Vyjadřuje-li rovnice $F(x, y, z) = 0$ v bodě $\mathcal{A}$ implicitně nějakou funkci (která popisuje plochu), pak normálový vektor k této ploše v bodě $\mathcal{A}$ má tvar

$$\vec{n} = \left(F_x(\mathcal{A}); F_y(\mathcal{A}); F_z(\mathcal{A})\right)$$

1. $[x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}]$ V bodě A o půdorysu $A_1 = [1; -2]$ napište (pokud existují) rovnice tečné roviny a normály ke grafu funkce

$$f(x, y) : z = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^3 .$$

Napřed dopočítáme z–tovou souřadnici bodu,

$$z = 6 \cdot 1 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (1)^3 - 3 \cdot (-2)^3 = 46 \qquad \Longrightarrow \qquad A = [1; -2; 46]$$

potom funkci upravíme na tvar ***F(x ; y ; z) = 0*** a spočítáme první ***parciální derivace***.

$$F : 6xy^2 - 2x^3 - 3y^3 - z = 0$$

Pokud jsou všechny tři F_x, F_y, F_z v okolí bodu A spojité a navíc hodnota $F_z(A) \neq 0$, pak existuje v tomto bodě k ploše (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$$\begin{aligned} F_x &= 6y^2 - 6x^2 & F_x(A) &= 18 \\ F_y &= 12xy - 9y^2 & F_y(A) &= -60 \qquad \text{normálový vektor} \quad \vec{n} = (18; -60; -1) \\ F_z &= -1 & F_z(A) &= -1 \neq 0 \end{aligned}$$

Parametrické rovnice normály:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 18p \\ y &= -2 - 60p \\ z &= 46 - p \end{aligned}$$

Obecná rovnice tečné roviny: $18 \cdot (x - 1) - 60 \cdot (y + 2) - 1 \cdot (z - 46) = 0$

$$18x - 60y - z - 92 = 0$$

2. $[x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}]$ V bodě $B = [-1; y_B; 5]$ napište (pokud existují) rovnice tečné roviny a normály ke grafu funkce když souřadnice $y_B > 0$.

$$f(x,y) : z = x^2 + y^2 .$$

Napřed dopočítáme y–novou souřadnici bodu,

$$5 = (-1)^2 + y^2 \qquad \Longrightarrow y_{1;2} = \pm\sqrt{4} \qquad \Longrightarrow \quad B = [-1; 2; 5]$$

potom funkci upravíme na tvar ***F(x ; y ; z) = 0*** a spočítáme první ***parciální derivace***.

$$F : x^2 + y^2 - z = 0$$

Pokud jsou všechny tři F_x, F_y, F_z v okolí bodu B spojité a navíc hodnota $F_z(B) \neq 0$, pak existuje v tomto bodě ke grafu (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$$F_x = 2x \qquad F_x(B) = -2$$
$$F_y = 2y \qquad F_y(B) = 4 \qquad \text{normálový vektor} \quad \vec{n} = (-2; 4; -1)$$
$$F_z = -1 \qquad F_z(B) = -1 \neq 0$$

Parametrické rovnice normály:

$$x = -1 - 2p$$
$$y = 2 + 4p$$
$$z = 5 - p$$

Obecná rovnice tečné roviny: $-2 \cdot (x+1) + 4 \cdot (y-2) - 1 \cdot (z-5) = 0$

$$2x - 4y + z + 5 = 0$$

3. [$x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$; $z \in \mathbb{R}$] V bodě $C = [3; 1; ?]$ napište (pokud existují) rovnice tečné roviny a normály plochy (pokud jde o plochu)

$$F(x, y, z) : x^2 - y^2 - 4z = 0 \,.$$

Napřed dopočítáme z–tovou souřadnici bodu,

$$(3)^2 - (1)^2 - 4z = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad C = [3; 1; 2]$$

a potom spočítáme první ***parciální derivace***.

Pokud jsou všechny tři F_x, F_y, F_z v okolí bodu C spojité a navíc hodnota $F_z(C) \neq 0$, pak existuje v tomto bodě ke grafu (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$F_x = 2x \qquad F_x(C) = 6$

$F_y = -2y \qquad F_y(C) = -2 \qquad$ normálový vektor $\vec{n} = (6; -2; -4) = 2 \cdot (3; -1; -2)$

$F_z = -4 \qquad F_z(C) = -4 \neq 0$

Parametrické rovnice normály:

$$x = 3 + 3p$$
$$y = 1 - p$$
$$z = 2 - 2p$$

Obecná rovnice tečné roviny: $3 \cdot (x - 3) - 1 \cdot (y - 1) - 2 \cdot (z - 2) = 0$

$$3x - y - 2z - 4 = 0$$

4. $[x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}]$ V bodě $D = [1; -1; 1]$ napište (pokud existují) rovnice tečné roviny a normály plochy (pokud jde o plochu) dané rovnicí:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 - xyz\,.$$

Napřed do rovnice dosadíme souřadnice bodu,

$(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2 = 2 - (1) \cdot (-1) \cdot (1) \quad \Longrightarrow$ souřadnice bodu vyhovují rovnici.

