**Příklad.** Vypočítejte parciální derivace prvního řádu složené funkce

$$z = u^2 v - v^2 u,\ u = x\cos y,\ v = x\sin y.$$

**Příklad.** Vypočítejte parciální derivace prvního řádu složené funkce

$$z = u^2 v - v^2 u,\ u = x\cos y,\ v = x\sin y.$$

**Řešení.**

Použijeme vzorce pro derivaci složené funkce dvou reálných proměnných

**Příklad.** Vypočítejte parciální derivace prvního řádu složené funkce

$$z = u^2 v - v^2 u,\ u = x\cos y,\ v = x\sin y.$$

**Řešení.**

Použijeme vzorce pro derivaci složené funkce dvou reálných proměnných

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x,$$

**Příklad.** Vypočítejte parciální derivace prvního řádu složené funkce

$$z = u^2 v - v^2 u,\ u = x \cos y,\ v = x \sin y.$$

**Řešení.**

Použijeme vzorce pro derivaci složené funkce dvou reálných proměnných

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x, \qquad z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y$$

**Příklad.** Vypočítejte parciální derivace prvního řádu složené funkce

$$z = u^2 v - v^2 u,\ u = x \cos y,\ v = x \sin y.$$

**Řešení.**

Použijeme vzorce pro derivaci složené funkce dvou reálných proměnných

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x, \qquad z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y,$$

kam budeme dosazovat následující: $z'_u = 2uv - v^2$,

**Příklad.** Vypočítejte parciální derivace prvního řádu složené funkce

$$z = u^2 v - v^2 u,\ u = x\cos y,\ v = x\sin y.$$

**Řešení.**

Použijeme vzorce pro derivaci složené funkce dvou reálných proměnných

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x, \qquad z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y,$$

kam budeme dosazovat následující: $z'_u = 2uv - v^2$, $z'_v = u^2 - 2uv$.

**Příklad.** Vypočítejte parciální derivace prvního řádu složené funkce

$$z = u^2 v - v^2 u,\ u = x \cos y,\ v = x \sin y.$$

**Řešení.**

Použijeme vzorce pro derivaci složené funkce dvou reálných proměnných

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x, \qquad z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y,$$

kam budeme dosazovat následující: $z'_u = 2uv - v^2$, $z'_v = u^2 - 2uv$.

Dostáváme

$$z'_x \quad =$$

**Příklad.** Vypočítejte parciální derivace prvního řádu složené funkce

$$z = u^2 v - v^2 u, \; u = x \cos y, \; v = x \sin y.$$

**Řešení.**

Použijeme vzorce pro derivaci složené funkce dvou reálných proměnných

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x, \qquad z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y,$$

kam budeme dosazovat následující: $z'_u = 2uv - v^2$, $z'_v = u^2 - 2uv$.

Dostáváme

$$\begin{aligned} z'_x &= \left(2uv - v^2\right) \cdot u'_x + \left(u^2 - 2uv\right) \cdot v'_x = \\ &= \end{aligned}$$

**Příklad.** Vypočítejte parciální derivace prvního řádu složené funkce

$$z = u^2 v - v^2 u,\ u = x\cos y,\ v = x\sin y.$$

**Řešení.**

Použijeme vzorce pro derivaci složené funkce dvou reálných proměnných

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x, \qquad z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y,$$

kam budeme dosazovat následující: $z'_u = 2uv - v^2$, $z'_v = u^2 - 2uv$.

Dostáváme

$$\begin{aligned} z'_x &= \left(2uv - v^2\right) \cdot u'_x + \left(u^2 - 2uv\right) \cdot v'_x = \\ &= u^2 \cdot v'_x + 2uv \cdot \left(u'_x - v'_x\right) - v^2 \cdot u'_x; \end{aligned}$$

**Příklad.** Vypočítejte parciální derivace prvního řádu složené funkce

$$z = u^2 v - v^2 u,\ u = x \cos y,\ v = x \sin y.$$

**Řešení.**

Použijeme vzorce pro derivaci složené funkce dvou reálných proměnných

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x, \qquad z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y,$$

kam budeme dosazovat následující: $z'_u = 2uv - v^2$, $z'_v = u^2 - 2uv$.

Dostáváme

$$\begin{aligned} z'_x &= \left(2uv - v^2\right) \cdot u'_x + \left(u^2 - 2uv\right) \cdot v'_x = \\ &= u^2 \cdot v'_x + 2uv \cdot \left(u'_x - v'_x\right) - v^2 \cdot u'_x; \end{aligned}$$

podobně pro proměnnou $y$:

$$z'_y =$$

**Příklad.** Vypočítejte parciální derivace prvního řádu složené funkce

$$z = u^2 v - v^2 u,\ u = x \cos y,\ v = x \sin y.$$

**Řešení.**

Použijeme vzorce pro derivaci složené funkce dvou reálných proměnných

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x, \qquad z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y,$$

kam budeme dosazovat následující: $z'_u = 2uv - v^2$, $z'_v = u^2 - 2uv$.

