

Při určování lokálních extrémů reálné funkce dvou reálných proměnných $f(x; y)$ postupujeme zpravidla takto:

1. určíme definiční obor $D(f)$ funkce;
2. vypočteme první parciální derivace f_x , f_y a určíme jejich definiční obory;
3. určíme **stacionární body** (v nich jsou obě **první parciální derivace rovny NULE**);
4. vypočteme druhé parciální derivace f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} a f_{yy}
— pokud jsou v bodě \mathcal{S} spojité, platí: $f_{xy}(\mathcal{S}) = f_{yx}(\mathcal{S})$;
5. pro každý stacionární bod \mathcal{S} určíme hodnotu determinantu

$$D(\mathcal{S}) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\mathcal{S}) & f_{xy}(\mathcal{S}) \\ f_{yx}(\mathcal{S}) & f_{yy}(\mathcal{S}) \end{vmatrix} \quad \text{Když} \quad \begin{array}{ll} D(\mathcal{A}) > 0 & \mathcal{A} \text{ je lokální extrém;} \\ D(\mathcal{B}) < 0 & \text{pak } \mathcal{B} \text{ není lokální extrém;} \\ D(\mathcal{C}) = 0 & \text{o } \mathcal{C} \text{ nelze rozhodnout;} \end{array}$$

6. ze znaménka druhé derivace $f_{xx}(\mathcal{E})$ určíme druh extrému v daném bodě
když $f_{xx}(\mathcal{M}) < 0$ pak v bodě \mathcal{M} je (ostré) lokální **MAXIMUM**;
 $f_{xx}(m) > 0$ pak v bodě m je (ostré) lokální **minimum**;
7. vyšetříme chování funkce ve stacionárních bodech, pro které má výše uvedený determinant nulovou hodnotu $D(\mathcal{S}) = 0$
a v bodech, v nichž první parciální derivace f_x a f_y **neexistují**.

Nutná podmínka existence lokálních extrémů pro funkci více proměnných:

- první parciální derivace jsou rovny NULE

nebo

- první parciální derivace neexistují

Dostatečná podmínka existence lokálního extrému v bodě \mathcal{S} pro funkci

DVOU proměnných (determinant je kladný): $D(\mathcal{S}) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\mathcal{S}) & f_{xy}(\mathcal{S}) \\ f_{yx}(\mathcal{S}) & f_{yy}(\mathcal{S}) \end{vmatrix} > 0$

Poznámka Reálná funkce více reálných proměnných může mít (*ale také nemusí*) **lokální extrém pouze** ve svém stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje.

1. Určete lokální extrémy funkce: $f(x, y) : z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$.

1. definiční obor funkce $D(z)$: $x > 0$; $y > 0$

2. první parciální derivace: $z_x = 2x + y - \frac{4}{x}$ $z_y = x + 2y - \frac{10}{y}$

$$\Rightarrow D(z_x) : x \neq 0 \quad D(z_y) : y \neq 0$$

3. stacionární body: $2x + y - \frac{4}{x} = 0 \quad | \cdot x \quad (\text{pro } x > 0)$

$$x + 2y - \frac{10}{y} = 0 \quad | \cdot y \quad (\text{pro } y > 0)$$

$$\begin{array}{rcl} 2x^2 + xy - 4 = 0 & \Rightarrow & y = \frac{4 - 2x^2}{x} \\ xy + 2y^2 - 10 = 0 & & \end{array}$$

a po dosazení do druhé rovnice

$$x \cdot \frac{4 - 2x^2}{x} + 2 \cdot \left(\frac{4 - 2x^2}{x} \right)^2 - 10 = 0 \quad | \cdot x^2 \quad (\text{pro } x > 0)$$

$$x^2 \cdot (4 - 2x^2) + 2 \cdot (16 - 16x^2 + 4x^4) - 10x^2 = 0$$

$$4x^2 - 2x^4 + 32 - 32x^2 + 8x^4 - 10x^2 = 0$$

$$6x^4 - 38x^2 + 32 = 0 \quad | : 2$$

$$3x^4 - 19x^2 + 16 = 0 \quad \text{substituce } s = x^2$$

$$3s^2 - 19s + 16 = 0$$

$$s_{1;2} = \frac{19 \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16}}{2 \cdot 3} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 192}}{6} = \frac{19 \pm 13}{6} \quad \begin{array}{l} s_1 = \frac{16}{3} \\ s_2 = 1 \end{array}$$

