

Statickým momentem hmotného bodu vzhledem k nějaké rovině nebo přímce rozumíme součin $m \cdot r$, kde m znamená hmotu tohoto bodu a r je jeho (kolmá) vzdálenost od zmíněné roviny nebo přímky.

Momentem setrvačnosti hmotného bodu vzhledem k nějaké ose o (kolem které se otáčí), rozumíme součin $m \cdot r^2$, kde m znamená hmotu tohoto bodu a r je jeho vzdálenost od zmíněné osy o .

Statický moment (moment setrvačnosti) soustavy hmotných bodů je pak součet statických momentů (*momentů setrvačnosti*) všech těchto bodů. Pokud je jich nekonečně mnoho, mohou vytvořit:

křivku (představme si například kus velmi tenkého drátu);

plochu (představme si těleso, jehož jeden rozměr je vůči ostatním zanedbatelně malý);

těleso.

Pokud se nejedná o homogenní materiál, je zřejmé, že hmota může být v takové soustavě rozložena naprosto nerovnoměrně.

Statické momenty jsou důležité pro určení polohy těžiště hmotného útvaru, momenty setrvačnosti jsou důležité pro výpočet kinetické (pohybové) energie hmotného útvaru.

Statické momenty rovinného oblouku \mathcal{L} o parametrických rovnicích $\mathcal{L}: \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \\ t &\in \langle \alpha; \beta \rangle \end{aligned}$

a o měrné hustotě $\varrho(t)$ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$] vzhledem k souřadným osám

se spočítají podle vzorců na str. 32 skript (Daněček, J., Dlouhý, O., Příbyl, O.: *Matematika I* modul 8 určitý integrál. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s. r. o., 2007, 50 s. ISBN 978-80-7204-525-9):

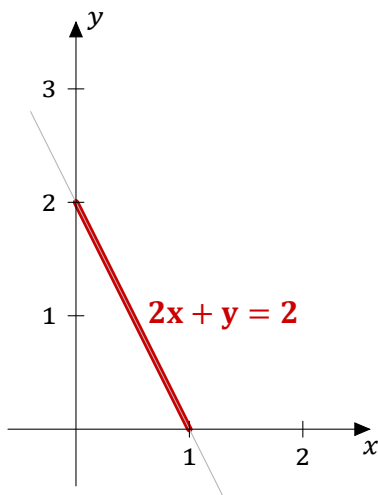
$$S_x(\mathcal{L}) = \int_{\alpha}^{\beta} \varrho(t) \cdot \underbrace{\psi(t)}_y \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

$$S_y(\mathcal{L}) = \int_{\alpha}^{\beta} \varrho(t) \cdot \underbrace{\varphi(t)}_x \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

Určete (vzhledem k souřadným osám) **statické momenty** $S_x(\mathcal{L})$ a $S_y(\mathcal{L})$ **úsečky** ležící na přímce

$$2x + y = 2$$

která je ohraničena souřadnými osami a jejíž měrná hustota je $\varrho(t) = 1 \text{ [kg.m}^{-2}\text{]}$.



Rovnici přímky upravíme na tvar: $y = 2 - 2x$

Za proměnnou x zvolíme parametr t

$$\begin{aligned} \text{Pak:} \quad x &= t & \Rightarrow & x' = 1 \\ y &= 2 - 2t & \Rightarrow & y' = -2 \\ t &\in \langle 0; 1 \rangle \end{aligned}$$

a dosadíme do uvedených vzorců.

