x^2}\right] = -\frac{4 \cdot (-1^-) \cdot \overbrace{[(-1^-)^2+(-1)]}^{>0}}{3(-1)^2+2(-1^-)^2} > 0 \qquad \lim_{x \to B^+} \dots$$

$$A = [0;-\sqrt[3]{2}] \qquad \lim_{x \to A^-} \left[-\frac{4 \cdot x \cdot (x^2+y)}{3y^2+2x^2}\right] = \dots \qquad \lim_{x \to A^+} \left[-\frac{4 \cdot x \cdot (x^2+y)}{3y^2+2x^2}\right] = \dots$$

$$G = [1;-1] \qquad \lim_{x \to G^-} \left[-\frac{4 \cdot x \cdot (x^2+y)}{3y^2+2x^2}\right] = \dots \qquad \lim_{x \to G^+} \left[-\frac{4 \cdot x \cdot (x^2+y)}{3y^2+2x^2}\right] = \dots$$

Ze znamének 1. derivace: $+++\,[B]\,---\,[A]\,+++\,[G]\,---$ určíme intervaly, ve kterých funkce roste a klesá. Proto v bodě: $B = [-1;-1]$ je lokální MAXIMUM;
$A = [0;-\sqrt[3]{2}]$ je lokální minimum;
$G = [1;-1]$ je lokální MAXIMUM.



1.8. $[x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}]$ Pokud je bodem $H = [-1;0]$ a rovnicí

$$\underbrace{x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1}_{F(x;y)} = 0$$

určena implicitní funkce $y = y(x)$, najděte její lokální extrémy.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu H vyhovují zadané rovnici:

$$(-1)^2 - 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0$$

Potom spočítáme první ***parciální derivace***. Pokud jsou obě dvě F_x , F_y v okolí bodu H spojité a navíc hodnota $F_y(H) \neq 0$, pak existuje v okolí tohoto bodu funkce $y = y(x)$ daná implicitně rovnicí.

$F_x = 2x - 2y + 2$ derivace F_x je spojitá $\forall x; y$

$F_y = -2x + 4y$ derivace F_y je spojitá $\forall x; y$ a $F_y(H) = 2 \neq 0$

V okolí bodu H uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $y = y(x)$.

Její („***obyčejnou***“)
první derivaci budeme počítat jako derivaci složené funkce, kde $y(x)$:

$$\left(x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1\right)' = (0)'$$
$$\left(x^2\right)' - (2xy)' + \left(2y^2\right)' + (2x)' + (1)' = 0$$
$$2x - (2y + 2x \cdot y') + 4y \cdot y' + 2 + 0 = 0$$
$$2x - 2y + 2 = 2xy' - 4yy'$$
$$2 \cdot (x - y + 1) = 2y' \cdot (x - 2y)$$

pro $x \neq 2y$ (bod G splňuje) $\dfrac{x - y + 1}{x - 2y} = y'$

Lokální extrém může nastat pouze v bodech, kde:

A) první derivace (y') neexistuje $\Rightarrow$ $x = 2y$
B) první derivace se rovná nule $\Rightarrow$ $x + 1 = y$

1.8.A Když $x = 2y$, pak:

$$F(2y; y) = (2y)^2 - 2 \cdot (2y) \cdot y + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot (2y) + 1 = 0$$
$$2y^2 + 4y + 1 = 0$$
$$y_{1;2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot (4 - 2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Body, který nás zajímají, mají souřadnice $A = [-2 + \sqrt{2}; \frac{-2+\sqrt{2}}{2}]$ a $B = [-2 - \sqrt{2}; \frac{-2-\sqrt{2}}{2}]$.

Ověříme, zda je v jejich okolí definována funkce $y = y(x)$. Podmínka spojitosti parciálních derivací je splněna (viz výše), zbývá tedy ověřit, zda $F_y(A) \neq 0$ a $F_y(B) \neq 0$.

$$F_y = -2x + 4y \qquad \begin{aligned} F_y(A) &= -2\left(-2 + \sqrt{2}\right) + 4 \cdot \tfrac{-2+\sqrt{2}}{2} = -2\left(-2 + \sqrt{2}\right) + 2\left(-2 + \sqrt{2}\right) = 0 \\ F_y(B) &= -2\left(-2 - \sqrt{2}\right) + 4 \cdot \tfrac{-2-\sqrt{2}}{2} = -2\left(-2 - \sqrt{2}\right) + 2\left(-2 - \sqrt{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Ani jedním bodem není určena funkce, proto ani v jednom z uvedených bodů nemůže nastat extrém (funkce).

