Příklad. Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x - 1}{x^2 + 5x + 7} \, \mathrm{d}x.$$

Příklad. Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x-1}{x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na ,,úplný čtverec") jmenovatel daného zlomku:

$$x^2 + 5x + 7 =$$

Příklad. Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x-1}{x^2+5x+7}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na ,,úplný čtverec") jmenovatel daného zlomku:

$$x^2+5x+7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 =$$

Příklad. Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x-1}{x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na ,,úplný čtverec") jmenovatel daného zlomku:

$$x^2+5x+7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Příklad. Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x-1}{x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na ,,úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2+5x+7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Postupně, s použitím substituce $x+\frac{5}{2}=t$ dostáváme

Příklad. Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x-1}{x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na ,,úplný čtverec") jmenovatel daného zlomku:

$$x^2+5x+7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Postupně, s použitím substituce $x+\frac{5}{2} = t$ dostáváme (sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se, kam co dosadit):

$$I = \int \frac{4x-1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} x+\frac{5}{2} & = & t \\ x & = & t-\frac{5}{2} \\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

Příklad. Spočtěte integrál
$$I = \int \frac{4x-1}{x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na „úplný čtverec") jmenovatel daného zlomku:
$$x^2+5x+7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Postupně, s použitím substituce $x+\frac{5}{2}=t$ dostáváme (sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se, kam co dosadit):
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4x-1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} x+\frac{5}{2} &=& t \\ x &=& t-\frac{5}{2} \\ \mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{4(t-\frac{5}{2})-1}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \end{aligned}$$

Příklad. Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x-1}{x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na „úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2+5x+7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Postupně, s použitím substituce $x+\frac{5}{2} = t$ dostáváme (sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se, kam co dosadit):

$$I = \int \frac{4x-1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} x+\frac{5}{2} & = & t \\ x & = & t-\frac{5}{2} \\ \mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{4(t-\frac{5}{2})-1}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t-11}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t =$$

Příklad. Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x-1}{x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na ,,úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2+5x+7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Postupně, s použitím substituce $x+\frac{5}{2}=t$ dostáváme (sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se, kam co dosadit):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4x-1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} x+\frac{5}{2} &=& t \\ x &=& t-\frac{5}{2} \\ \mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{4(t-\frac{5}{2})-1}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t-11}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = 4I_1 - 11I_2, \end{aligned}$$

kde

$$I_1 = \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t,$$

Příklad. Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x-1}{x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na ,,úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2+5x+7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Postupně, s použitím substituce $x+\frac{5}{2}=t$ dostáváme (sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se, kam co dosadit):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4x-1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} x+\frac{5}{2} &=& t \\ x &=& t-\frac{5}{2} \\ \mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{4(t-\frac{5}{2})-1}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t-11}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = 4I_1 - 11I_2, \end{aligned}$$

kde

$$I_1 = \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t, \qquad I_2 = \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t.$$

Příklad. Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x - 1}{x^2 + 5x + 7}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na ,,úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2 + 5x + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Postupně, s použitím substituce $x + \frac{5}{2} = t$ dostáváme (sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se, kam co dosadit):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4x - 1}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} x + \frac{5}{2} &=& t \\ x &=& t - \frac{5}{2} \\ \mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{4(t - \frac{5}{2}) - 1}{t^2 + \frac{3}{4}}\, \mathrm{d}t = \int \frac{4t - 11}{t^2 + \frac{3}{4}}\, \mathrm{d}t = 4I_1 - 11I_2, \end{aligned}$$

kde

$$I_1 = \int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}}\, \mathrm{d}t, \qquad I_2 = \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}}\, \mathrm{d}t.$$

Oba dílčí integrály $I_{1,2}$ nyní postupně spočítáme.

Integrál I_1 je typu $\displaystyle\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ – tj. ,,derivace jmenovatele v čitateli“.

Integrál I_1 je typu $\displaystyle\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ – tj. „derivace jmenovatele v čitateli".

Postupně tedy máme (opět sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se ve výpočtech)

$$I_1 = \int \frac{t\ \mathrm{d}t}{t^2 + \frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{rcl} t^2 + \frac{3}{4} & = & u \\ 2t\mathrm{d}t & = & \mathrm{d}u \\ t\mathrm{d}t & = & \frac{1}{2}\mathrm{d}u \end{array} \right| =$$

Integrál I_1 je typu $\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ – tj. „derivace jmenovatele v čitateli“.

Postupně tedy máme (opět sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se ve výpočtech)

$$I_1 = \int \frac{t\ \mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{rcl} t^2+\frac{3}{4} & = & u \\ 2t\mathrm{d}t & = & \mathrm{d}u \\ t\mathrm{d}t & = & \frac{1}{2}\mathrm{d}u \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} =$$

Integrál I_1 je typu $\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ – tj. ,,derivace jmenovatele v čitateli“.

