Stanovte hodnotu určitého integrálu $$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

když víte: $$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right) + \text{konst.}$$

Správnost primitivní funkce (neurčitého integrálu) si můžete ověřit derivováním nebo použijte **MAW** a poté zvolte ***Pomoc s hledáním primitivní funkce***. Definičním oborem integrované funkce jsou všechna reálná čísla.

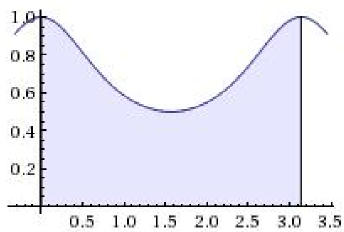
1. Nekorektní použití základní věty integrálního počtu[1]

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg}\pi\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} 0\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\cdot 0\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\cdot 0\right) = 0 \quad \text{(tento výsledek dává výše zmíněný \textbf{MAW})}$$

Ovšem!

1. Zadaná funkce, kterou integrujeme, je kladná.
2. U kladné funkce určitým integrálem počítáme plošný obsah, ohraničený touto funkcí a osou x
3. A tento plošný obsah není (viz obrázek) roven NULE!



2. Primitivní funkce je nespojitá[2] pro $x = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right) - \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right)\right] +$$

$$+ \left[\lim_{x\to\pi^-} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right) - \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lim_{a\to\infty} \operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 0 - \lim_{b\to-\infty} \operatorname{arctg} b\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2} - 0 + 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \doteq 2{,}22 \quad \text{(tento výsledek dává např. \textbf{WolframAlpha})}$$

---

[1] Podle **Poznámky 2.3.** na straně 6 skript (Daněček, J., Dlouhý, O., Přibyl, O.: *Matematika I* modul 8 určitý integrál. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s. r. o., 2007, 50 s. ISBN 978–80–7204–525–9), musí být primitivní funkce na ***uzavřeném*** intervalu $\langle 0; \pi\rangle$ ***spojitá***, jinak nejsme oprávněni následující postup $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{\pi} = F(\pi) - F(0)$ použít.

[2] Nejdříve využijeme aditivnosti integrálu (ve vhodném bodě jej rozdělíme na dva) a potom budeme postupovat podle **Definice 2.2.** tamtéž: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$

1. $[x \in (-1\,;\,\infty)]$ $$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (x+1)^{\frac{-1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[2\,(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{2} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in \langle -1\,;\,\infty)$, tedy i pro $x \in \langle -1\,;\,2\rangle$, proto

$$= \left[2\sqrt{x+1}\right]_{-1}^{2} = 2\sqrt{2+1} - 2\sqrt{-1+1} = \underline{\underline{\mathbf{2\sqrt{3}}}}$$

2. $[x \in (-1\,;\,\infty)]$ $$\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x+1}\right]_{-1}^{\infty}$$ primitivní funkce je spojitá: $x \in \langle -1\,;\,\infty)$

$$= \left[2\sqrt{x+1}\right]_{-1}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \left(2\sqrt{x+1}\right) - 2\sqrt{-1+1} = \infty - 0 \implies$$ **integrál neexistuje** (diverguje)

3. $[x \neq 0; x \neq 1]$ $$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x\,(x-1)}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \left[-\ln|x| + \ln|x-1|\right]_{-1}^{2} =$$

$= \left[\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right]_{-1}^{2}$ primitivní funkce je spojitá pro $x \in (-\infty\,;0) \cup (0\,;1) \cup (1\,;\infty)$, proto

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x\,(x-1)}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x\,(x-1)}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{x\,(x-1)}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{1}{x\,(x-1)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right]_{-1}^{0} + \left[\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right]_{0}^{1} + \left[\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right]_{1}^{2} =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0^-} \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \ln\left|\frac{-1-1}{-1}\right|\right) +$$

$$+ \left(\lim_{x\to 1^-} \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \lim_{x\to 0^+} \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right) +$$

$$+ \left(\ln\left|\frac{2-1}{2}\right| - \lim_{x\to 1^-} \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right) =$$

$$= \infty - \ln 2 - \infty - \infty - \ln 2 + \infty \implies$$ **integrál neexistuje**

