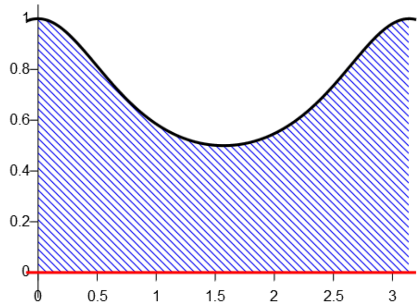
Určete plošný obsah části roviny omezené

funkcí $\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$

a **osou** x **,**

pro $x \in \langle 0; \pi \rangle$ **,**



když víte, že:

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right) + c$$

Správnost primitivní fukce si můžete ověřit DERIVOVÁNÍM!

1. Nekorektní použití základní věty integrálního počtu [1]

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,\underbrace{\operatorname{tg}\pi}_{0}) - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,\underbrace{\operatorname{tg} 0}_{0})}_{0} =$$

$$= 0 - 0 = 0\ \mathrm{j}^2$$

Ovšem! Tento plošný obsah (šrafovaný) není (viz obrázek) roven NULE!

2. Primitivní funkce je nespojitá [2] pro $x = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right)\right]_0^{\pi} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right) - \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right)\right] +$$

$$+ \left[\lim_{x\to\pi^-} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right) - \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lim_{a\to\infty} \operatorname{arctg} a - \underbrace{\operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 0}_{0} - \lim_{b\to-\infty} \operatorname{arctg} b\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \doteq \mathbf{2{,}22}\ \mathrm{j}^2$$

---

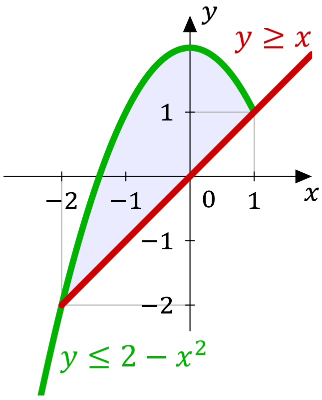
[1] Podle **Poznámky 2.3.** na straně 6 skript (Daněček, J., Dlouhý, O., Přibyl, O.: *Matematika I* modul 8 určitý integrál. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s. r. o., 2007, 50 s. ISBN 978–80–7204–525–9), musí být primitivní funkce na ***uzavřeném*** intervalu $\langle 0; \pi \rangle$ ***spojitá***, jinak nejsme oprávněni následující postup $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{\pi} = F(\pi) - F(0)$ použít.

[2] Nejdříve využijeme aditivnosti integrálu (v bodě nespojitosti jej rozdělíme na dva) a potom budeme postupovat podle **Definice 2.2.** tamtéž: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = \lim\limits_{x\to b^-} F(x) - \lim\limits_{x\to a^+} F(x)$

Plošný obsah části roviny $\mathcal{A} = \{[x\,;y] \in \mathbb{R}^2 \;:\; a < x < b\,, f_1(x) < y < f_2(x)\}$,
kde f_1, f_2 jsou spojité funkce takové, že $f_1(x) \leq f_2(x)$, pro každé $x \in (a\,;b)$,
se spočítá podle vzorce (str. 20 zmíněných skript):

$$P(\mathcal{A}) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x$$

Určete plošný obsah části roviny $\mathcal{A}$, pro jejíž body platí: $y \leq 2 - x^2$; $y \geq x$.



1. Nakreslíme hranice oblasti: $y = 2 - x^2$, $y = x$

   a z grafu určíme definiční obory funkcí.

2. Najdeme ***x***–*ové* souřadnice průsečíků obou křivek

$$\begin{aligned} y &= y \\ x &= 2 - x^2 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x+2).(x-1) &= 0 \\ x_1 = -2\,, \quad x_2 &= 1 \end{aligned}$$

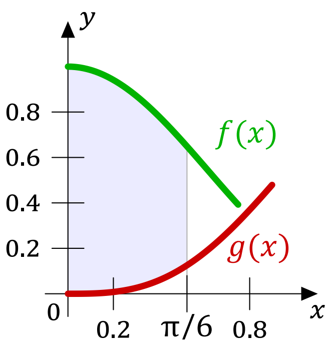
3. Dosadíme do vzorce: $P(\mathcal{A}) = \displaystyle\int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$

$$P(\mathcal{A}) = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - (x)]\,\mathrm{d}x = \left[2\,x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} =$$

primitivní funkce je na intervalu integrace **spojitá**, proto:

$$= \left[2.1 - \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right] - \left[2.(-2) - \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2}\right] = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = \frac{9}{2} = \mathbf{4{,}5}\ \mathrm{j}^2$$

