

**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}.$$

**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad (1)$$

**Řešení.** Danou rovnici (1) převedeme na tvar „levá strana je rovna nulové pravé straně“ :

**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad (1)$$

**Řešení.** Danou rovnici (1) převedeme na tvar „levá strana je rovna nulové pravé straně“:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0.$$

**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad (1)$$

**Řešení.** Danou rovnici (1) převedeme na tvar „levá strana je rovna nulové pravé straně“ :

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \quad (2)$$

Funkci tří proměnných  $F(x, y, z)$  danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad (1)$$

**Řešení.** Danou rovnici (1) převedeme na tvar „levá strana je rovna nulové pravé straně“:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \quad (2)$$

Funkci tří proměnných  $F(x, y, z)$  danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=}$$

**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad (1)$$

**Řešení.** Danou rovnici (1) převedeme na tvar „levá strana je rovna nulové pravé straně“:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \quad (2)$$

Funkci tří proměnných  $F(x, y, z)$  danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{1}{z} \cdot x \right)'_x - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=}$$

**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad (1)$$

**Řešení.** Danou rovnici (1) převedeme na tvar „levá strana je rovna nulové pravé straně“:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \quad (2)$$

Funkci tří proměnných  $F(x, y, z)$  danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{1}{z} \cdot x \right)'_x - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{z} (x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad (1)$$

**Řešení.** Danou rovnici (1) převedeme na tvar „levá strana je rovna nulové pravé straně“:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \quad (2)$$

Funkci tří proměnných  $F(x, y, z)$  danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{1}{z} \cdot x \right)'_x - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{z} (x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{???}{=}$$



**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad (1)$$

**Řešení.** Danou rovnici (1) převedeme na tvar „levá strana je rovna nulové pravé straně“:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \quad (2)$$

Funkci tří proměnných  $F(x, y, z)$  danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{1}{z} \cdot x \right)'_x - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{z} (x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{x}{z} \right)'_y - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{(?)}{=}$$

**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad (1)$$

**Řešení.** Danou rovnici (1) převedeme na tvar „levá strana je rovna nulové pravé straně“:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \quad (2)$$

Funkci tří proměnných  $F(x, y, z)$  danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{1}{z} \cdot x \right)'_x - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{z} (x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{x}{z} \right)'_y - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{(!)}{=} 0 - \frac{y}{z} \cdot \left( z \cdot y^{-1} \right)'_y \stackrel{(!)}{=}$$

**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad (1)$$

**Řešení.** Danou rovnici (1) převedeme na tvar „levá strana je rovna nulové pravé straně“:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \quad (2)$$

Funkci tří proměnných  $F(x, y, z)$  danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{1}{z} \cdot x \right)'_x - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{z} (x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{x}{z} \right)'_y - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{(!)}{=} 0 - \frac{y}{z} \cdot \left( z \cdot y^{-1} \right)'_y \stackrel{(!)}{=} -\frac{y}{z} \cdot z \cdot \left( -\frac{1}{y^2} \right) = \frac{1}{y};$$

**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad (1)$$

**Řešení.** Danou rovnici (1) převedeme na tvar „levá strana je rovna nulové pravé straně“:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \quad (2)$$

Funkci tří proměnných  $F(x, y, z)$  danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{1}{z} \cdot x \right)'_x - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{z} (x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{x}{z} \right)'_y - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{(!)}{=} 0 - \frac{y}{z} \cdot \left( z \cdot y^{-1} \right)'_y \stackrel{(!)}{=} -\frac{y}{z} \cdot z \cdot \left( -\frac{1}{y^2} \right) = \frac{1}{y};$$

$$F'_z(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_z \stackrel{(!)}{=}$$

**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad (1)$$

**Řešení.** Danou rovnici (1) převedeme na tvar „levá strana je rovna nulové pravé straně“:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \quad (2)$$