$$\begin{aligned} S_x(\mathcal{L}) &= \int_{\alpha}^{\beta} \varrho(t) \cdot \underbrace{\psi(t)}_y \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \int_0^1 1 \cdot (2 - 2t) \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2} dt = \\ &= 2\sqrt{5} \int_0^1 dt - 2\sqrt{5} \int_0^1 t dt = 2\sqrt{5} \left[t \right]_0^1 - 2\sqrt{5} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \text{obě primitivní funkce} \\ &\quad \text{jsou na intervalu} \\ &\quad \text{integrace **spojité**} \\ &= 2\sqrt{5} [1 - 0] - 2\sqrt{5} \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = 2\sqrt{5} \left[1 - \frac{1}{2} \right] = \underline{\underline{\sqrt{5}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y(\mathcal{L}) &= \int_{\alpha}^{\beta} \varrho(t) \cdot \underbrace{\varphi(t)}_x \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \int_0^1 1 \cdot t \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2} dt = \\ &= \sqrt{5} \int_0^1 t dt = \sqrt{5} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \text{primitivní funkce} \\ &\quad \text{je na intervalu} \\ &\quad \text{integrace **spojitá**} = \sqrt{5} \left[\frac{1^2}{2} - 0 \right] = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{2}}} \end{aligned}$$

Těžiště rovinného oblouku \mathcal{L} o parametrických rovnicích $\mathcal{L}: \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ t \in \langle \alpha; \beta \rangle \end{matrix}$ a o měrné hustotě $\varrho(t)$ [kg.m⁻²], se spočítá podle vzorce (str. 32 zmíněných skript):

$$T(\mathcal{L}) = \left[\frac{S_y}{m}; \frac{S_x}{m} \right]$$

kde **hmotnost** rovinného oblouku m je

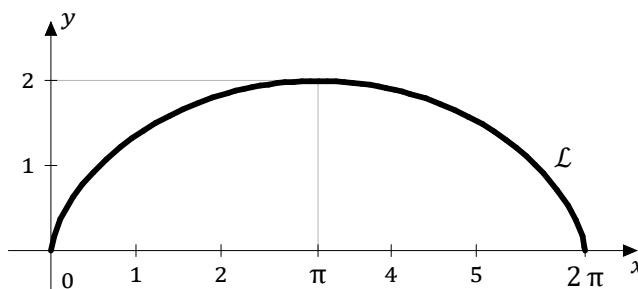
$$m(\mathcal{L}) = \int_{\alpha}^{\beta} \varrho(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

a **statické momenty** rovinného oblouku vzhledem k souřadným osám jsou uvedeny na straně 1

Určete souřadnice těžiště rovinného oblouku \mathcal{L} o parametrických rovnicích

$$\begin{matrix} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{matrix} \quad \text{jestliže: } 0 \leq t \leq 2\pi \quad (\text{jeden oblouk cykloidy}) \quad \text{a } \varrho = 1 \text{ kg.m}^{-2}.$$

$$\begin{matrix} x = t - \sin t; & x' = 1 - \cos t \\ y = 1 - \cos t; & y' = \sin t \\ t \in \langle 0; 2\pi \rangle \end{matrix}$$



Po dosazení:

$$\begin{aligned} m(\mathcal{L}) &= \int_0^{2\pi} (1) \cdot \sqrt{[(1 - \cos t)]^2 + [(\sin t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\left(2 \frac{t}{2}\right)} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \left(\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}\right)} dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = \begin{matrix} \text{funkce} \\ \sin \frac{t}{2} \text{ je na} \\ \text{intervalu} \\ (0; 2\pi) \\ \text{kladná} \end{matrix} = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \left| \begin{array}{c} \frac{t}{2} = u \\ \frac{t}{2} dt = du \\ dt = 2 du \\ \hline \begin{array}{cc} t & u \\ 2\pi & \pi \\ 0 & 0 \end{array} \end{array} \right| = \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sin u \cdot 2 du = 4 \left[-\cos u \right]_0^{\pi} = \begin{matrix} \text{primitivní funkce} \\ \text{je na intervalu} \\ \text{integrace spojitá} \end{matrix} = 4 \left[-\underbrace{\cos \pi}_{-1} - \left(-\underbrace{\cos 0}_1 \right) \right] = 8 \text{ j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_x(L) &= \int_0^{2\pi} \underbrace{(1)}_q \cdot \underbrace{(1 - \cos t)}_y \cdot \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt = \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[1 - \cos\left(2 \frac{t}{2}\right)\right]^{\frac{3}{2}} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[1 - \left(\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}\right)\right]^{\frac{3}{2}} dt = \\
&= 2^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}} dt = 4 \int_0^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right|^3 dt = \begin{array}{l} \text{funkce } \sin \frac{t}{2} \\ \text{je na intervalu} \\ (0; 2\pi) \text{ kladná} \end{array} = 4 \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 \frac{t}{2}}_{\sin^3 \frac{t}{2}} \cdot \sin \frac{t}{2} dt = \\
&= 4 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \cdot \sin \frac{t}{2} dt = \left| \begin{array}{l} \cos \frac{t}{2} = u \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} dt = du \\ \sin \frac{t}{2} dt = -2 du \\ t = 2\pi \quad u = -1 \\ t = 0 \quad u = 1 \end{array} \right| = 4 \int_1^{-1} (1 - u^2) \cdot (-2) du = \\
&= +8 \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = 8 \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 = \begin{array}{l} \text{primitivní funkce} \\ \text{je na intervalu} \\ \text{integrace spojitá} \end{array} \\
&= 8 \left\{ \left[1 - \frac{1^3}{3}\right] - \left[(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right] \right\} = 8 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_y(L) &= \int_0^{2\pi} \underbrace{(1)}_q \cdot \underbrace{(t - \sin t)}_x \cdot \sqrt{[(1 - \cos t)]^2 + [(\sin t)]^2} dt = \\
&= \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \cdot \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \\
&= \sqrt{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} t \cdot \sqrt{1 - \cos\left(2 \frac{t}{2}\right)} dt}_A - \sqrt{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin t \sqrt{1 - \cos t} dt}_B = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4\pi - \sqrt{2} \cdot 0 = 8\pi
\end{aligned}$$

$$\text{Kde: } A = \int_0^{2\pi} t \cdot \sqrt{1 - \left(\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}\right)} dt = \int_0^{2\pi} t \cdot \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} t \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt =$$

funkce $\sin \frac{t}{2}$
je na intervalu $(0; 2\pi)$ **kladná**

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} t \cdot \sin \frac{t}{2} dt = \left| \begin{array}{ll} u = t & v' = \sin \frac{t}{2} \\ u' = 1 & v = -2 \cos \frac{t}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \sqrt{2} \left\{ \left[t(-2 \cos \frac{t}{2}) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1(-2 \cos \frac{t}{2}) dt \right\} = \sqrt{2} \left\{ \left[-2t \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} + \left[4 \sin \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} \right\} =$$

primitivní funkce
jsou na intervalu
integrace **spojité**

$$= \sqrt{2} \left[\left(-2 \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} + 2 \cdot 0 \cdot \underbrace{\cos 0}_1 \right) + \left(4 \underbrace{\sin \pi}_0 - 4 \underbrace{\sin 0}_0 \right) \right] =$$

$$\sqrt{2}(4\pi + 0) = \sqrt{2} \cdot 4\pi$$

$$\mathbf{B} = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} \cdot \underbrace{\sin t dt}_{\sin t dt = ds} = \left| \begin{array}{l} 1 - \cos t = s \\ \sin t dt = ds \end{array} \right| = \int_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{s} ds = \int_{t=0}^{t=2\pi} s^{\frac{1}{2}} ds = \left[\frac{s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{t=0}^{t=2\pi} =$$

$$= \frac{2}{3} \left[\sqrt{(1 - \cos t)^3} \right]_0^{2\pi} = \begin{array}{l} \text{primitivní funkce} \\ \text{je na intervalu} \\ \text{integrace } \mathbf{spojitá} \end{array} = \frac{2}{3} \left[\sqrt{(1 - \cos 2\pi)^3} - \sqrt{(1 - \cos 0)^3} \right] =$$

$$= \frac{2}{3} \left[\sqrt{(1 - 1)^3} - \sqrt{(1 - 1)^3} \right] = \frac{2}{3} \cdot [0 - 0] = 0$$