Určete plošný obsah části roviny $\mathcal{B}$ ohraničené grafy funkcí $f\,:\,y = \cos^3 x$, $g\,:\,y = \sin^3 x$,
když $x \in \left\langle 0\,; \frac{\pi}{6} \right\rangle$ $(\pi/6 \doteq 0{,}524)$



1. Nakreslíme hranice oblasti: $f(x) : y = \cos^3 x$,

   $g(x) : y = \sin^3 x$ a z grafu určíme definiční obory.

2. Najdeme ***x***–*ové* souřadnice průsečíků obou křivek

$$\begin{aligned} y &= y \\ \cos^3 x &= \sin^3 x \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{\pi}{4} \doteq 0{,}785 \\ \cos x &= \sin x \end{aligned}$$

3. Dosadíme do vzorce: $P(\mathcal{B}) = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$

$$P(\mathcal{B}) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} [(\cos^3 x) - (\sin^3 x)]\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x \cdot \cos x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cdot \sin x\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\sin^2 x)\cdot\cos x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos^2 x)\cdot \sin x\,dx = \left| \begin{array}{ll} \sin x = u & \cos x = v \\ \cos x\,dx = du & -\sin x\,dx = dv \\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} & \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 0 = 0 & \cos 0 = 1 \end{array} \right| =$$

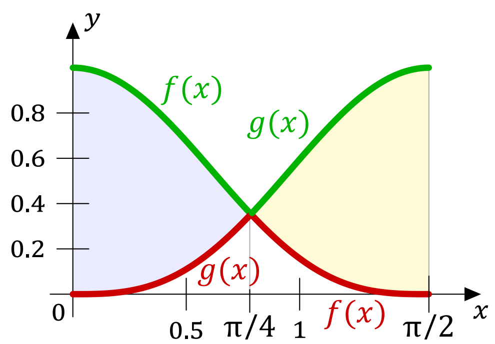
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-u^2)\,du + \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1-v^2)\,dv = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[v - \frac{v^3}{3}\right]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

primitivní funkce je na intervalu integrace **spojitá**, proto:

$$= \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3.3}\right) - (0)\right] + \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}^3}{2^3.3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8.3} - 1 + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{12 - 1 - 24 + 8}{24} + \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{5}{24} \doteq \mathbf{0{,}441}\ \mathrm{j}^2$$

Určete plošný obsah části roviny $\mathcal{C}$ ohraničené grafy funkcí $f: y = \cos^3 x$, $g: y = \sin^3 x$,
když $x \in \left\langle 0\,;\frac{\pi}{2}\right\rangle$ $(\pi/2 \doteq 1{,}57)$, tedy stejné funkce jako v předchozím příkladu, ale jiný interval.



Na základě rozboru předchozího příkladu musíme uvažovat dvě části plochy $\boldsymbol{A}$ (modře vybarvená je levá část uvažované plochy a žlutě pravá část) a proto dosazujeme:

$$\cos 0 = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin 0 = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$P(\mathcal{C}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\cos^3 x) - (\sin^3 x)]\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [(\sin^3 x) - (\cos^3 x)]\,dx =$$

$$= \left[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-u^2)\,du + \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-v^2)\,dv\right] + \left[\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} (v^2-1)\,dv + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} (u^2-1)\,du\right] =$$

$$= \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[v - \frac{v^3}{3}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\frac{v^3}{3} - v\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} + \left[\frac{u^3}{3} - u\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} =$$

primitivní funkce je na intervalu integrace **spojitá**, proto:

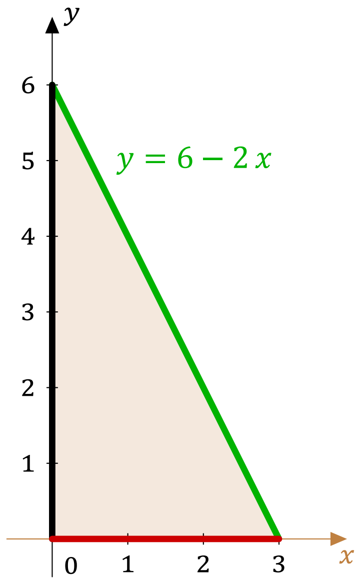
$$\ldots = \frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3} \doteq \mathbf{1{,}024}\ \mathrm{j}^2$$