1.8.B Když $y = x + 1$, pak:

$$F(x; x + 1) = x^2 - 2x \cdot (x + 1) + 2 \cdot (x + 1)^2 + 2x + 1 = 0$$
$$x^2 - 2x^2 - 2x + 2 \cdot \left(x^2 + 2x + 1\right) + 2x + 1 = 0$$
$$x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$x_{1;2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

Body, který nás zajímají, mají souřadnice $H = [-1;0]$ a $C = [-3;-2]$. Ověříme, zda je v okolí bodu C definována funkce $y = y(x)$. Podmínka spojitosti parciálních derivací je splněna (viz výše, stejně jako bod H), zbývá tedy ověřit, zda $F_y(C) \neq 0$.

$$F_y = -2x + 4y \qquad \Rightarrow \qquad F_y(C) = -2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) = -2 \neq 0$$

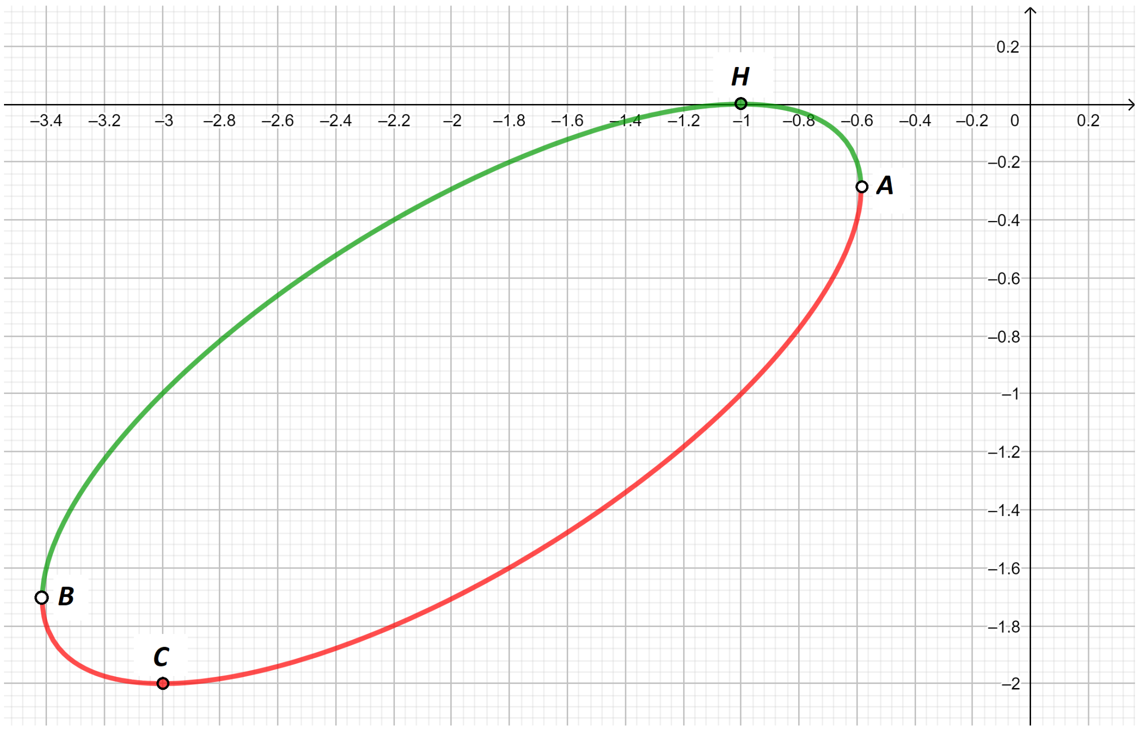
Ovšem jak zjistíme z obrázku, každý z těchto bodů leží na jiné funkci. Bod H je na **zelené** funkci určené implicitně rovnicí a bod C je na druhé **červené** funkci.

Body *„podezřelé“* z extrému (**může** v nich být lokální extrém). Zda skutečně je, zjistíme ze znamének první derivace. Jestliže $y'(\mathcal{A}) > 0$ pak v tomto bodě funkce roste, …

$$H = [-1;0] \qquad \lim_{x \to H^-} \left[\frac{x-y+1}{x-2y}\right] = -\frac{4 \cdot (-1^-) \cdot \overbrace{[(-1^-)^2 + (-1)]}^{>0}}{3(-1)^2 + 2(-1^-)^2} > 0 \qquad \lim_{x \to H^+} \dots$$

$$C = [-3;-2] \qquad \lim_{x \to C^-} \left[\frac{x-y+1}{x-2y}\right] = \dots \qquad \lim_{x \to C^+} \left[\frac{x-y+1}{x-2y}\right] = \dots$$

Ze znamének 1. derivace: $- - - [C] + + + \qquad + + + [H] - - -$ určíme intervaly, ve kterých funkce roste a klesá. Proto v bodě: $C = [-3;-2]$ je lokální minimum;
$H = [-1;0]$ je lokální MAXIMUM.