Postupně tedy máme (opět sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se ve výpočtech)

$$I_1 = \int \frac{t\ \mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{rcl} t^2+\frac{3}{4} & = & u \\ 2t\mathrm{d}t & = & \mathrm{d}u \\ t\mathrm{d}t & = & \frac{1}{2}\mathrm{d}u \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| =$$

Integrál I_1 je typu $\displaystyle\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ – tj. „derivace jmenovatele v čitateli“.

Postupně tedy máme (opět sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se ve výpočtech)

$$I_1 = \int \frac{t\ \mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{rcl} t^2+\frac{3}{4} & = & u \\ 2t\mathrm{d}t & = & \mathrm{d}u \\ t\mathrm{d}t & = & \frac{1}{2}\mathrm{d}u \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| = \ln\sqrt{t^2+\frac{3}{4}} + c_1.$$

Integrál I_1 je typu $\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ – tj. „derivace jmenovatele v čitateli“.

Postupně tedy máme (opět sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se ve výpočtech)

$$I_1 = \int \frac{t\ \mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{rcl} t^2+\frac{3}{4} & = & u \\ 2t\mathrm{d}t & = & \mathrm{d}u \\ t\mathrm{d}t & = & \frac{1}{2}\mathrm{d}u \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| = \ln\sqrt{t^2+\frac{3}{4}} + c_1.$$

Úkol pro Vás. Zdůvodněte, proč jsme mohli v posledním kroku výpočtu vypustit absolutní hodnotu. Je taková úprava korektní a proč?

Integrál I_2 vede na přímé použití vzorce

$$\int \frac{1}{t^2 + a^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + c,$$

ve kterém klademe $a^2 = \frac{3}{4}$, tj. $\frac{1}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Integrál I_2 vede na přímé použití vzorce

$$\int \frac{1}{t^2 + a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + c,$$

ve kterém klademe $a^2 = \frac{3}{4}$, tj. $\frac{1}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Přímým výpočtem okamžitě dostáváme:

$$I_2 = \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t =$$

Integrál I_2 vede na přímé použití vzorce

$$\int \frac{1}{t^2 + a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + c,$$

ve kterém klademe $a^2 = \frac{3}{4}$, tj. $\frac{1}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Přímým výpočtem okamžitě dostáváme:

$$I_2 = \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Postupně nám vyšlo:

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln \left(t^2 + \frac{3}{4} \right) + c_1, \qquad I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Postupně nám vyšlo:

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + c_1, \qquad I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Dohromady potom máme

$$I = 4I_1 - 11I_2 =$$

Postupně nám vyšlo:

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln \left(t^2 + \frac{3}{4} \right) + c_1, \qquad I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Dohromady potom máme

$$I = 4I_1 - 11I_2 = 2 \ln \left(t^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{22}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c,$$

kde $c := c_1 + c_2$.

Postupně nám vyšlo:

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + c_1, \qquad I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Dohromady potom máme

$$I = 4I_1 - 11I_2 = 2\ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{22}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + c,$$

kde $c := c_1 + c_2$.

Když se vrátíme zpět k proměnné x, tj. všude dosadíme $t = x + \frac{5}{2}$, dostáváme po úpravě konečný výsledek:

Postupně nám vyšlo:

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + c_1, \qquad I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Dohromady potom máme

$$I = 4I_1 - 11I_2 = 2\ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{22}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + c,$$

kde $c := c_1 + c_2$.

Když se vrátíme zpět k proměnné x, tj. všude dosadíme $t = x + \frac{5}{2}$, dostáváme po úpravě konečný výsledek:

$$I = \underline{\underline{2\ln\left(x^2 + 5x + 7\right) - \frac{22}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{3}} + c.}}$$

Postupně nám vyšlo:

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + c_1, \qquad I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Dohromady potom máme

$$I = 4I_1 - 11I_2 = 2\ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{22}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t}{\sqrt{3}} + c,$$

kde $c := c_1 + c_2$.

Když se vrátíme zpět k proměnné x, tj. všude dosadíme $t = x + \frac{5}{2}$, dostáváme po úpravě konečný výsledek:

$$I = \underline{\underline{2\ln\left(x^2 + 5x + 7\right) - \frac{22}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+5}{\sqrt{3}} + c.}}$$

Komentář ke konečnému výsledku. Pokud Vám není hned zřejmé, kde se ve výsledku vzal „modře obarvený“ kvadratický trojčlen, vzpomeňte si na úpravu „doplnění na úplný čtverec“, se kterou jsme pracovali na začátku našeho počítání:

$$t^2 + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 + 5x + 7.$$