Určete plošný obsah části roviny $\mathcal{D}$, pro jejíž body platí: $2x + y \leq 6\,;\ \ x \geq 0\,;\ \ y \geq 0\,.$

Máme **dvě** možnosti, jak stanovit podmínky, kterým musejí vyhovovat souřadnice bodů uvažované oblasti $\mathcal{D}$.

1. možnost: $0 \leq x \leq 3$

$0 \leq y(x) \leq 6 - 2x$



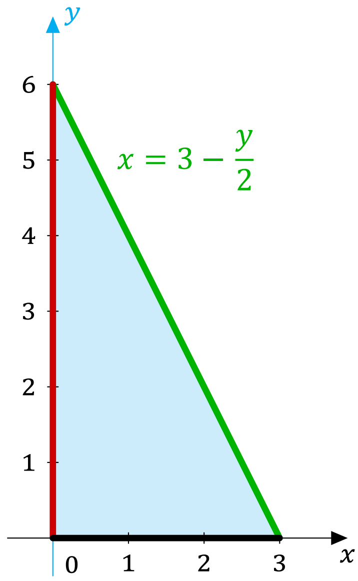
$$P(\mathcal{D}) = \int_0^3 [(6 - 2x) - (0)]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[6x - x^2\right]_0^3 = (6{\cdot}3 - 3^2) - (6{\cdot}0 - 0^2) =$$

$$= 18 - 9 = \mathbf{9}\ \mathrm{j}^2$$

2. možnost: $0 \leq y \leq 6$

$0 \leq x(y) \leq 3 - \dfrac{y}{2}$



$$P(\mathcal{D}) = \int_0^6 \left[\left(3 - \frac{y}{2}\right) - (0)\right]\mathrm{d}y =$$

$$= \left[3y - \frac{y^2}{4}\right]_0^6 = (18 - 9) - (0) = \mathbf{9}\ \mathrm{j}^2$$

V obou případech jsou primitivní funkce na intervalu integrace **spojité**.

Délka křivky $\mathcal{L}$ dané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)\,,\quad y = \psi(t)\,,\quad t \in \langle a\,;b\rangle$ se spočítá podle vzorce (str. 18 zmíněných skript):

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

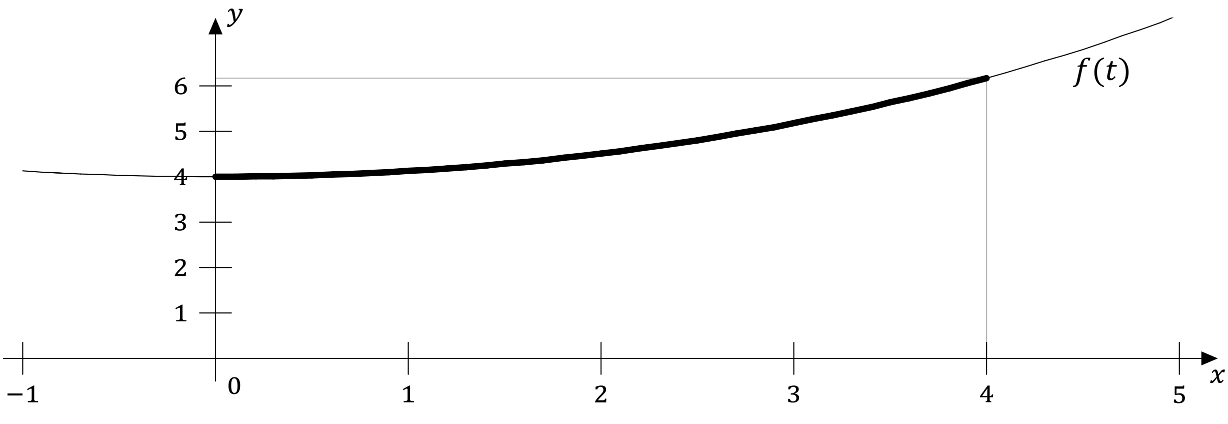
a ve speciálním případě, je-li křivka $\mathcal{L}$ dána předpisem $y = f(x)\,,\quad x \in \langle a\,;b\rangle$ a derivace f' je konečná na $(a\,;b)$, platí (str. 19 tamtéž):

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

protože za jednu parametrickou rovnici stačí zvolit: $x = t$ a dostaneme první případ.