$$x_{1;1} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$x_{1;2} = -\sqrt{\frac{16}{3}} \notin D(z)$$

$$x_{2;1} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow x_2 = 1$$

$$x_{2;2} = -\sqrt{1} \notin D(z)$$

$$y_1 = \frac{4 - 2 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \right)^2}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{4 - 2 \cdot \frac{16}{3}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{12-32}{3}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} \notin D(z)$$

$$y_2 = \frac{4 - 2 \cdot 1^2}{1} = 2$$

Funkce má jediný stacionární bod $\mathcal{A} = [1; 2]$.

4. druhé parciální derivace:

$$\begin{aligned} z_{xx} &= 2 + \frac{4}{x^2} & z_{xx}(\mathcal{A}) &= 6 \\ z_{xy} &= 1 \\ z_{yx} &= 1 \\ z_{yy} &= 2 + \frac{10}{y^2} & z_{yy}(\mathcal{A}) &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

5. hodnota determinantu: $D(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & \frac{9}{2} \end{vmatrix} = 27 - 1 > 0$

V bodě \mathcal{A} je lokální extrém.

6. druh extrému: $z_{xx}(\mathcal{A}) = 6 > 0 \quad \Rightarrow$ v bodě \mathcal{A} je (ostré) lokální **minimum**.

7. všude v $D(z)$ první parciální derivace existují.

Našli jsme jediný lokální extrém dané funkce, a to
lokální minimum v bodě $\mathcal{A} = [1; 2]$,
které má hodnotu $f(1; 2) = 7 - \ln 2 \doteq 0,07$.

2. Určete lokální extrémy funkce: $f(x, y) : z = 1 + 6y - y^2 - xy - x^2$.

1. definiční obor funkce $D(z)$: $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

2. první parciální derivace: $z_x = -y - 2x$ $z_y = 6 - 2y - x$
 $\Rightarrow D(z_x) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ $D(z_y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

3. stacionární body:

$$\begin{array}{rcl} -2x - y = 0 & | \cdot (-2) & \\ -x - 2y + 6 = 0 & & \\ \hline 4x + 2y = 0 & & \\ -x - 2y = -6 & & \\ \hline 3x = -6 & & \\ x = -2 & & \end{array}$$

a po dosazení do první rovnice

$$\begin{array}{rcl} -2 \cdot (-2) - y = 0 & & \\ 4 = y & & \end{array}$$

Funkce má jediný stacionární bod $B = [-2; 4]$.

4. druhé parciální derivace:

$$\begin{array}{l} z_{xx} = -2 \\ z_{xy} = -1 \\ z_{yx} = -1 \\ z_{yy} = -2 \end{array}$$

5. hodnota determinantu: $D(B) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 > 0$

V bodě B je lokální extrém.

6. druh extrému: $z_{xx}(B) = -2 < 0 \Rightarrow$ v bodě B je (ostré) lokální **MAXIMUM**.

7. všude v \mathbb{R}^2 první parciální derivace existují.

Našli jsme jediný lokální extrém dané funkce, a to
 lokální maximum v bodě $B = [-2; 4]$,
 které má hodnotu $f(-2; 4) = 13$.

3. Určete lokální extrémy funkce: $f(x, y) : z = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$.

1. definiční obor funkce $D(z)$: $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

2. první parciální derivace: $z_x = 2x - y - 1$ $z_y = 2y - x - 1$
 $\Rightarrow D(z_x) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ $D(z_y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

3. stacionární body: $2x - y - 1 = 0$
 $2y - x - 1 = 0 \quad | \cdot 2$

 $2x - y = 1$
 $-2x + 4y = 2$

 $3y = 3$
 $y = 1$

a po dosazení do první rovnice

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 1 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Funkce má jediný stacionární bod $C = [1; 1]$.

4. druhé parciální derivace: $z_{xx} = 2$
 $z_{xy} = -1$
 $z_{yx} = -1$
 $z_{yy} = 2$

5. hodnota determinantu: $D(B) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 > 0$

V bodě C je lokální extrém.

6. druh extrému: $z_{xx}(C) = 2 > 0 \Rightarrow$ v bodě C je (ostré) lokální **minimum**.

7. všude v \mathbb{R}^2 první parciální derivace existují.