Mějme rovnici $F(x;y;z)=0$ a bod $\mathcal{A}[x_0;y_0;z_0]$.
Pokud platí následující všechny tři podmínky:

1. $F(x_0;y_0;z_0)=0$;
2. v jistém okolí bodu $\mathcal{A}$ existují všechny tři parciální derivace
   $F_x=\frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y=\frac{\partial F}{\partial y}$ a $F_z=\frac{\partial F}{\partial z}$ a všechny jsou v bodě $\mathcal{A}$ spojité;
3. a navíc $F_z(x_0;y_0;z_0)\neq 0$;

pak v nějakém okolí bodu $\mathcal{A}$ ***existuje*** právě jedna spojitá funkce dvou reálných proměnných (určitě existuje, i když ji třeba neumíme vyjádřit) $z=z(x;y)$, pro jejíž parciální derivace platí:

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z} \quad \text{a} \quad z_y=-\frac{F_y}{F_z}$$

Potom říkáme, že funkce $z=z(x;y)$ je v okolí bodu $\mathcal{A}$ určena ***implicitně*** rovnicí

$$F(x;y;z)=0\,.$$

2.1. $[x\in\mathbb{R}\,;\ y\in\mathbb{R}\,;\ Z\in\mathbb{R}]$ V bodě $A=[0;0;4]$ napište totální diferenciál **druhého řádu** $\mathrm{d}^2f(A)$, pokud je rovnicí

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{16}=1$$

určena implicitní funkce $z=z(x;y)$.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu A vyhovují zadané rovnici:

$$\frac{0^2}{4}+\frac{0^2}{8}+\frac{4^2}{16}=1$$

Potom rovnici upravíme na tvar ***F(x ; y ; z) = 0*** a spočítáme první ***parciální derivace***.

$F_x=\frac{2x}{4}$ derivace F_x je spojitá $\forall x$

$F_y=\frac{2y}{8}$ derivace F_y je spojitá $\forall y$

$F_z=\frac{2z}{16}$ derivace F_z je spojitá $\forall z$ a $F_z(A)=\frac{1}{2}\neq 0$

V okolí bodu A uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $z(x;y)$.

Parciální derivace budeme počítat jako derivace složené funkce, kde písmeno z označuje ***funkci*** proměnných $x; y$:

$$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{16}\right)'=(1)'$$

$$z_x : \qquad \left(\frac{x^2}{4}\right)_x+\left(\frac{y^2}{8}\right)_x+\left(\frac{z^2}{16}\right)_x=(1)_x$$

$$\frac{2x}{4}+0+\frac{2z\cdot z_x}{16}=0 \qquad |\cdot 8$$

$$4x+zz_x=0$$

$$zz_x=-4x$$

pro $z \neq 0$ (bod A splňuje) $z_x=-\dfrac{4x}{z}$

$$z_y : \qquad \left(\frac{x^2}{4}\right)_y+\left(\frac{y^2}{8}\right)_y+\left(\frac{z^2}{16}\right)_y=(1)_y$$

$$0+\frac{2y}{8}+\frac{2z\cdot z_y}{16}=0 \qquad |\cdot 8$$

$$2y+zz_y=0$$

$$zz_y=-2y$$

pro $z \neq 0$ (bod A splňuje) $z_y=-\dfrac{2y}{z}$

Druhé parciální derivace budeme počítat ..., kde $z(x; y)$:

$$z_{xx}=-\frac{4\cdot z-4x\cdot z_x}{z^2}=-\frac{4\cdot z-4x\cdot\left(-\frac{4x}{z}\right)}{z^2} \qquad z_{xy}=-\frac{0\cdot z-4x\cdot z_y}{z^2}=-\frac{0\cdot z-4x\cdot\left(-\frac{2y}{z}\right)}{z^2}$$

$$z_{yx}=-\frac{0\cdot z-2y\cdot z_x}{z^2}=-\frac{0\cdot z-2y\cdot\left(-\frac{4x}{z}\right)}{z^2} \qquad z_{yy}=-\frac{2\cdot z-2y\cdot z_y}{z^2}=-\frac{2\cdot z-2y\cdot\left(-\frac{2y}{z}\right)}{z^2}$$

Pro hodnoty parciálních derivací v bodě $A=[0;0;4]$ dosadíme souřadnice bodu.