Určete délku křivky $\mathcal{L}$, dané rovnicemi: $x = 4\ln t\,;\; y = 2t + \dfrac{2}{t}\,,$ kde $t \in \langle 1\,;\mathrm{e}\rangle$.
Potom (definiční obor funkce definující křivku určíme graficky)

$x' = \dfrac{4}{t}$ a $y' = 2 - \dfrac{2}{t^2}$:

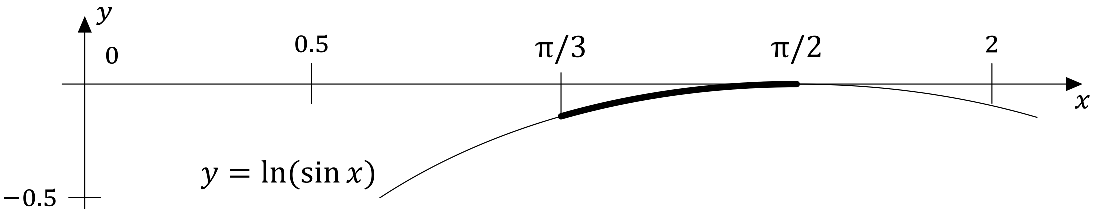


$$\mathcal{L} = \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{\left(\frac{4}{t}\right)^2 + \left(2 - \frac{2}{t^2}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{\frac{16}{t^2} + 4 - \frac{8}{t^2} + \frac{4}{t^4}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{\left(2 + \frac{2}{t^2}\right)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} \left(2 + \frac{2}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \left[2t - \frac{2}{t}\right]_1^{\mathrm{e}} =$$ primitivní funkce je na intervalu integrace **spojitá**, proto: $$= \left(2\,\mathrm{e} - \tfrac{2}{\mathrm{e}}\right) - \left(2\cdot 1 - \tfrac{2}{1}\right) \doteq$$

$\doteq$ **4,701** j

Určete délku křivky $\mathcal{L}$, dané rovnicí: $f(x) : y = \ln(\sin x)$, kde $x \in \left\langle \frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Potom:



$$\underbrace{D(f) = (0\,;\pi)}_{periodicky}, \quad y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \implies \mathcal{L} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}\, dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = y \\ -\sin x \, dx = dy \\ \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{3} & \frac{1}{2} \end{array} \end{array} \right| = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{-1}{1 - y^2}\, dy =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{y^2 - 1}\, dy = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{y+1} + \frac{\frac{1}{2}}{y-1} \right) dy = \left[-\frac{1}{2} \ln(y+1) + \frac{1}{2} \ln|y-1| \right]_{\frac{1}{2}}^{0} =$$

primitivní funkce je na intervalu integrace **spojitá**, proto:

$$= \left[-\frac{1}{2} \underbrace{\ln(0+1)}_{0} + \frac{1}{2} \underbrace{\ln|0-1|}_{0} \right] - \left[-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2} + 1\right) + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1}{2} - 1\right| \right] = \ldots = \frac{\ln 3}{2} \doteq \mathbf{0{,}55} \text{ j}$$

Určete délku křivky $\mathcal{L}$, dané rovnicí: $f(x) : y = \sqrt{6x - x^2}$.[3]

Je zřejmé, že: $y \geq 0$; $0 \leq x \leq 6$.

Zvolme (x zvolíme, y dopočítáme) parametrické rovnice

$$x = t + 3 \qquad x' = 1$$
$$y = \sqrt{9 - t^2} \qquad y' = \frac{-2t}{2 \cdot \sqrt{9 - t^2}}$$
$$-3 \leq t \leq 3$$

$$\mathcal{L} = \int_{-3}^{3} \sqrt{1^2 + \left(\frac{-t}{\sqrt{9 - t^2}} \right)^2}\, dt = \int_{-3}^{3} \sqrt{\frac{9 - t^2 + t^2}{9 - t^2}}\, dt = \left| \begin{array}{c} t = 3w \\ dt = 3\, dw \\ \begin{array}{c|c} t & w \\ \hline 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{array} \end{array} \right| = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{9}{9 - 9w^2}}\, 3\, dw =$$

$$= 3 \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{9}{9 - 9w^2}}\, dw = 3 \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1 - w^2}}\, dw = 3 \left[\arcsin w \right]_{-1}^{1} = 3 \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \mathbf{3}\pi \text{ j}$$

[3] Graf funkce $f(x)$ je horní polokružnice $(x-3)^2 + y^2 = 3^2$.