Dostáváme

$$\begin{aligned} z'_x &= \left(2uv - v^2\right) \cdot u'_x + \left(u^2 - 2uv\right) \cdot v'_x = \\ &= u^2 \cdot v'_x + 2uv \cdot \left(u'_x - v'_x\right) - v^2 \cdot u'_x; \end{aligned}$$

podobně pro proměnnou $y$:

$$z'_y = u^2 \cdot v'_y + 2uv \cdot \left(u'_y - v'_y\right) - v^2 \cdot u'_y.$$

Dále po úpravě dostáváme:

Dále po úpravě dostáváme:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $=$ | $x\cos y$ | $u'_x$ | $=$ | $\cos y$ |
| $v$ | $=$ | $x\sin y$ | $v'_x$ | $=$ | $\sin y$ |

*Předchozí tabulka a barvy písma v ní Vám usnadní orientaci ve vzorcích.*

Dále po úpravě dostáváme:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $=$ | $x\cos y$ | $u'_x$ | $=$ | $\cos y$ |
| $v$ | $=$ | $x\sin y$ | $v'_x$ | $=$ | $\sin y$ |

*Předchozí tabulka a barvy písma v ní Vám usnadní orientaci ve vzorcích.*

$$
\begin{aligned}
z'_x &= u^2 \cdot v'_x + 2uv \cdot \left(u'_x - v'_x\right) - v^2 \cdot u'_x = \\
&=
\end{aligned}
$$

Dále po úpravě dostáváme:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $=$ | $x\cos y$ | $u'_x$ | $=$ | $\cos y$ |
| $v$ | $=$ | $x\sin y$ | $v'_x$ | $=$ | $\sin y$ |

*Předchozí tabulka a barvy písma v ní Vám usnadní orientaci ve vzorcích.*

$$
\begin{aligned}
z'_x &= u^2 \cdot v'_x + 2uv \cdot \left(u'_x - v'_x\right) - v^2 \cdot u'_x = \\
&= (x\cos y)^2 \cdot \sin y + 2x\cos y \cdot x\sin y\,(\cos y - \sin y) - (x\sin y)^2 \cdot \cos y = \\
&=
\end{aligned}
$$

Dále po úpravě dostáváme:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $=$ | $x\cos y$ | $u'_x$ | $=$ | $\cos y$ |
| $v$ | $=$ | $x\sin y$ | $v'_x$ | $=$ | $\sin y$ |

*Předchozí tabulka a barvy písma v ní Vám usnadní orientaci ve vzorcích.*

$$
\begin{aligned}
z'_x &= u^2\cdot v'_x + 2uv\cdot\left(u'_x - v'_x\right) - v^2\cdot u'_x = \\
&= (x\cos y)^2\cdot\sin y + 2x\cos y\cdot x\sin y\,(\cos y - \sin y) - (x\sin y)^2\cdot\cos y = \\
&= x^2\cos^2 y\cdot\sin y + 2x^2\sin y\cos^2 y - 2x^2\sin^2 y\cos y - x^2\sin^2 y\cos y = \\
&=
\end{aligned}
$$

Dále po úpravě dostáváme:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $=$ | $x\cos y$ | $u'_x$ | $=$ | $\cos y$ |
| $v$ | $=$ | $x\sin y$ | $v'_x$ | $=$ | $\sin y$ |

*Předchozí tabulka a barvy písma v ní Vám usnadní orientaci ve vzorcích.*

$$
\begin{aligned}
z'_x &= u^2 \cdot v'_x + 2uv \cdot \left(u'_x - v'_x\right) - v^2 \cdot u'_x = \\
&= (x\cos y)^2 \cdot \sin y + 2x\cos y \cdot x\sin y\,(\cos y - \sin y) - (x\sin y)^2 \cdot \cos y = \\
&= x^2\cos^2 y \cdot \sin y + 2x^2 \sin y \cos^2 y - 2x^2 \sin^2 y \cos y - x^2 \sin^2 y \cos y = \\
&= 3x^2 \sin y \cos y(\cos y - \sin y)
\end{aligned}
$$

Podobně pro derivaci podle proměnné $y$:

Podobně pro derivaci podle proměnné $y$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $=$ | $x\cos y$ | $u'_y$ | $=$ | $-x\sin y$ |
| $v$ | $=$ | $x\sin y$ | $v'_y$ | $=$ | $x\cos y$ |