$$z_{xx}(A)=-\frac{4\cdot 4-4\cdot 0\cdot\left(-\frac{4\cdot 0}{4}\right)}{4^2}=-1 \qquad z_{xy}(A)=-\frac{0\cdot 4-4\cdot 0\cdot\left(-\frac{2\cdot 0}{4}\right)}{4^2}=0$$

$$z_{yx}(A)=-\frac{0\cdot 4-2\cdot 0\cdot\left(-\frac{4\cdot 0}{4}\right)}{4^2}=0 \qquad z_{yy}(A)=-\frac{2\cdot 4-2\cdot 0\cdot\left(-\frac{2\cdot 0}{4}\right)}{4^2}=-\frac{1}{2}$$

Totální difer. $\mathrm{d}^2 f=-1\cdot(x-0)\cdot(x-0)+0\cdot(x-0)\cdot(y-0)+0\cdot(y-0)\cdot(x-0)-\frac{1}{2}\cdot(y-0)\cdot(y-0)$

$$\mathrm{d}^2 f=-x^2-\frac{1}{2}\cdot y^2$$

2.2. $[x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ Z \in \mathbb{R}]$ V bodě $B[0;1;0]$ napište hodnoty všech prvních parciálních derivací $z_x(B)$ a $z_y(B)$, pokud je rovnicí

$$\underbrace{\mathrm{e}^z + x^2y + z - 1}_{F(x;y;z)} = 0$$

určena implicitní funkce $z = z(x;y)$.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu B vyhovují zadané rovnici:

$$\underbrace{\mathrm{e}^0}_{1} + 0^2 \cdot 1 + 0 - 1 = 0$$

Potom spočítáme první ***parciální derivace***.

$F_x = 2x \cdot y$ derivace F_x je spojitá $\forall x; y$
$F_y = x^2$ derivace F_y je spojitá $\forall x$
$F_z = \mathrm{e}^z + 1$ derivace F_z je spojitá $\forall z$ a $F_z(B) = 2 \neq 0$

V okolí bodu B uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $z(x;y)$.

Parciální derivace budeme počítat jako derivace složené funkce, kde písmeno z označuje ***funkci*** proměnných $x; y$:

$$\left(\mathrm{e}^z + x^2y + z - 1\right)' = (0)'$$

z_x :

$$(\mathrm{e}^z)_x + (x^2y)_x + (z)_x - (1)_x = (0)_x$$
$$\mathrm{e}^z \cdot z_x + 2xy + z_x - 0 = 0$$
$$\mathrm{e}^z \cdot z_x + z_x = -2xy$$
$$z_x \cdot (\mathrm{e}^z + 1) = -2xy$$

pro $\mathrm{e}^z \neq -1$ (každý bod splňuje) $z_x = -\dfrac{2xy}{\mathrm{e}^z + 1}$

z_y :

$$(\mathrm{e}^z)_y + (x^2y)_y + (z)_y - (1)_y = (0)_y$$
$$\mathrm{e}^z \cdot z_y + x^2 + z_y - 0 = 0$$
$$\mathrm{e}^z \cdot z_y + z_y = -x^2$$
$$z_y \cdot (\mathrm{e}^z + 1) = -x^2$$

pro $\mathrm{e}^z \neq -1$ (každý bod splňuje) $z_y = -\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^z + 1}$

Pro hodnoty parciálních derivací v bodě $B = [0;1;0]$ dosadíme souřadnice bodu.

$$z_x = -\frac{2xy}{\mathrm{e}^z + 1} \quad \Rightarrow \quad z_x(A) = -\frac{2 \cdot 0 \cdot 1}{\mathrm{e}^0 + 1} = -\frac{0}{2} = 0$$

$$z_y = -\frac{x^2}{\mathrm{e}^z + 1} \quad \Rightarrow \quad z_y(A) = -\frac{0^2}{\mathrm{e}^0 + 1} = -\frac{0}{2} = 0$$

2.3. $[x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ Z \in \mathbb{R}]$ V bodě $C[1;1;1]$ napište hodnoty všech prvních parciálních derivací $z_x(C)$ a $z_y(C)$, pokud je rovnicí

$$\underbrace{4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4}_{F(x;y;z)} = 0$$

určena implicitní funkce $z = z(x;y)$.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu C vyhovují zadané rovnici:

$$4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 - 4 = 0$$

Potom spočítáme první ***parciální derivace***.

$F_x = 8x + y + 1$ derivace F_x je spojitá $\forall x; y$
$F_y = 4y + x - z$ derivace F_y je spojitá $\forall x; y; z$
$F_z = -6z - y$ derivace F_z je spojitá $\forall y; z$ a $F_z(C) = -7 \neq 0$

V okolí bodu C uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $z(x;y)$.