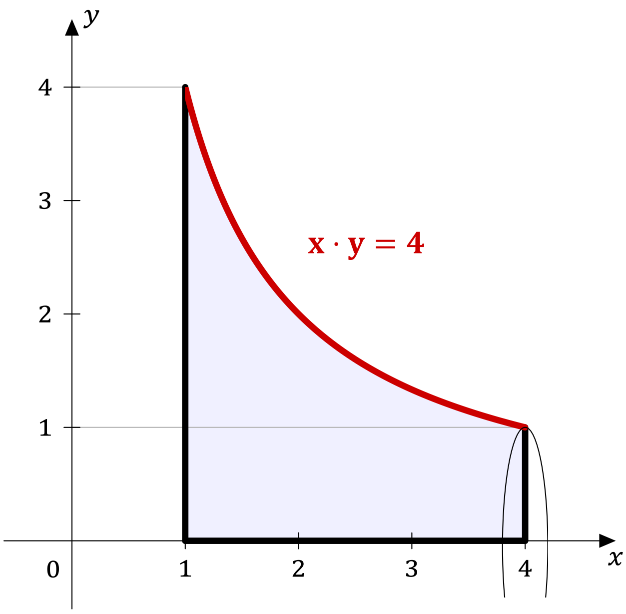
Objem $\mathcal{V}$ **tělesa** $\mathcal{T}$ **vzniklého rotací funkce** $f(x)$ **kolem osy** x pro které platí: rotující plocha je tvořena body $\{[x\,;y] \in \mathbb{R}^2 \;:\; a < x < b\,, 0 < y < |f(x)|\}$, kde f je spojitá na $(a\,;b)$ se spočítá podle vzorce (str. 23 zmíněných skript):

$$\mathcal{V}_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Obdobně při rotaci kolem osy $\boldsymbol{y}$.

Určete objem $\mathcal{V}$ **tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené čarami o rovnicích**

$x \cdot y = 4\,,\; x = 1\,,\; x = 4\,,\; y = 0$ kolem osy x:



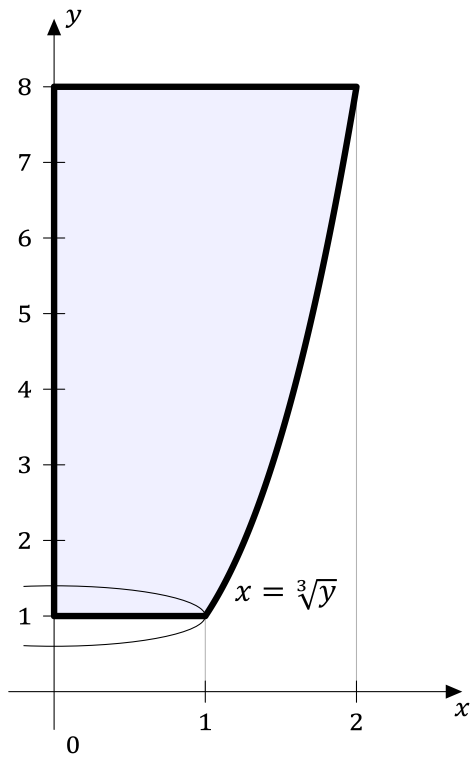
1. V rovině si nakreslíme rotující plochu a z grafu určíme definiční obor funkce:
   $\mathbf{f(x) : y = \frac{4}{x}}$
2. Dosadíme do vzorce:

$$\mathcal{V}_x = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{-16}{x}\right]_1^4 =$$

primitivní funkce je na intervalu integrace **spojitá**, proto: =

$$= \pi\left[\frac{-16}{4} - \left(\frac{-16}{1}\right)\right] = \pi\,(-4+16) = \mathbf{12}\,\pi\,\mathrm{j}^3$$

Určete objem $\mathcal{V}$ **tělesa vzniklého rotací oblouku křivky** $y = x^3$ kolem osy **y** pro $y \in \langle 1\,; 8\rangle$.