*Předchozí tabulka a barvy písma v ní Vám usnadní orientaci ve vzorcích.*

Podobně pro derivaci podle proměnné $y$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $=$ | $x\cos y$ | $u'_y$ | $=$ | $-x\sin y$ |
| $v$ | $=$ | $x\sin y$ | $v'_y$ | $=$ | $x\cos y$ |

*Předchozí tabulka a barvy písma v ní Vám usnadní orientaci ve vzorcích.*

$$
\begin{aligned}
z'_y &= u^2 \cdot v'_y + 2uv \cdot \left(u'_y - v'_y\right) - v^2 \cdot u'_y = \\
&=
\end{aligned}
$$

Podobně pro derivaci podle proměnné $y$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $=$ | $x\cos y$ | $u'_y$ | $=$ | $-x\sin y$ |
| $v$ | $=$ | $x\sin y$ | $v'_y$ | $=$ | $x\cos y$ |

*Předchozí tabulka a barvy písma v ní Vám usnadní orientaci ve vzorcích.*

$$
\begin{aligned}
z'_y &= u^2\cdot v'_y + 2uv\cdot\left(u'_y - v'_y\right) - v^2\cdot u'_y = \\
&= (x\cos y)^2\cdot x\cos y + 2x\cos y\cdot x\sin y\cdot(-x\sin y - x\cos y) - (x\sin y)^2\cdot(-x\sin y) = \\
&=
\end{aligned}
$$

Podobně pro derivaci podle proměnné $y$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $=$ | $x\cos y$ | $u'_y$ | $=$ | $-x\sin y$ |
| $v$ | $=$ | $x\sin y$ | $v'_y$ | $=$ | $x\cos y$ |

*Předchozí tabulka a barvy písma v ní Vám usnadní orientaci ve vzorcích.*

$$
\begin{aligned}
z'_y &= u^2\cdot v'_y + 2uv\cdot\left(u'_y - v'_y\right) - v^2\cdot u'_y = \\
&= (x\cos y)^2\cdot x\cos y + 2x\cos y\cdot x\sin y\cdot(-x\sin y - x\cos y) - (x\sin y)^2\cdot(-x\sin y) = \\
&= x^3\cos^3 y - 2x^2\sin y\cos y(x\sin y + x\cos y) + x^3\sin^3 y = \\
&= x^3\left[\sin^3 y + \cos^3 y - 2\sin y\cos y(\sin y + \cos y)\right] =
\end{aligned}
$$

Podobně pro derivaci podle proměnné $y$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $=$ | $x\cos y$ | $u'_y$ | $=$ | $-x\sin y$ |
| $v$ | $=$ | $x\sin y$ | $v'_y$ | $=$ | $x\cos y$ |

*Předchozí tabulka a barvy písma v ní Vám usnadní orientaci ve vzorcích.*

$$
\begin{aligned}
z'_y &= u^2\cdot v'_y + 2uv\cdot\left(u'_y - v'_y\right) - v^2\cdot u'_y = \\
&= (x\cos y)^2\cdot x\cos y + 2x\cos y\cdot x\sin y\cdot(-x\sin y - x\cos y) - (x\sin y)^2\cdot(-x\sin y) = \\
&= x^3\cos^3 y - 2x^2\sin y\cos y(x\sin y + x\cos y) + x^3\sin^3 y = \\
&= x^3\left[\sin^3 y + \cos^3 y - 2\sin y\cos y(\sin y + \cos y)\right] = \\
&\overset{(?)}{=} x^3(\sin y + \cos y)(1 - 3\sin y\cos y)
\end{aligned}
$$

*Dvojklikem na symbol modrého otazníku můžete vyvolat další dílčí nápovědu.*

Celkem tedy máme:

$$
\begin{aligned}
z'_x &= 3x^2 \sin y \cos y (\cos y - \sin y), \\
z'_y &= x^3 (\sin y + \cos y)(1 - 3 \sin y \cos y).
\end{aligned}
$$

**Pro výpočet byl použit vzorec pro součet třetích mocnin:**

zpět

Platí

$$A^3 + B^3 = (A + B) \cdot \left(A^2 - AB + B^2\right) .$$

Položíme-li $A = \sin x$ a $B = \cos x$, dostáváme

$$\sin^3 y + \cos^3 y = (\sin y + \cos y) \cdot \left(\sin^2 y - \sin y \cos y + \cos^2 y\right) ,$$

a dále

$$\begin{aligned} \sin^3 y + \cos^3 y \quad &- \quad 2 \sin y \cos y \cdot (\sin y + \cos y) = \\ &= \quad (\sin y + \cos y) \cdot \left[\left(\sin^2 y - \sin y \cos y + \cos^2 y\right) - 2 \sin y \cos y\right] = \\ &= \quad (\sin y + \cos y) \cdot (\underbrace{\sin^2 y + \cos^2 y}_{1} - 3 \sin y \cos y). \end{aligned}$$