Souřadnice těžiště:

$$T = \left[\frac{8\pi}{8}; \frac{\frac{32}{3}}{8} \right] \Rightarrow \underline{\underline{T = \left[\pi; \frac{4}{3} \right]}}$$

Těžiště tenké rovinné desky \mathcal{A} (jejíž každý bod je v **kartézských souřadnicích** vyjádřen: $\mathcal{A} = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$)
o plošné (měrné) hustotě $\varrho(x)$ $[\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}]$, kde f, g jsou spojité funkce $\forall x \in \langle a; b \rangle$,
se spočítá podle vzorce (str. 29 zmíněných skript):

$$T(\mathcal{A}) = \left[\frac{S_y}{m}; \frac{S_x}{m} \right]$$

kde hmotnost tenké rovinné desky m je

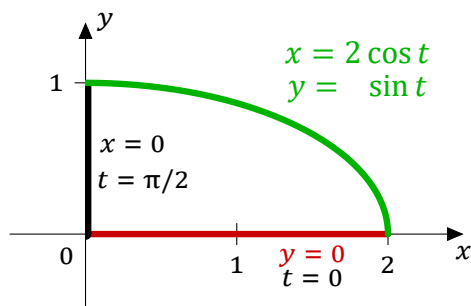
$$m(\mathcal{A}) = \int_a^b \varrho(x) [f(x) - g(x)] dx$$

a statické momenty tenké rovinné desky vzhledem k souřadným osám jsou

$$S_x(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_a^b \varrho(x) [f^2(x) - g^2(x)] dx \quad S_y(\mathcal{A}) = \int_a^b \varrho(x) x [f(x) - g(x)] dx$$

Určete souřadnice těžiště tenké homogenní rovinné desky \mathcal{A} jejíž každý bod vyhovuje vztahům $\mathcal{A} = \left\{ [x; y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \cos t, 0 \leq y \leq \sin t, t \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \right\}$,
jestliže $\varrho = 1$.

Nakreslíme si hranice dané plochy, přičemž **křivka** je zadána parametricky:



Je zřejmé, že plocha je ohraničena

- částí osy y
- čtvrtinou elipsy
- částí osy x

Kartézská souřadná soustava. Nejprve z **parametrických** rovnic elipsy sestavíme funkci:

$$f(x) : y = \dots ; \quad g(x) = 0$$

$$\begin{array}{l} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{array} \quad \begin{array}{l} |^2 \\ |^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2 = 4 \cos^2 t \\ y^2 = \sin^2 t \end{array} \quad \begin{array}{l} | \\ | \cdot 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t \\ 4y^2 &= 4 \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t) - x^2 \end{aligned}$$

$$y^2 = 1 - \frac{1}{4}x^2 \quad \text{v 1. kvadrantu jsou } x \text{ i } y \text{ **nezáporná**}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 - x^2} \quad \text{a po dosazení do uvedených vzorců}$$

$$m(\mathcal{A}) = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4-x^2} - 0 \right] dx = \left| \begin{array}{c} x = \sqrt{4} \cdot \sin y \\ dx = 2 \cdot \cos y dy \\ x \quad \frac{2}{0} \mid \frac{\pi/2}{0} \quad y \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sqrt{4-4\sin^2 y} \cdot 2 \cos y dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4} \cdot \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 y}}_{\sqrt{\cos^2 y}} \cdot \cos y dy = \text{funkce } \cos y \text{ je na oboru integrace } \textbf{kladná}, \text{ proto nepíšeme } \textbf{absolutní hodnotu} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \cos^2 y dy =$$

$$\left| \begin{array}{c} \cos^2 y - \sin^2 y = \cos 2y \\ \cos^2 y + \sin^2 y = 1 \\ \hline 2 \cos^2 y = 1 + \cos 2y \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2y) dy = \left[y + \frac{1}{2} \sin 2y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\text{primitivní funkce je na intervalu integrace } \textbf{spojitá} = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \underbrace{\sin 2 \frac{\pi}{2}}_0 \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \underbrace{\sin(2 \cdot 0)}_0 \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$S_x(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{\varrho} \cdot \left[\frac{1}{4} (4-x^2) - 0^2 \right] dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} \right) dx = \left[\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8 \cdot 3} \cdot x^3 \right]_0^2 =$$

