FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

(v reálném oboru)

Studijní materiály

Brno 2017

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Obsah

Úvod

Jednou z nejpoužívanějších matematických disciplín jak v přírodních vědách tak v technických vědách jsou ***diferenciální rovnice***. **Obyčejná** diferenciální rovnice vyjadřuje vztah mezi hledanou funkcí jedné proměnné (většinou označovanou $y(x)$ nebo jen y), jejími derivacemi a nezávislou proměnnou (většinou označovanou x).

V nejjednodušší formě jste se s nimi setkali již u neurčitého integrálu, kdy jste vlastně řešili rovnici:

$$\begin{aligned} y' &= f(x) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x) \\ \mathrm{d}y &= f(x)\,\mathrm{d}x \\ \int \mathrm{d}y &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ y &= F(x) + c \end{aligned}$$

S řešením diferenciálních rovnic jsou spjaty tyto základní otázky:

Existence — kdy má diferenciální rovnice řešení [1].

Jednoznačnost — kdy daným podmínkám vyhovuje právě jedno partikulární řešení.

Metody řešení — následně budeme probírat pouze některé typy diferenciálních rovnic.

[1]Touto (stejně jako i následující) otázkou se nebudeme zabývat vzhledem k tomu, že je probírána na přednáškách a v literatuře (např. Diblík, J., Přibyl, O.: *Obyčejné diferenciální rovnice.* Brno : VUT v Brně, Fakulta stavební, 150 s., 2004. ISBN 80–214–2795–7)

Separovatelné diferenciální rovnice

Příklad 1. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $(1+x)\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x = 0$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
(1+x)\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x &= 0 \\
(1+x)\,\mathrm{d}y &= 2y\,\mathrm{d}x \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}\ ;\ \ y \in \mathbb{R}\setminus\{0\} && (1)\\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{2}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{2}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| + c_1 &= 2\ln|1+x| + c_2 \\
\ln|y| &= 2\ln|1+x| + \underbrace{c_2 - c_1}_{k} \qquad k = \ln|C|\ ;\ \ C \in \mathbb{R}\setminus\{0\} && (2)\\
\ln|y| &= \ln(1+x)^2 + \ln|C| \\
\ln|y| &= \ln[(1+x)^2 \cdot |C|] \\
|y| &= (1+x)^2 \cdot |C| \qquad \text{vhodnou volbou (znaménka) } C \\
y &= (1+x)^2 \cdot C \\
0 &= (1+x)^2 \cdot C - y && (3)
\end{aligned}
$$

Poznámky:

1. Jak je patrné z řádku 2, není zapotřebí psát integrační konstantu po každém integrování, protože všechny konstanty můžeme sečíst dohromady tak, jak je naznačeno svorkou. Stačí tedy psát jedinou konstantu až po závěrečném integrování.

2. Není nutné označovat konstantu jenom písmenem. Můžeme použít jakýkoliv jiný zápis, na řádku 2 například *„přirozený logaritmus z absolutní hodnoty nějakého čísla"*.

3. Výsledek uvedený na řádku 3 jsme obdrželi za podmínek uvedených na řádku 1. Tedy

   $$C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

   Pokud by totiž platilo $C = 0$, tak by také $y = 0$, což odporuje druhé podmínce v řádku 1.

   Je zřejmá následující otázka:
   „Dostaneme také nějaké řešení naší rovnice, když podmínky v řádku 1 nebudou splněny?"

Jinými slovy: ***Neztratili jsme nějaká řešení díky podmínkám?***

Ověření nutnosti podmínek, za kterých jsme našli řešení:

$y = 0 \implies y'_x = 0$ Zadanou rovnici $(1 + x)\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x = 0$ nejdříve upravíme na tvar:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y'_x) = \frac{2y}{1+x} \qquad x \neq -1\,.$$

Po dosazení:

$$0 = \frac{2 \cdot 0}{1+x}$$

je zřejmé, že $y = 0$ je také řešením zadané rovnice.