Našli jsme jediný lokální extrém dané funkce, a to
lokální minimum v bodě $C = [1; 1]$,
které má hodnotu $f(1; 1) = 1$.

4. Určete lokální extrémy funkce: $f(x, y) : z = x^3 + y^3 - 18xy$.

1. definiční obor funkce $D(z)$: $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

2. první parciální derivace: $z_x = 3x^2 - 18y$ $z_y = 3y^2 - 18x$
 $\Rightarrow D(z_x) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ $D(z_y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

3. stacionární body: $3x^2 - 18y = 0$ $\Rightarrow y = \frac{x^2}{6}$
 $3y^2 - 18x = 0$

a po dosazení do druhé rovnice

$$3 \cdot \left(\frac{x^2}{6}\right)^2 - 18x = 0$$

$$x \cdot \left(\frac{x^3}{12} - 18\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow y_1 = 0$$

$$x_2 = 6 \quad \Rightarrow y_2 = 6$$

Funkce má dva stacionární body $\mathcal{D} = [0; 0]$ a $\mathcal{E} = [6; 6]$.

4. druhé parciální derivace: $z_{xx} = 6x$ $z_{xx}\mathcal{D} = 0$ $z_{xx}\mathcal{E} = 36$
 $z_{xy} = -18$
 $z_{yx} = -18$
 $z_{yy} = 6y$ $z_{yy}\mathcal{D} = 0$ $z_{yy}\mathcal{E} = 36$

5. hodnoty determinantů: $D(\mathcal{D}) = \begin{vmatrix} 0 & -18 \\ -18 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-18)^2 < 0$

V bodě \mathcal{D} není lokální extrém.

$$D(\mathcal{E}) = \begin{vmatrix} 36 & -18 \\ -18 & 36 \end{vmatrix} = 36^2 - (-18)^2 > 0$$

V bodě \mathcal{E} je lokální extrém.

6. druh extrému: $z_{xx}(\mathcal{E}) = 36 > 0 \quad \Rightarrow$ v bodě \mathcal{E} je (ostré) lokální **minimum**.

7. všude v \mathbb{R}^2 první parciální derivace existují.

Našli jsme jediný lokální extrém dané funkce, a to
 lokální minimum v bodě $\mathcal{E} = [6; 6]$,
 které má hodnotu $f(6; 6) = -216$.

5. Určete lokální extrémy funkce: $f(x, y) : z = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x$.

1. definiční obor funkce $D(z)$: $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

2. první parciální derivace: $z_x = 54xy - 54$ $z_y = 27x^2 + 42y^2 - 69$

$$\Rightarrow D(z_x) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad D(z_y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

3. stacionární body: $54xy - 54 = 0 \quad | : 54$

$$27x^2 + 42y^2 - 69 = 0 \quad | : 3$$

$$\begin{array}{rcl} xy - 1 = 0 & \Rightarrow & x = \frac{1}{y} \quad \text{pro } y \neq 0 \text{ (což je splněno)} \\ 9x^2 + 14y^2 - 23 = 0 & & \end{array}$$

a po dosazení do druhé rovnice

$$9 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^2 + 14y^2 - 23 = 0 \quad | \cdot y^2 \text{ (pro } y \neq 0)$$

$$9 + 14y^4 - 23y^2 = 0 \quad \text{substituce } s = y^2$$

$$14s^2 - 23s + 9 = 0$$

$$s_{1;2} = \frac{23 \pm \sqrt{(-23)^2 - 4 \cdot 14 \cdot 9}}{2 \cdot 14} = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 504}}{28} = \frac{23 \pm 5}{28} \quad \begin{array}{l} s_1 = 1 \\ s_2 = \frac{9}{14} \end{array}$$

$$y_{1;1} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1;1} = 1$$

$$y_{1;2} = -1 \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} = -1$$

$$y_{2;1} = \sqrt{\frac{9}{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14} \quad \Rightarrow \quad x_{2;1} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

$$y_{2;2} = -\sqrt{\frac{9}{14}} = -\frac{3}{\sqrt{14}} = -\frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14} \quad \Rightarrow \quad x_{2;2} = -\frac{\sqrt{14}}{3}$$

Funkce má čtyři stacionární body $\mathcal{G} = [1; 1]$, $\mathcal{J} = [-1; -1]$, $\mathcal{K} = \left[\frac{\sqrt{14}}{3}; \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14}\right]$

a $\mathcal{L} = \left[-\frac{\sqrt{14}}{3}; -\frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14}\right]$.