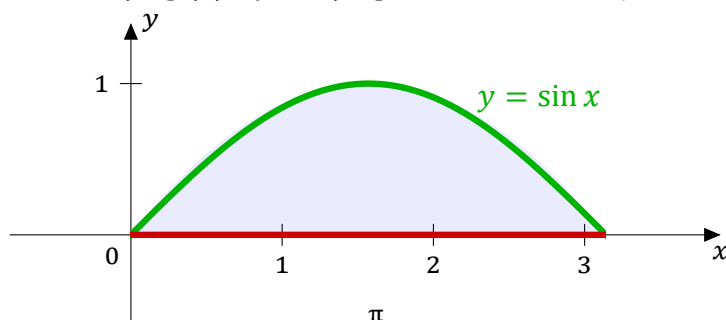
$$\text{primitivní funkce jsou na intervalu integrace } \textbf{spojité} = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{8 \cdot 3} \cdot 2^3 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{8 \cdot 3} \cdot 0^3 \right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$S_y(\mathcal{A}) = \int_0^2 \frac{1}{\varrho} \cdot x \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4-x^2} - 0^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x \cdot \sqrt{4-x^2} dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{4-x^2} = z \\ 4-x^2 = z^2 \\ -2x dx = 2z dz \\ dx = \frac{-z}{x} dz \\ x \quad \frac{2}{0} \mid \frac{0}{2} \quad y \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^0 x \cdot z \cdot \frac{-z}{x} dz = \frac{1}{2} \int_0^2 z^2 dz = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^2 = \text{primitivní funkce je na intervalu integrace } \textbf{spojitá} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 0 \right) = \frac{4}{3}$$

$$\mathbf{T} = \left[\frac{\frac{4}{3}}{\frac{\pi}{2}}; \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\pi}{2}} \right] = \underline{\underline{\left[\frac{8}{3\pi}; \frac{4}{3\pi} \right]}}$$

Určete souřadnice těžiště tenké rovinné desky \mathcal{A} ohraničené křivkou $f(x) : y = \sin x$ a osou x ($\Rightarrow g(x) : y = 0$), pro $0 \leq x \leq \pi$, jestliže $\varrho(x) = x + 1$.



a po dosazení do vzorců:

$$m(\mathcal{A}) = \int_0^{\pi} \underbrace{(x+1)}_{\varrho(x)} [\underbrace{\sin x}_{\text{green}} - \underbrace{0}_{\text{red}}] dx = \underbrace{\int_0^{\pi} x \sin x dx}_{\text{A}} + \underbrace{\int_0^{\pi} \sin x dx}_{\text{B}} = \pi + 2$$

$$\text{A} = \int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ u' = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} v' = \sin x \\ v = -\cos x \end{array} = [-x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x dx =$$

$$= [-x \cos x]_0^{\pi} + [\sin x]_0^{\pi} =$$

primitivní funkce
jsou na intervalu
integrace **spojité**

$$= \left[-\pi \underbrace{\cos \pi}_{-1} - (-0 \cdot \underbrace{\cos 0}_{1}) \right] + \left[\underbrace{\sin \pi}_0 - \underbrace{\sin 0}_0 \right] = \pi + 0 = \underline{\underline{\pi}}$$

$$\text{B} = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} =$$

primitivní funkce
je na intervalu
integrace **spojitá**

$$= \left[-\underbrace{\cos \pi}_{-1} - (-\underbrace{\cos 0}_{1}) \right] = \underline{\underline{2}}$$

$$S_x(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \underbrace{(x+1)}_{\varrho(x)} \cdot [\underbrace{\sin^2 x}_{\text{green}} - \underbrace{0^2}_{\text{red}}] dx = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}{\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x} \quad | \cdot (-1)$$