Parciální derivace budeme počítat jako derivace složené funkce, kde $z(x;y)$:

$$\left(4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4\right)' = (0)'$$

z_x : $(4x^2)_x + (2y^2)_x - (3z^2)_x + (xy)_x - (yz)_x + (x)_x - (4)_x = (9)_x$

$$8x + 0 - 6z \cdot z_x + y - y \cdot z_x + 1 - 0 = 0$$

$$8x + y + 1 = 6zz_x + yz_x$$

$$8x + y + 1 = z_x \cdot (6z + y)$$

pro $y \neq -6z$ (bod C splňuje) $\dfrac{8x + y + 1}{6z + y} = z_x$

z_y : $(4x^2)_y + (2y^2)_y - (3z^2)_y + (xy)_y - (yz)_y + (x)_y - (4)_y = (9)_y$

$$0 + 4y - 6z \cdot z_y + x - (1 \cdot z + y \cdot z_y) + 0 - 0 = 0$$

$$4y + x - z = 6zz_y + yz_y$$

$$4y + x - z = z_y \cdot (6z + y)$$

pro $y \neq -6z$ (bod C splňuje) $\dfrac{4y + x - z}{6z + y} = z_y$

Pro hodnoty parciálních derivací v bodě $C = [1;1;1]$ dosadíme souřadnice.

$$z_x = \frac{8x + y + 1}{6z + y} \quad \Rightarrow \quad z_x(C) = \frac{8 \cdot 1 + 1 + 1}{6 \cdot 1 + 1} = \frac{10}{7}$$

$$z_y = \frac{4y + x - z}{6z + y} \quad \Rightarrow \quad z_y(C) = \frac{4 \cdot 1 + 1 - 1}{6 \cdot 1 + 1} = \frac{4}{7}$$

2.4. $[x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ Z \in \mathbb{R}]$ V bodě $D = [0;0;1]$ napište hodnoty všech prvních parciálních derivací $z_x(D)$ a $z_y(D)$, pokud je rovnicí

$$\underbrace{3xyz - z^3 + 1}_{F(x;y;z)} = 0$$

určena implicitní funkce $z = z(x;y)$.

Napřed ověříme první podmínku, zda souřadnice bodu D vyhovují zadané rovnici:

$$3 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1^3 + 1 = 0$$

Potom spočítáme první ***parciální derivace***.

$F_x = 3yz$ derivace F_x je spojitá $\forall y; z$

$F_y = 3xz$ derivace F_y je spojitá $\forall x; z$

$F_z = 3xy - 3z^2$ derivace F_z je spojitá $\forall x; y; z$ a $F_z(D) = -3 \neq 0$

V okolí bodu D uvedená rovnice implicitně vyjadřuje funkci $z(x;y)$.

Parciální derivace budeme počítat jako derivace složené funkce, kde $z(x;y)$:

$$\left(3xyz - z^3 + 1\right)' = (0)'$$

z_x :

$$3y \cdot (xz)_x - (z^3)_x + (1)_x = (0)_x$$
$$3y \cdot (1 \cdot z + x \cdot z_x) - (3z^2 \cdot z_x) + 0 = 0$$
$$3yz = 3z^2 z_x - 3xyz_x$$
$$3yz = z_x \cdot (3z^2 - 3xy)$$

pro $xy \neq z^2$ (bod D splňuje) $$\frac{3yz}{3z^2 - 3xy} = z_x$$

z_y :

$$3x \cdot (yz)_y - (z^3)_y + (1)_y = (0)_y$$
$$3x \cdot (1 \cdot z + y \cdot z_y) - (3z^2 \cdot z_y) + 0 = 0$$
$$3xz = 3z^2 z_y - 3xyz_y$$
$$3xz = z_y \cdot (3z^2 - 3xy)$$

pro $xy \neq z^2$ (bod D splňuje) $$\frac{3xz}{3z^2 - 3xy} = z_y$$

Pro hodnoty parciálních derivací v bodě $D = [0;0;1]$ dosadíme souřadnice.

$$z_x = \frac{\cancel{3} \cdot yz}{\cancel{3} \cdot (z^2 - xy)} \quad \Rightarrow \quad z_x(D) = \frac{0 \cdot 1}{1^2 - 0 \cdot 0} = 0$$

$$z_y = \frac{\cancel{3} \cdot xz}{\cancel{3} \cdot (z^2 - xy)} \quad \Rightarrow \quad z_y(D) = \frac{0 \cdot 1}{1^2 - 0 \cdot 0} = 0$$