Příklad. Vypočítejte parciální derivace 2. řádu funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Příklad. Vypočítejte parciální derivace 2. řádu funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Řešení.

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Příklad. Vypočítejte parciální derivace 2. řádu funkce $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Řešení. *Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.*

Nejprve spočteme obě derivace prvního řádu:

$$z'_x = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)'_x =$$

Příklad. Vypočítejte parciální derivace 2. řádu funkce $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Řešení. *Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.*

Nejprve spočteme obě derivace prvního řádu:

$$z'_x = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x =$$

$$\overset{(?)}{=}$$

Příklad. Vypočítejte parciální derivace 2. řádu funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Řešení. *Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.*

Nejprve spočteme obě derivace prvního řádu:

$$z'_x = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x =$$

$$\overset{(?)}{=} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) =$$

Příklad. Vypočítejte parciální derivace 2. řádu funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Řešení. *Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.*

Nejprve spočteme obě derivace prvního řádu:

$$z'_x = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x =$$

$$\overset{(?)}{=} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

Příklad. Vypočítejte parciální derivace 2. řádu funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Řešení.

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Nejprve spočteme obě derivace prvního řádu:

$$z'_x = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x =$$

$$\overset{(?)}{=} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$z'_y = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)'_y =$$

Příklad. Vypočítejte parciální derivace 2. řádu funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Řešení. *Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.*

Nejprve spočteme obě derivace prvního řádu:

$$z'_x = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = $$

$$\overset{(?)}{=} \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$z'_y = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = $$

$$\overset{(??)}{=}$$

Příklad. Vypočítejte parciální derivace 2. řádu funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Řešení. *Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.*

Nejprve spočteme obě derivace prvního řádu:

$$z'_x = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x =$$

$$\overset{(?)}{=} \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$z'_y = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y =$$

$$\overset{(??)}{=} \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} =$$

Příklad. Vypočítejte parciální derivace 2. řádu funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Řešení. *Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.*

Nejprve spočteme obě derivace prvního řádu:

$$z'_x = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = $$

$$\overset{(?)}{=} \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$z'_y = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = $$

$$\overset{(??)}{=} \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Příklad. Vypočítejte parciální derivace 2. řádu funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Řešení. *Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.*

Nejprve spočteme obě derivace prvního řádu:

$$z'_x = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = $$

$$\stackrel{(?)}{=} \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$z'_y = \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = $$

$$\stackrel{(??)}{=} \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

A pokračujeme s derivacemi řádu druhého.

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Platí

$$z''_{xx} =$$

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Platí

$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?)}{=}$$

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Platí

$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?)}{=} -y \cdot \left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_x =$$

$$\overset{(??)}{=}$$

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Platí

$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?)}{=} -y\cdot\left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_x =$$

$$\overset{(??)}{=} y\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-2}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x =$$

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Platí

$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?)}{=} -y \cdot \left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_x =$$

$$\overset{(??)}{=} y \cdot \left(x^2+y^2\right)^{-2} \cdot \left(x^2+y^2\right)'_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Platí

$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?)}{=} -y\cdot\left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_x =$$

$$\overset{(??)}{=} y\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-2}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{xy} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y \overset{(???)}{=}$$

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Platí

$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?)}{=} -y \cdot \left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_x =$$

$$\overset{(??)}{=} y \cdot \left(x^2+y^2\right)^{-2} \cdot \left(x^2+y^2\right)'_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{xy} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y \overset{(???)}{=} -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Platí

$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?)}{=} -y \cdot \left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_x =$$

$$\overset{(??)}{=} y \cdot \left(x^2+y^2\right)^{-2} \cdot \left(x^2+y^2\right)'_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{xy} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y \overset{(???)}{=} -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{yx} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?!)}{=}$$

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Platí

$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?)}{=} -y\cdot\left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_x =$$

$$\overset{(??)}{=} y\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-2}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{xy} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y \overset{(???)}{=} -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{yx} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?!)}{=} \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Platí

$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x \stackrel{(?)}{=} -y\cdot\left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_x =$$

$$\stackrel{(??)}{=} y\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-2}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{xy} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y \stackrel{(???)}{=} -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{yx} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x \stackrel{(?!)}{=} \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Platí

$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?)}{=} -y\cdot\left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_x =$$

$$\overset{(??)}{=} y\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-2}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{xy} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y \overset{(???)}{=} -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{yx} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?!)}{=} \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y \overset{(!)}{=}$$

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Platí

$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?)}{=} -y\cdot\left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_x =$$

$$\overset{(??)}{=} y\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-2}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{xy} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y \overset{(???)}{=} -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{yx} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?!)}{=} \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y \overset{(!)}{=} x\cdot\left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_y =$$

$$\overset{(!?)}{=}$$

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Platí

$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?)}{=} -y\cdot\left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_x =$$

$$\overset{(??)}{=} y\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-2}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{xy} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y \overset{(???)}{=} -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{yx} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?!)}{=} \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y \overset{(!)}{=} x\cdot\left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_y =$$

$$\overset{(!?)}{=} -x\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-2}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y =$$

Dvojklikem na symboly modrých otazníků můžete vyvolat další dílčí nápovědu.

Platí

$$z''_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?)}{=} -y \cdot \left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_x =$$

$$\overset{(??)}{=} y \cdot \left(x^2+y^2\right)^{-2} \cdot \left(x^2+y^2\right)'_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{xy} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y \overset{(???)}{=} -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{yx} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x \overset{(?!)}{=} \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y \overset{(!)}{=} x \cdot \left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_y =$$

$$\overset{(!?)}{=} -x \cdot \left(x^2+y^2\right)^{-2} \cdot \left(x^2+y^2\right)'_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Opakovaně jsme použili pravidlo pro derivování: (1) násobku konstantou, resp. (2) mocninné funkce:

$$\left(\frac{y}{x}\right)'_x \stackrel{(1)}{=} y \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'_x = y \cdot \left(x^{-1}\right)'_x \stackrel{(2)}{=} y \cdot \left(-1 \cdot x^{-2}\right) = -\frac{y}{x^2}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)'_y \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{x} \cdot (y)'_y \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{x} \cdot 1$$

zpět