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (x+1) \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (x+1) \cdot (1 - \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \left(x+1 - \underbrace{x \cos 2x}_{\text{C} = \int x \cos 2x dx} - \underbrace{\cos 2x}_{2x=w} \right) dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{2} + x - \text{C} - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{2} + x - \frac{x \sin 2x + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} =$$

primitivní funkce
jsou na intervalu
integrace **spojité**

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{\pi^2}{2} + \pi - \frac{1}{2} \pi \underbrace{\sin 2\pi}_0 + \frac{1}{2} \underbrace{\cos 2\pi}_1 - \frac{1}{2} \underbrace{\sin 2\pi}_0 - \left(0 + 0 - 0 + \frac{1}{2} \underbrace{\cos 0}_1 - \frac{1}{2} \underbrace{\sin 0}_0 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{2} + \pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi^2 + 2\pi}{8}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \int x \cos 2x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = \cos 2x \\ u' = 1 \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2} \cdot x \sin 2x - \int \sin 2x \, dx = \left| \begin{array}{l} 2x = w \\ 2 \, dx = dw \\ dx = \frac{1}{2} dw \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot x \sin 2x - \int \sin w \cdot \frac{1}{2} dw = \frac{1}{2} \cdot x \sin 2x - \frac{1}{2}(-\cos w) + c = \frac{x \sin 2x + \cos 2x}{2} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y(\mathcal{A}) &= \int_0^\pi \underbrace{(x+1)}_{\varrho(x)} \cdot x \cdot [\sin x - 0] \, dx = \int_0^\pi (x^2 + x) \cdot \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 + x \quad v' = \sin x \\ u' = 2x + 1 \quad v = -\cos x \end{array} \right| \\ &= [(x^2 + x) \cdot (-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi (2x + 1) \cdot (-\cos x) \, dx = \\ &= [-(x^2 + x) \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi (2x + 1) \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x + 1 \quad v' = \cos x \\ u' = 2 \quad v = \sin x \end{array} \right| \\ &= [-(x^2 + x) \cos x]_0^\pi + [(2x + 1) \cdot \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 2 \sin x \, dx = \\ &= [-(x^2 + x) \cos x]_0^\pi + [(2x + 1) \sin x]_0^\pi - 2[-\cos x]_0^\pi = \begin{array}{l} \text{primitivní funkce} \\ \text{jsou na intervalu} \\ \text{integrace spojitě} \end{array} \\ &= \left[-(\pi^2 + \pi) \underbrace{\cos \pi}_{-1} + (0^2 + 0) \underbrace{\cos 0}_1 \right] + \left[(2\pi + 1) \underbrace{\sin \pi}_0 - (2 \cdot 0 + 1) \underbrace{\sin 0}_0 \right] - \\ &\quad - 2 \left[-\underbrace{\cos \pi}_{-1} + \underbrace{\cos 0}_1 \right] = \pi^2 + \pi - 4 \end{aligned}$$

$$T = \left[\frac{\pi^2 + \pi - 4}{\pi + 2}; \frac{\frac{\pi^2 + 2\pi}{8}}{\pi + 2} \right] \doteq [1,75; 0,39]$$

Hmotnost tenké *homogenní* rovinné desky \mathcal{A} (jejíž každý bod je v ***polárních souřadnicích*** vyjádřen svou **vzdáleností** r od počátku a orientovaným **úhlem** φ , který svírá jeho průvodič s kladným směrem osy x)

o plošné (měrné) hustotě ϱ [kg.m⁻²], kde $r(\varphi)$ je spojitá funkce a $\varphi \in \langle \alpha; \beta \rangle$, se spočítá podle vzorce (str. 30 zmíněných skript)