Potom funkci upravíme na tvar ***F(x ; y ; z) = 0*** a spočítáme první ***parciální derivace***.

$$F : x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 2 = 0$$

Pokud jsou všechny tři F_x, F_y, F_z v okolí bodu D spojité a navíc hodnota $F_z(D) \neq 0$, pak existuje v tomto bodě ke grafu (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$F_x = 2x + yz \qquad F_x(D) = 1$

$F_y = 2y + xz \qquad F_y(D) = -1 \qquad$ normálový vektor $\qquad \vec{n} = (1; -1; 1)$

$F_z = 2z + xy \qquad F_z(D) = 1 \neq 0$

Parametrické rovnice normály:

$$x = 1 + p$$
$$y = -1 - p$$
$$z = 1 + p$$

Obecná rovnice tečné roviny: $1 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y + 1) + 1 \cdot (z - 1) = 0$

$$x - y + z - 3 = 0$$

5. $[x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ z \in \mathbb{R}]$ V bodě $E = [1; 1; -1]$ napište (pokud existují) rovnice tečné roviny a normály plochy (pokud jde o plochu) dané rovnicí:

$$F(x,y,z) : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + z^3 + xyz = 0\,.$$

Napřed do rovnice dosadíme souřadnice bodu,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + (-1)^3 + (1) \cdot (1) \cdot (-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{souřadnice bodu vyhovují rovnici.}$$

Potom spočítáme první ***parciální derivace***.

Pokud jsou všechny tři F_x, F_y, F_z v okolí bodu E spojité a navíc hodnota $F_z(E) \neq 0$, pak existuje v tomto bodě ke grafu (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$$F_x = \frac{1}{y} + \frac{-y}{x^2} + yz \qquad F_x(E) = -1$$

$$F_y = \frac{-x}{y^2} + \frac{1}{x} + xz \qquad F_y(E) = -1 \qquad \text{normálový vektor} \qquad \vec{n} = (-1; -1; 4)$$

$$F_z = 3z^2 + xy \qquad F_z(E) = 4 \neq 0$$

Parametrické rovnice normály:

$$x = 1 - p$$
$$y = 1 - p$$
$$z = -1 + 4p$$

Obecná rovnice tečné roviny: $-1 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y - 1) + 4 \cdot (z + 1) = 0$

$$x + y - 4z - 6 = 0$$

6. $[x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}]$ V bodě $G = [-1; 3; -9]$ napište (pokud existují) rovnice tečné roviny a normály plochy (pokud jde o plochu) dané rovnicí:

$$xyz = 27\,.$$

Napřed do rovnice dosadíme souřadnice bodu,

$$(-1) \cdot (3) \cdot (-9) = 27 \quad \Longrightarrow \quad \text{souřadnice bodu vyhovují rovnici.}$$

Potom funkci upravíme na tvar ***F(x ; y ; z) = 0*** a spočítáme první ***parciální derivace***.

$$F : xyz - 27 = 0$$

Pokud jsou všechny tři F_x, F_y, F_z v okolí bodu G spojité a navíc hodnota $F_z(G) \neq 0$, pak existuje v tomto bodě ke grafu (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$$F_x = yz \qquad F_x(G) = -27$$
$$F_y = xz \qquad F_y(G) = 9 \qquad \text{normálový vektor} \qquad \vec{n} = -3 \cdot (9; -3; 1)$$
$$F_z = xy \qquad F_z(G) = -3 \neq 0$$

Parametrické rovnice normály:

$$x = -1 + 9p$$
$$y = 3 - 3p$$
$$z = -9 + p$$

Obecná rovnice tečné roviny: $9 \cdot (x + 1) - 3 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z + 9) = 0$

$$9x - 3y + z + 27 = 0$$

7. $[x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}]$ V bodě $H = [2; 3; 4]$ napište (pokud existují) rovnice tečné roviny a normály plochy (pokud jde o plochu) dané rovnicí:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 27 = 0\,.$$

Napřed do rovnice dosadíme souřadnice bodu,

$$\underbrace{2^3}_{8} + \underbrace{3^3}_{27} + \underbrace{4^3}_{64} - \underbrace{3 \cdot (2) \cdot (3) \cdot (4)}_{72} - 27 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{souřadnice bodu vyhovují rovnici.}$$

Potom spočítáme první ***parciální derivace***.