4. druhé parciální derivace: $z_{xx} = 54y$

$$z_{xy} = 54x$$

$$z_{yx} = 54x$$

$$z_{yy} = 84y$$

$$\begin{array}{llll}
z_{xx}(\mathcal{G}) = 54 & z_{xx}(\mathcal{J}) = -54 & z_{xx}(\mathcal{K}) = \frac{81 \cdot \sqrt{14}}{7} & z_{xx}(\mathcal{L}) = -\frac{81 \cdot \sqrt{14}}{7} \\
z_{xy}(\mathcal{G}) = 54 & z_{xy}(\mathcal{J}) = -54 & z_{xy}(\mathcal{K}) = 18 \cdot \sqrt{14} & z_{xy}(\mathcal{L}) = -18 \cdot \sqrt{14} \\
z_{yx}(\mathcal{G}) = 54 & z_{yx}(\mathcal{J}) = -54 & z_{yx}(\mathcal{K}) = 18 \cdot \sqrt{14} & z_{yx}(\mathcal{L}) = -18 \cdot \sqrt{14} \\
z_{yy}(\mathcal{G}) = 84 & z_{yy}(\mathcal{J}) = -84 & z_{yy}(\mathcal{K}) = 18 \cdot \sqrt{14} & z_{yy}(\mathcal{L}) = -18 \cdot \sqrt{14}
\end{array}$$

5. hodnota determinantu: $D(\mathcal{G}) = \begin{vmatrix} 54 & 54 \\ 54 & 84 \end{vmatrix} = 54 \cdot 84 - 54 \cdot 54 = 54 \cdot (84 - 54) > 0$

V bodě \mathcal{G} je lokální extrém.

$$D(\mathcal{J}) = \begin{vmatrix} -54 & -54 \\ -54 & -84 \end{vmatrix} = (-54) \cdot (-84) - (-54) \cdot (-54) = 54(84 - 54) > 0$$

V bodě \mathcal{J} je lokální extrém.

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{K}) &= \begin{vmatrix} \frac{81 \cdot \sqrt{14}}{7} & 18 \cdot \sqrt{14} \\ 18 \cdot \sqrt{14} & 18 \cdot \sqrt{14} \end{vmatrix} = \frac{81}{7} \cdot 18 \cdot 14 - 18 \cdot 18 \cdot 14 = 18 \cdot 14 \cdot \left(\frac{81}{7} - 18\right) = \\
&= 18 \cdot 14 \cdot \left(\frac{81 - 18 \cdot 7}{7}\right) = 18 \cdot 14 \cdot \left(\frac{81 - 126}{7}\right) < 0
\end{aligned}$$

V bodě \mathcal{K} NENÍ lokální extrém.

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{L}) &= \begin{vmatrix} -\frac{81 \cdot \sqrt{14}}{7} & -18 \cdot \sqrt{14} \\ -18 \cdot \sqrt{14} & -18 \cdot \sqrt{14} \end{vmatrix} = \frac{81}{7} \cdot 18 \cdot 14 - 18 \cdot 18 \cdot 14 = 18 \cdot 14 \cdot \left(\frac{81}{7} - 18\right) = \\
&= 18 \cdot 14 \cdot \left(\frac{81 - 18 \cdot 7}{7}\right) = 18 \cdot 14 \cdot \left(\frac{81 - 126}{7}\right) < 0
\end{aligned}$$

V bodě \mathcal{L} NENÍ lokální extrém.

6. druh extrému: $z_{xx}(\mathcal{G}) = 54 > 0 \Rightarrow$ v bodě \mathcal{G} je (ostré) lokální **minimum**.

$z_{xx}(\mathcal{J}) = -54 < 0 \Rightarrow$ v bodě \mathcal{J} je (ostré) lokální **MAXIMUM**.

7. všude v $D(z)$ první parciální derivace existují.

Našli jsme jediné dva lokální extrémy dané funkce, a to

lokální minimum v bodě $\mathcal{G} = [1; 1]$,

které má hodnotu $f(1; 1) = -82$ a

lokální maximum v bodě $\mathcal{J} = [-1; -1]$,

které má hodnotu $f(-1; -1) = 82$.