Funkci tří proměnných  $F(x, y, z)$  danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{1}{z} \cdot x \right)'_x - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{z} (x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{x}{z} \right)'_y - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{(!)}{=} 0 - \frac{y}{z} \cdot \left( z \cdot y^{-1} \right)'_y \stackrel{(!)}{=} -\frac{y}{z} \cdot z \cdot \left( -\frac{1}{y^2} \right) = \frac{1}{y};$$

$$F'_z(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_z \stackrel{(!)}{=} \left( \frac{x}{z} \right)'_z - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_z \stackrel{(!)}{=}$$

**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad (1)$$

**Řešení.** Danou rovnici (1) převedeme na tvar „levá strana je rovna nulové pravé straně“:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \quad (2)$$

Funkci tří proměnných  $F(x, y, z)$  danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{1}{z} \cdot x \right)'_x - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{z} (x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{x}{z} \right)'_y - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{(!)}{=} 0 - \frac{y}{z} \cdot \left( z \cdot y^{-1} \right)'_y \stackrel{(!)}{=} -\frac{y}{z} \cdot z \cdot \left( -\frac{1}{y^2} \right) = \frac{1}{y};$$

$$\begin{aligned} F'_z(x, y, z) &= \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_z \stackrel{(!)}{=} \left( \frac{x}{z} \right)'_z - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_z \stackrel{(!)}{=} x \cdot \left( z^{-1} \right)'_z - \frac{y}{z} \cdot \left( \frac{1}{y} \cdot z \right)'_z = \\ &= x \cdot \left( -z^{-2} \right) - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{y} \stackrel{(!)}{=} \end{aligned}$$

**Příklad.** Určete první parciální derivace funkce  $z = f(x, y)$ , která je dána implicitně rovnicí

$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad (1)$$

**Řešení.** Danou rovnici (1) převedeme na tvar „levá strana je rovna nulové pravé straně“:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} = 0. \quad (2)$$

Funkci tří proměnných  $F(x, y, z)$  danou levou stranou rovnice (2) budeme postupně derivovat podle všech proměnných:

$$F'_x(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{1}{z} \cdot x \right)'_x - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_x \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{z} (x)'_x - 0 = \frac{1}{z};$$

$$F'_y(x, y, z) = \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{(?)}{=} \left( \frac{x}{z} \right)'_y - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_y \stackrel{(!)}{=} 0 - \frac{y}{z} \cdot \left( z \cdot y^{-1} \right)'_y \stackrel{(!)}{=} -\frac{y}{z} \cdot z \cdot \left( -\frac{1}{y^2} \right) = \frac{1}{y};$$

$$\begin{aligned} F'_z(x, y, z) &= \left( \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y} \right)'_z \stackrel{(!)}{=} \left( \frac{x}{z} \right)'_z - \left( \ln \frac{z}{y} \right)'_z \stackrel{(!)}{=} x \cdot \left( z^{-1} \right)'_z - \frac{y}{z} \cdot \left( \frac{1}{y} \cdot z \right)'_z = \\ &= x \cdot \left( -z^{-2} \right) - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{y} \stackrel{(!)}{=} -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{z} = -\frac{x+z}{z^2}. \end{aligned}$$

Podle známých vzorců pak počítejme hodnoty derivací dané funkce  $z = f(x, y)$ :



Podle známých vzorců pak počítejme hodnoty derivací dané funkce  $z = f(x, y)$ :

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} =$$

Podle známých vzorců pak počítejme hodnoty derivací dané funkce  $z = f(x, y)$ :

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}} =$$

Podle známých vzorců pak počítejme hodnoty derivací dané funkce  $z = f(x, y)$ :

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}} = \frac{z}{x+z},$$

Podle známých vzorců pak počítejme hodnoty derivací dané funkce  $z = f(x, y)$ :

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}} = \frac{z}{x+z},$$
$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} =$$

Podle známých vzorců pak počítejme hodnoty derivací dané funkce  $z = f(x, y)$ :

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}} = \frac{z}{x+z},$$
$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{x+z}{z^2}} =$$

Podle známých vzorců pak počítejme hodnoty derivací dané funkce  $z = f(x, y)$ :

$$\begin{aligned} z'_x &= -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}} = \frac{z}{x+z}, \\ z'_y &= -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{x+z}{z^2}} = \frac{z^2}{y(x+z)}. \end{aligned}$$