$x = -1 \implies x'_y = 0$ Zadanou rovnici $(1+x)\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x = 0$ nejdříve upravíme na tvar:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = (x'_y) = \frac{1+x}{2y} \qquad y \neq 0\,.$$

Po dosazení:

$$0 = \frac{1+(-1)}{2y}$$

je zřejmé, že $x = -1$ je také řešením zadané rovnice.

Tedy vztah uvedený na řádku 3 ve výpočtu je řešením zadané diferenciální rovnice, přičemž $x; y; C$ mohou nabývat libovolných reálných hodnot.

Všechna řešení rovnice $(1+x)\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x = 0$

jsou dána implicitním vzorcem $F(x;y) : (1+x)^2 \cdot C - y = 0 \qquad \forall\, C \in \mathbb{R}\,.$

Diferenciální rovnice řešené substitucí

Příklad 2. Najděte řešení počáteční úlohy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x+2y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Řešení: Zkusíme **substituci**
$$\left|\begin{aligned} x + 2y &= u \\ x + 2\boldsymbol{y}(x) &= \boldsymbol{u}(x) \\ 2y &= u - x \\ y &= \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}x \\ y' &= \tfrac{1}{2}u' - \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right|$$
kterou dosadíme do původní rovnice.

Po dosazení:
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u' - \frac{1}{2} &= \frac{1}{u} \qquad\qquad x \neq -2y \quad (u \neq 0) \\ u' - 1 &= \frac{2}{u} \\ u' &= \frac{2}{u} + 1 \\ u' &= \frac{2+u}{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{2+u}{u} \\
\frac{u}{2+u}\,\mathrm{d}u &= \mathrm{d}x \\
\int \frac{u}{2+u}\,\mathrm{d}u &= \int \mathrm{d}x \\
\int \frac{(2+u)-2}{2+u}\,\mathrm{d}u &= \int \mathrm{d}x \\
\int \mathrm{d}u - 2\int \frac{1}{2+u}\,\mathrm{d}u &= \int \mathrm{d}x \\
u - 2\ln|2+u| + 2k &= x \\
\frac{u-x}{2} + k &= \ln|2+u| \\
\frac{(x+2y)-x}{2} + k &= \ln|2+(x+2y)| \\
y + k &= \ln|2+x+2y| \\
\mathrm{e}^{y+k} &= |2+x+2y| \\
\mathrm{e}^{y}\cdot\mathrm{e}^{k} &= |2+x+2y| \qquad \mathrm{e}^{k} = |c| \\
\mathrm{e}^{y}\cdot|c| &= |2+x+2y| \qquad \text{vhodnou volbou znaménka } c \\
c\mathrm{e}^{y} &= 2+x+2y
\end{aligned}$$

Zbývá určit konstantu c tak, aby platilo: $y(1) = 0$.

$$c \cdot \mathrm{e}^{(0)} = 2 + (1) + 2(0)$$
$$c \cdot 1 = 3$$
$$c = 3$$

Řešení počáteční úlohy $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x + 2y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

je dáno implicitním vzorcem $F(x; y) : 3\mathrm{e}^{y} = 2 + x + 2y$ **.**

Příklad 3. Najděte řešení počáteční úlohy $$\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{x-y} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

Řešení: Zkusíme **substituci** $$\left|\begin{array}{c} y = xu \\ \boldsymbol{y}(x) = x \cdot \boldsymbol{u}(x) \\ y' = u + xu' \\ \dfrac{y}{x} = u \end{array}\right|$$ kterou dosadíme do původní rovnice.

Po dosazení:

$$\begin{aligned} u + xu' &= \frac{x + xu}{x - xu} \qquad x \neq y \quad (u \neq 1) \\ xu' &= \frac{x(1+u)}{x(1-u)} - u \\ xu' &= \frac{1 + u - u(1-u)}{1-u} \\ xu' &= \frac{1+u^2}{1-u} \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1+u^2}{(1-u)x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1-u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}x}{x}\\
\int\frac{1-u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= \int\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
\int\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u-\int\frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= \int\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
2\int\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u-\int\frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
2\operatorname{arctg}u-\ln(1+u^2) &= 2\ln|x|+\ln c \qquad c>0\\
2\operatorname{arctg}u &= \ln(1+u^2)+2\ln|x|+\ln c\\
2\operatorname{arctg}u &= \ln[(1+u^2)\,x^2c]\\
\mathrm{e}^{2\operatorname{arctg}u} &= (1+u^2)\,x^2c\\
\mathrm{e}^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} &= \left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]x^2c\\
\mathrm{e}^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} &= (x^2+y^2)\,c\\
\frac{1}{c}\cdot\mathrm{e}^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} &= x^2+y^2\\
0 &= x^2+y^2-\frac{1}{c}\cdot\mathrm{e}^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}
\end{aligned}$$