1. Pozor na PÍSMENKA označující proměnné, plocha rotuje kolem osy **y** !
2. $\mathbf{x^3} = \mathbf{y} \;\; \Longrightarrow \;\; f(y) : x = \sqrt[3]{y}\,, \quad D(f) = \mathbb{R}$
3. V rovině si nakreslíme rotující plochu
4. Dosadíme do vzorce pro objem:

$$\mathcal{V}_y = \pi \int_1^8 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_1^8 y^{\frac{2}{3}} \, \mathrm{d}y = \pi \left[\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_1^8 =$$

primitivní funkce je na intervalu integrace **spojitá**, proto:

$$= \pi \left(\frac{3}{5} \cdot 8^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{5} \cdot 1^{\frac{5}{3}} \right) = \pi \left(\frac{3 \cdot 32}{5} - \frac{3}{5} \right) = \frac{93\,\pi}{5}\ \mathrm{j}^3 \doteq \underline{\underline{\mathbf{58{,}43}\ \mathrm{j}^3}}$$

Plášť $\mathcal{P}$ tělesa $\mathcal{T}$ vzniklého rotací funkce $f(x)$ kolem osy x pro které platí: rotující plocha je tvořena body $\{[x\,;y] \in \mathbb{R}^2 \;:\; a < x < b\,, 0 < y < |f(x)|\}$, a f' je konečná na $(a\,;b)$, se spočítá podle vzorce (str. 25 zmíněných skript):

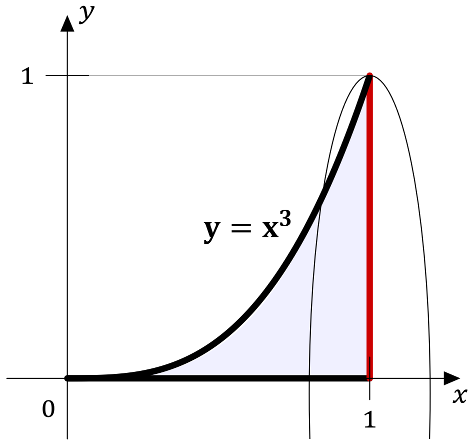
$$\mathcal{P}_x = 2\,\pi \int_a^b f(x)\,\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

a v případě, že body křivky jsou dány parametricky $[x(t)\,;y(t)]$ a $y(t) \geq 0$ pro $t \in (\alpha\,;\beta)$

$$\mathcal{P}_x = 2\,\pi \int_\alpha^\beta y(t)\,\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

Obdobně při rotaci kolem osy ***y***.

Určete povrch P tělesa vzniklého rotací oblouku křivky $f(x) : y = x^3$ kolem osy **x** pro $x \in \langle 0\,;1\rangle$.



1. $D(f) = \mathbb{R}\,,\quad f'(x) = 3\,x^2$
2. V rovině si nakreslíme rotující plochu
3. Povrch je tvořen pláštěm a podstavami:

   $P = \mathcal{P}_x + P_1 + P_2$

   P_1 je pouze bod a P_2 je kruh o poloměru 1.
4. Dosadíme do vzorce pro plášť:

$$\mathcal{P}_x = 2\,\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1 + (3\,x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\,\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1 + 9\,x^4}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sqrt{1 + 9\,x^4} = t \\ 1 + 9\,x^4 = t^2 \\ 36\,x^3\,\mathrm{d}x = 2\,t\,\mathrm{d}t \\ x^3\,\mathrm{d}x = \frac{t}{18}\,\mathrm{d}t \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1 & \sqrt{10} \\ 0 & 1 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= 2\,\pi \int_1^{\sqrt{10}} t \cdot \frac{t}{18}\,\mathrm{d}t = 2\,\pi \left[\frac{t^3}{54}\right]_1^{\sqrt{10}} = \begin{array}{c}\text{primitivní funkce je} \\ \text{na intervalu integrace} \\ \textbf{spojitá}\text{, proto:}\end{array} = 2\,\pi \left[\frac{\left(\sqrt{10}\right)^3}{54} - \frac{1^3}{54}\right] =$$