4. $[x \in \mathbb{R}]$ $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \sqrt{x^2+1} = y \\ x^2+1 = y^2 \\ 2\,x\,\mathrm{d}x = 2\,y\,\mathrm{d}y \\ x\,\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}y \end{array}\right| = \int_{(x=-\infty)}^{(x=\infty)} \frac{y}{y}\,\mathrm{d}y = [y] = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_{-\infty}^{\infty} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$, proto

$$= \left[\sqrt{x^2+1}\right]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = \infty - \infty \implies$$ **integrál neexistuje**

5. $[x\in(0;\infty)]\ \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1.\ln x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u'=1 & v=\ln x \\ u=x & v'=\frac{1}{x}\end{matrix}\right| = [x\ \ln x]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$

$= [x\ \ln x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x = [x\ \ln x]_0^1 - [x]_0^1 = [x\ \ln x - x]_0^1 =$

primitivní funkce je spojitá pro $x\in(0;\infty)$, tedy i pro $x\in(0;1\rangle$, proto

$= [x\ \ln x - x]_0^1 = (1.\underbrace{\ln 1}_{0} - 1) - \lim_{x\to 0^+}(x\ \ln x - x) = (-1) - \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) - 0 =$

$= -1 - \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{l'H.}{=} -1 - \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} - 0 = -1 - \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -1 - \lim_{x\to 0^+}(-x) = \underline{\underline{-1}}$

6. $[x\neq 0]\ \int_3^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_3^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x = [-x^{-1}]_3^\infty = \left[\frac{-1}{x}\right]_3^\infty =$

primitivní funkce je spojitá pro $x\neq 0$, tedy i pro $x\in\langle 3;\infty)$, proto

$= \left[\frac{-1}{x}\right]_3^\infty = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x} - \frac{-1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

7. $[x\neq 0]\ \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x^{-2}\,\mathrm{d}x = [-x^{-1}]_{-1}^1 = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^1 =$

primitivní funkce je spojitá pro $x\neq 0$, tedy i pro $x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle$, proto

$= \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^1 = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{-1}{x}\right]_0^1 = \left(\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x} - \frac{-1}{-1}\right) + \left(\frac{-1}{1} - \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{x}\right) = \infty - 1 - 1 + \infty$

$\Rightarrow$ **integrál neexistuje**

8. $[x\in\mathbb{R}]\ \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} \operatorname{arctg} x = y \\ \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y\end{matrix}\right| = \int_{(x=-\infty)}^{(x=\infty)} y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right] = \left[\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}\right]_{-\infty}^\infty =$

primitivní funkce je spojitá pro $x\in\mathbb{R}$, proto

$= \left[\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}\right]_{-\infty}^\infty = \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} - \lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} = \underline{\underline{0}}$

9. $[x\in\mathbb{R}]\ \int_0^\infty x\ \sin x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u=x & v'=\sin x \\ u'=1 & v=-\cos x\end{matrix}\right| = [x.(-\cos x)]_0^\infty - \int_0^\infty(-\cos x)\,\mathrm{d}x =$

$[x.(-\cos x)]_0^\infty + [\sin x]_0^\infty = [x.(-\cos x) + \sin x]_0^\infty$ primitivní funkce je spojitá pro $x\in\mathbb{R}$

proto: $[x.(-\cos x) + \sin x]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}(-x\ \cos x + \sin x) - (0.\underbrace{\cos 0}_{1} + \underbrace{\sin 0}_{0})$

ale $\lim_{x\to\infty}\cos x$ NEEXISTUJE $\Rightarrow$ **integrál neexistuje**