Pokud jsou všechny tři F_x, F_y, F_z v okolí bodu H spojité a navíc hodnota $F_z(H) \neq 0$, pak existuje v tomto bodě ke grafu (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$$F_x = 3x^2 - 3yz \qquad F_x(H) = -24$$
$$F_y = 3y^2 - 3xz \qquad F_y(H) = 3 \qquad \text{normálový vektor} \qquad \vec{n} = -3 \cdot (8; -1; -10)$$
$$F_z = 3z^2 - 3xy \qquad F_z(H) = 30 \neq 0$$

Parametrické rovnice normály:

$$x = 2 + 8p$$
$$y = 3 - p$$
$$z = 4 - 10p$$

Obecná rovnice tečné roviny: $8 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 3) - 10 \cdot (z - 4) = 0$

$$8x - y - 10z + 27 = 0$$

8. $[x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}]$ V bodě $L = [1;0;1]$ napište (pokud existují) rovnice tečné roviny a normály plochy (pokud jde o plochu) dané rovnicí:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = 2(x^2 - y^2 + z^2)\,.$$

Napřed do rovnice dosadíme souřadnice bodu,

$$\left(1^2 + 0^2 + 1^2\right)^2 = 2(1^2 - 0^2 + 1^2) \quad \Longrightarrow \quad \text{souřadnice bodu vyhovují rovnici.}$$

Potom funkci upravíme na tvar ***F(x ; y ; z) = 0*** a spočítáme první ***parciální derivace***.

$$F : \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 - 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 0$$

Pokud jsou všechny tři F_x, F_y, F_z v okolí bodu L spojité a navíc hodnota $F_z(L) \neq 0$, pak existuje v tomto bodě ke grafu (funkce dané implicitně) tečná rovina.

$$F_x = 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2x - 4x \qquad F_x(L) = 4$$

$$F_y = 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2y + 4y \qquad F_y(L) = 0 \qquad \text{norm. vekt. } \vec{n} = 4 \cdot (1;0;1)$$

$$F_z = 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot 2z - 4z \qquad F_z(L) = 4 \neq 0$$

Parametrické rovnice normály:

$$x = 1 + p$$

$$y = 0$$

$$z = 1 + p$$

Obecná rovnice tečné roviny: $1 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 1) = 0$

$$x + z - 2 = 0$$

9. $[x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ z \in \mathbb{R}]$ Najděte rovnici tečné roviny τ plochy

$$f(x,y) : z = \frac{1}{xy}\,,$$

která je rovnoběžná s rovinou $x + y + z - 8 = 0 \implies$ normálový vektor $\vec{n} = (1;1;1)$.

Funkci upravíme na tvar ***F(x;y;z) = 0*** a pro bod dotyku $T = [x_T; y_T; z_T]$ spočítáme první ***parciální derivace***.

$$F : xyz - 1 = 0$$

$$F_x = yz \qquad F_x(T) = 1$$

$$F_y = xz \qquad F_y(T) = 1$$

$$F_z = xy \qquad F_z(T) = 1$$

Řešením následující systému tří rovnic o třech neznámých:

$$y_T \cdot z_T = 1 \quad \Rightarrow \quad y_T = \frac{1}{z_T}$$

$$x_T \cdot z_T = 1 \quad \Rightarrow \quad x_T = \frac{1}{z_T}$$

$$x_T \cdot y_T = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z_T} \cdot \frac{1}{z_T} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = z_T^2 \quad \Rightarrow \quad z_{T_{1;2}} = \pm 1$$

dostáváme dva možné body dotyku: $T_1 = [1;1;1]$ a $T_2 = [-1;-1;-1]$.

Po dosazení souřadnic těchto bodů do rovnice plochy je zřejmé, že bod T_2 na ploše neleží, kdežto bod T_1 na ploše leží.

$$T_1 : \quad 1 = \frac{1}{1 \cdot 1} \qquad\qquad T_2 : \quad -1 \neq \frac{1}{(-1)\cdot(-1)}$$

Obecná rovnice tečné roviny τ **v bodě** T_1 **:** $(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$

$$x + y + z - 3 = 0$$