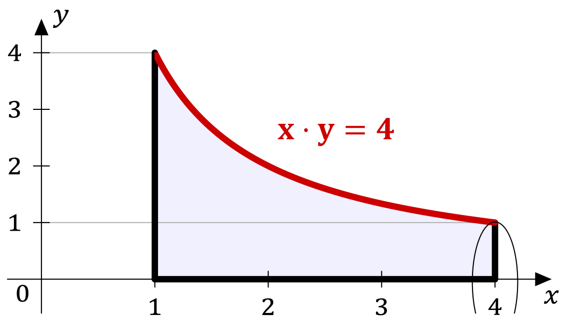
$$\doteq 2\,\pi \cdot (0{,}567) \doteq \mathbf{3{,}563}\ \mathrm{j}^2$$

Zbývá ještě k plášti přičíst plochu (červené) podstavy, abychom dostali celý povrch rotačního tělesa.

$$P = \mathcal{P}_x + \pi \cdot 1^2 = 2\,\pi \cdot (0{,}567) + \pi = \pi \cdot (2 \cdot 0{,}567 + 1) \doteq \mathbf{6{,}723}\ \mathrm{j}^2$$

Určete plášť $\mathcal{P}$ tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené čarami o rovnicích

$x \cdot y = 4\,,\ \ x = 1\,,\ \ x = 4\,,\ \ y = 0$ kolem osy $\mathbf{x}$:



1. V rovině si nakreslíme rotující plochu a z grafu určíme definiční obor funkce:

   $$\mathbf{f(x) : y = \frac{4}{x}}$$

2. Dosadíme do vzorce:

$$\mathcal{P}_x = 2\,\pi \int_1^4 \frac{4}{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-4}{x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 8\,\pi \int_1^4 \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{16}{x^4}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \sqrt{1 + \frac{16}{x^4}} = t \\ 1 + \frac{16}{x^4} = t^2 \\ \frac{16}{t^2-1} = x^4 \\ \frac{-16\cdot 2\,t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = 4\,x^3\,\mathrm{d}x \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 4 & \sqrt{\frac{17}{16}} \\ 1 & \sqrt{17} \end{array} \end{array}\right| =$$

$$= 8\,\pi \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{\frac{17}{16}}} \frac{1}{x} \cdot t \cdot \frac{1}{4\,x^3} \cdot \frac{-16 \cdot 2\,t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = -64\,\pi \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{\frac{17}{16}}} \frac{1}{x^4} \cdot \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -64\,\pi \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{\frac{17}{16}}} \frac{1}{\frac{16}{t^2-1}} \cdot \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = -4\,\pi \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{\frac{17}{16}}} \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = -4\,\pi \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{\frac{17}{16}}} \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t =$$

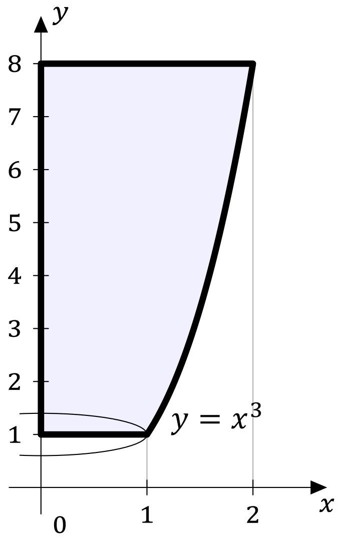
$$= -4\,\pi \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{\frac{17}{16}}} \left(1 + \frac{-\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{t-1}\right)\mathrm{d}t = 2\,\pi \int_{\sqrt{17}}^{\sqrt{\frac{17}{16}}} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} - 2\right)\mathrm{d}t =$$

$$= 2\,\pi \int_{\sqrt{\frac{17}{16}}}^{\sqrt{17}} \left(-\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1} + 2\right)\mathrm{d}t = 2\,\pi \left[2\,t + \ln\frac{t+1}{t-1}\right]_{\sqrt{\frac{17}{16}}}^{\sqrt{17}} =$$

primitivní funkce je na intervalu integrace **spojitá**, proto:

$$= 2\,\pi \left[2\sqrt{17} + \ln\frac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{17}-1} - \left(2\sqrt{\frac{17}{16}} + \ln\frac{\sqrt{\frac{17}{16}}+1}{\sqrt{\frac{17}{16}}-1}\right)\right] \doteq 2\,\pi \cdot (9{,}879) \doteq \mathbf{62{,}073}\ \mathrm{j}^2$$

Určete plášť $\mathcal{P}$ **tělesa vzniklého rotací oblouku křivky** $y = x^3$ kolem osy **y** pro $y \in \langle 1\,;8\rangle$.