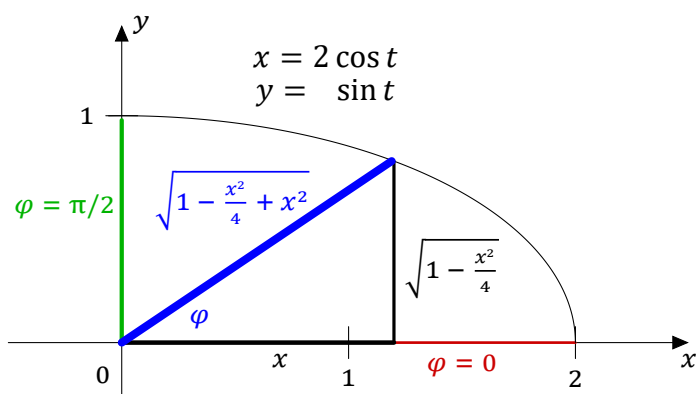
$$m(\mathcal{A}) = \frac{\varrho}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi$$

Určete hmotnost tenké *homogenní* rovinné desky \mathcal{A} jejíž každý bod vyhovuje vztahům

$$\mathcal{A} = \left\{ [x; y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \cos t, \ 0 \leq y \leq \sin t, \ t \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \right\},$$

jestliže $\rho = 1$ (rovinná deska je stejná jako na str. 6).

Nakreslíme si hranice dané plochy, přičemž hraniční křivka je zadána parametricky:



Na straně 6 jsme odvodili:

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \quad \text{Pak:}$$

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi} = \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{3x^2}{4}}} = \frac{2x}{\sqrt{4 + 3x^2}}$$

Polární souřadná soustava. Nejprve z parametrických rovnic elipsy sestavíme **funkci vzdálenosti** daného bodu elipsy od počátku v závislosti na orientovaném úhlu φ průvodiče (spojnice tohoto bodu s počátkem soustavy souřadnic), kde $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$.

Tuto funkci vzdálenosti označíme $r(\varphi)$ a pro její sestavení využijeme znázorněný pravoúhlý trojúhelník, ve kterém si vyjádříme funkci $\cos \varphi$.

$$\cos \varphi = \frac{2x}{\sqrt{4+3x^2}} \quad |^2$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{4x^2}{4+3x^2}$$

$$(4+3x^2) \cos^2 \varphi = 4x^2$$

$$4 \cos^2 \varphi = 4x^2 - 3x^2 \cos^2 \varphi$$

$$\frac{4 \cos^2 \varphi}{4-3 \cos^2 \varphi} = x^2$$

$$r(\varphi) = \sqrt{1 + \frac{3x^2}{4}}$$

$$r(\varphi) = \sqrt{1 + \frac{3 \cdot \frac{4 \cos^2 \varphi}{4-3 \cos^2 \varphi}}{4}}$$

$$r(\varphi) = \sqrt{1 + \frac{3 \cos^2 \varphi}{4-3 \cos^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{4}{4-3 \cos^2 \varphi}}$$

$$m(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{1}_{\varrho} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\frac{4}{4-3 \cos^2 \varphi}} \right)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{4-3 \cos^2 \varphi} d\varphi = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \varphi = w \\ \varphi = \operatorname{arctg} w \\ d\varphi = \frac{1}{1+w^2} dw \\ \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+w^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{2}{4-3 \cdot \frac{1}{1+w^2}} \cdot \frac{1}{1+w^2} dw = \int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{2}{4w^2+1} dw = \left| \begin{array}{l} \sqrt{4}w = \sqrt{1}s \\ w = \frac{s}{2} \\ dw = \frac{1}{2} ds \end{array} \right| =$$

$$= \int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{2}{4 \cdot \frac{s^2}{4} + 1} \cdot \frac{1}{2} ds = \int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{s^2+1} ds = \left[\operatorname{arctg} s \right]_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \left[\operatorname{arctg} 2w \right]_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \left[\operatorname{arctg} (2 \operatorname{tg} \varphi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \begin{array}{l} \text{primitivní fun-} \\ \text{kce je } \textbf{spojitá} \\ \text{na } \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{array} = \left[\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \operatorname{arctg} \underbrace{(2 \operatorname{tg} x)}_{\infty} - \operatorname{arctg} \underbrace{(2 \operatorname{tg} 0)}_0 \right] =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} \text{ j}}}$$