Zbývá určit konstantu c tak, aby platilo: $y(2) = 0$.

$$0 = 2^2 + 0^2 - \frac{1}{c} \cdot e^{2 \operatorname{arctg} \frac{0}{2}}$$
$$0 = 4 - \frac{1}{c} \cdot e^{2 \operatorname{arctg} 0}$$
$$0 = 4 - \frac{1}{c} \cdot e^{2 \cdot 0}$$
$$0 = 4 - \frac{1}{c} \cdot e^{0}$$
$$0 = 4 - \frac{1}{c}$$
$$\frac{1}{c} = 4$$
$$\frac{1}{4} = c$$

Řešení počáteční úlohy $$\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{x-y} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

je dáno implicitním vzorcem $F(x;y) : 0 = x^2 + y^2 - \frac{1}{4} \cdot e^{2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$

Příklad 4. Najděte řešení počáteční úlohy $\begin{cases} y' + 2xy = 2x^3y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Řešení:

Nejprve si rovnici upravíme $y'y^{-3} + 2xy^{-2} = 2x^3$; $y \neq 0$ a potom zkusíme **substituci**

$$\left| \begin{aligned} y^{-2} &= u \\ \boldsymbol{y}^{-2}(x) &= \boldsymbol{u}(x) \\ -2y^{-3}y' &= u' \\ y^{-3}y' &= -\tfrac{u'}{2} \end{aligned} \right|$$

kterou dosadíme do původní rovnice.

Po dosazení:

$$\begin{aligned} -\frac{u'}{2} + 2xu &= 2x^3 \\ u' - 4xu &= -4x^3 \end{aligned}$$

Tato lineární diferenciální rovnice je (s jinými písmeny) vyřešena ZDE.

$$\begin{aligned} u &= x^2 + \frac{1}{2} + c\mathrm{e}^{2x^2} \\ \frac{1}{y^2} &= x^2 + \frac{1}{2} + c\mathrm{e}^{2x^2} \end{aligned}$$

Zbývá určit konstantu c tak, aby platilo: $y(0) = 1$.

$$\frac{1}{1^2} = 0^2 + \frac{1}{2} + c\mathrm{e}^{2\cdot 0^2}$$
$$1 = \frac{1}{2} + c\mathrm{e}^{0}$$
$$1 = \frac{1}{2} + c$$
$$\frac{1}{2} = c$$

Řešení počáteční úlohy $\begin{cases} y' + 2xy = 2x^3y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

je dáno implicitním vzorcem $F(x;y): 2 = \left(2x^2 + 1 + \mathrm{e}^{2x^2}\right)y^2$ **.**

Lineární diferenciální rovnice $y' + g(x) \cdot y = h(x)$

Příklad 5. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' - 4xy = -4x^3$

1. Přidružená homogenní rovnice $y' - 4xy = 0$ je separovatelná.

$$
\begin{aligned}
y' - 4xy &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 4xy && y \neq 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= 4x\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int 4x\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| - \ln|c| &= 2x^2 && c \neq 0 \\
\ln\left|\frac{y}{c}\right| &= 2x^2 && \text{vhodnou volbou znaménka } c \\
\ln\frac{y}{c} &= 2x^2 \\
\frac{y}{c} &= \mathrm{e}^{2x^2} \\
y &= c\mathrm{e}^{2x^2}
\end{aligned}
$$

Ověření podmínky: $c = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = 0$

$$0 - 4x \cdot 0 = 0$$

Obecné řešení homogenní rovnice je: $y_H = c\mathrm{e}^{2x^2} \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$

Řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou VARIACE KONSTANTY.

$$\begin{aligned} y_H &= c\mathrm{e}^{2x^2} && \text{konstantu } c \text{ nahradíme vhodnou funkcí } K(x) \\ y &= K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x^2} \\ y' &= K'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x^2} + K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x^2} \cdot (4x) \end{aligned}$$

A po dosazení do původní rovnice:

$$\begin{aligned} \left[K'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x^2} + K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x^2} \cdot (4x)\right] - 4x\left[K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x^2}\right] &= -4x^3 \\ K'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x^2} &= -4x^3 \\ K'(x) &= -4x^3\mathrm{e}^{-2x^2} \end{aligned}$$

$$K(x) = \int (-2x^2)2\mathrm{e}^{-2x^2}\, \underbrace{x\,\mathrm{d}x} = \left| \begin{array}{c} -2x^2 = t \\ -4x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \underbrace{x\,\mathrm{d}x} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \left[(t)2\mathrm{e}^t\left(-\frac{1}{4}\right)\right] \mathrm{d}t = \int -\frac{1}{2}t\mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t =$$

$$= \begin{vmatrix} u = -\frac{1}{2}t & v' = \mathrm{e}^t \\ u' = -\frac{1}{2} & v = \mathrm{e}^t \end{vmatrix} = \left[-\frac{1}{2}t\mathrm{e}^t\right] - \int -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}t\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + c = -\frac{1}{2}(-2x^2)\mathrm{e}^{-2x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x^2} + c$$

$$\begin{aligned} K(x) &= x^2\mathrm{e}^{-2x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x^2} + c \\ y &= \left(x^2\mathrm{e}^{-2x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x^2} + c\right)\mathrm{e}^{2x^2} \\ y &= x^2 + \frac{1}{2} + c\mathrm{e}^{2x^2} = \underbrace{c\mathrm{e}^{2x^2}}_{y_H} + \underbrace{x^2 + \frac{1}{2}}_{y_P} \end{aligned}$$

Obecným řešením nehomogenní lineární diferenc. rovnice $y' - 4xy = -4x^3$

je funkce $f(x) : y = c\mathrm{e}^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2} \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$ **,**

přičemž

y_H označuje obecné řešení přidružené homogenní rovnice;

y_P označuje partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Exaktní diferenciální rovnice $P(x;y)\,\mathrm{d}x + Q(x;y)\,\mathrm{d}y = 0$

Příklad 6. Najděte řešení počáteční úlohy $\begin{cases} (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Mohli bychom použít substituci tak, jako v tomto příkladu, ale ukážeme si jiný postup.

Řešení: Pokud platí $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ pak existuje funkce $F(x;y)$ taková, že $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P$; $\dfrac{\partial P}{\partial y} = Q$.

Nebo jinak $F = \int P\,\mathrm{d}x$; $F = \int Q\,\mathrm{d}y$. Funkce $F(x;y)$ se nazývá ***kmenová funkce*** a výraz $\mathrm{d}F(x;y) = P(x;y)\,\mathrm{d}x + Q(x;y)\,\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem této kmenové funkce.

V našem příkladu parciální derivace $\dfrac{\partial(x+y)}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial(x-y)}{\partial x}$

Budeme tedy hledat funkci $F(x;y)$.

$$F(x;y) = \int (x+y)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y)\right)'_y = x + \varphi'(y) = x - y = Q$$

$$\varphi'(y) = -y$$

$$\varphi(y) = \int -y\,\mathrm{d}y = \frac{-y^2}{2} + c \qquad (5)$$

Po dosazení výsledku 5 do 4 dostáváme

$$F(x;y):\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}+c=0$$

Zbývá určit konstantu c tak, aby platilo: $y(1)=1$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}+c&=0\\ \frac{1^2}{2}+1\cdot 1-\frac{1^2}{2}+c&=0\\ 1&=-c\\ -1&=c\end{aligned}$$

Řešení počáteční úlohy $\begin{cases}(x+y)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}y=0\\ y(1)=1\end{cases}$

je dáno implicitním vzorcem $F(x;y):\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}=1$