1. Pozor na PÍSMENKA – plocha určená křivkou rotuje kolem osy **y** !
2. Zvolíme si parametrické vyjádření křivky, například:

$$\mathbf{x^3} = \mathbf{y} \;\Longrightarrow\; x = t\;;\quad x' = 1 \qquad t \in \langle 1\,;2\rangle$$
$$y = t^3\;;\quad y' = 3\,t^2$$

3. V rovině si nakreslíme rotující plochu a z obrázku odvodíme, zda definiční obor křivky pokrývá celý interval, přes který integrujeme.
4. Dosadíme do vzorce pro plášť.

$$\mathcal{P}_y = 2\,\pi\int_1^2 t\cdot\sqrt{1^2+\left(3\,t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t = 2\,\pi\int_1^2 \sqrt{1+9\,t^4}\cdot\underbrace{t\,\mathrm{d}t} = \left|\begin{array}{l} 1+9\,t^4 = u \\ t^4 = \frac{u-1}{9} \;\Rightarrow\; t^2 = \sqrt{\frac{u-1}{9}} \\ 4\,t^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\,\mathrm{d}u \\ t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{36\,t^2}\,\mathrm{d}u \\ t = 2 \;\Rightarrow\; u = 145 \\ t = 1 \;\Rightarrow\; u = \;\; 10 \end{array}\right| =$$

$$\left|\begin{array}{r} \sqrt{\frac{u}{u-1}} = v \\ u = v^2(u-1) \\ v^2 = u(v^2-1) \\ \frac{v^2}{v^2-1} = u \\ \frac{2\,v(v^2-1)-v^2\cdot 2\,v}{(v^2-1)^2}\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}u \\ u = 145 \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{145}{144}} \\ u = 10 \;\Rightarrow\; u = \sqrt{\frac{10}{9}} \end{array}\right|$$

$$= 2\,\pi\int_{10}^{145}\sqrt{u}\cdot\frac{1}{36\cdot\sqrt{\frac{u-1}{9}}}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{6}\int_{10}^{145}\sqrt{\frac{u}{u-1}}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{\pi}{6}\int_{\sqrt{\frac{10}{9}}}^{\sqrt{\frac{145}{144}}} v\cdot\frac{-2\,v}{(v^2-1)^2}\,\mathrm{d}v = \frac{\pi}{3}\int_{\sqrt{\frac{145}{144}}}^{\sqrt{\frac{10}{9}}}\frac{v^2}{(v^2-1)^2}\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{\pi}{3}\int_{\sqrt{\frac{145}{144}}}^{\sqrt{\frac{10}{9}}}\left[\frac{-\frac{1}{4}}{v+1}+\frac{\frac{1}{4}}{(v+1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{v-1}+\frac{\frac{1}{4}}{(v-1)^2}\right]\mathrm{d}v =$$

$$\frac{\pi}{12}\cdot\left[\ln\frac{v-1}{v+1}-\frac{1}{v+1}-\frac{1}{v-1}\right]_{\sqrt{\frac{145}{144}}}^{\sqrt{\frac{10}{9}}} \doteq \mathbf{71{,}4}\ \mathrm{j}^2$$

kde: $\frac{v^2}{(v^2-1)^2} = \frac{A}{v+1}+\frac{B}{(v+1)^2}+\frac{C}{v-1}+\frac{D}{(v-1)^2}$

$$v^2 = A(v+1)(v-1)^2 + B(v-1)^2 + C(v-1)(v+1)^2 + D(v+1)^2$$

$$\begin{array}{rlll} v = \;\;1: & 1 = 4\,D & \Longrightarrow & D = \frac{1}{4} \\ v = -1: & 1 = 4\,B & \Longrightarrow & B = \frac{1}{4} \\ v^3: & 0 = A + C & \Longrightarrow & A = -C \\ v = \;\;0: & 0 = A + B - C + D & & \\ & 0 = A + \frac{1}{4} + A + \frac{1}{4} & \Longrightarrow & A = -\frac{1}{4} \end{array}$$