FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Lineární diferenciální rovnice

(obyčejné v reálném oboru)

Studijní materiály

Brno 2018

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Obsah

Úvod 3

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu $y' + g(x)y = h(x)$ **4**

1. Všechna řešení diferenciální rovnice $y' - 2y = x$ 4
   - Přidružená homogenní rovnice $y' - 2y = 0$ je separovatelná 4
   - Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c.\mathrm{e}^{2x}$; c je libovolné reálné číslo . 4
   - Řešení nehomogenní rovnice metodou VARIACE KONSTANTY 4

Lineární diferenciální rovnice n. řádu s konstantními koeficienty **6**

2. Homogenní – pravá strana se rovná NULE 6
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y'' - 5y' + 6y = 0$ 6
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ 6
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y^{(4)} - y = 0$ 7
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ 7
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y^{(5)} - 4y^{(4)} + 2y''' + 10y'' - 7y' - 10y = 0$ 8
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y''' - y' = 0$ 9
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y''' - y'' = 0$ 9
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y''' + y' = 0$ 9
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y''' = 0$ 10
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y^{(4)} - y''' - 7y'' + y' + 6y = 0$ 10
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $2y''' - 7y'' + y' + 10y = 0$ 11
3. Speciální pravá strana 12
   - Řešení počáteční úlohy $y'' + 4y = \mathrm{e}^x \cos 2$, kde $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ . . . 12
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y - 6\mathrm{e}^x = 0$ 14
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y'' - 4y' - 5y = (2x + 3)\mathrm{e}^{2x}$ 15
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y'' - 4y' + 4y = (2x + 3)\mathrm{e}^{2x}$ 16
4. Pravá strana je složena ze speciálních částí 17
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y''' + 2y'' + y' = x^2 + \sin x$ 17
5. Metoda variace konstant 20
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$ 20
   - Všechna řešení diferenciální rovnice $y''' + 2y'' + y' = x^2$ 22

Všechna řešení diferenciální rovnice $y''' + y' = \cos^2 x$ 24

Všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ 26

Všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = x^{-3}\mathrm{e}^{-2x}$ 28

Všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}\ln x$ 29

Úvod

Jednou z nejpoužívanějších matematických disciplín jak v přírodních vědách tak v technických vědách jsou ***diferenciální rovnice***. **Obyčejná** diferenciální rovnice vyjadřuje vztah mezi hledanou funkcí jedné proměnné (většinou označovanou $y(x)$ nebo jen y), jejími derivacemi a nezávislou proměnnou (většinou označovanou x). V nejjednodušší formě jste se s nimi setkali již u neurčitého integrálu, kdy jste vlastně řešili rovnici:

$$
\begin{aligned}
y' &= f(x) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x) \\
\mathrm{d}y &= f(x)\,\mathrm{d}x \\
\int \mathrm{d}y &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\
y &= F(x) + c
\end{aligned}
$$

S řešením diferenciálních rovnic jsou spjaty tyto základní otázky:

Existence — kdy má diferenciální rovnice řešení [1].

Jednoznačnost — kdy daným podmínkám vyhovuje právě jedno partikulární řešení.

Metody řešení — následně budeme probírat pouze některé typy diferenciálních rovnic.

[1]Touto (stejně jako i následující) otázkou se nebudeme zabývat vzhledem k tomu, že je probírána na přednáškách a v literatuře (např. Diblík, J., Přibyl, O.: *Obyčejné diferenciální rovnice.* Brno : VUT v Brně, Fakulta stavební, 150 s., 2004. ISBN 80–214–2795–7)

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu $\quad y' + g(x) \cdot y = h(x)$

Příklad 1. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' - 2y = x \qquad x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená homogenní rovnice $\quad y' - 2y = 0 \quad$ je separovatelná.

$$
\begin{aligned}
y' - 2y &= 0 \\
y' &= 2y && y \neq 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= 2\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int 2\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| - \ln|c| &= 2x && c \neq 0 \\
\ln\left|\frac{y}{c}\right| &= 2x && \text{vhodnou volbou znaménka } c \\
\ln\frac{y}{c} &= 2x \\
\frac{y}{c} &= \mathrm{e}^{2x} \\
y &= c \cdot \mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}
$$

Ověření podmínky: $\quad c = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = 0$

$0 - 2 \cdot 0 = 0 \qquad$ *řešíme **přidruženou homogenní** rovnici*

Obecné řešení homogenní rovnice je: $\quad y_H = c \cdot \mathrm{e}^{2x} \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$

Ke stejnému výsledku bychom se dopracovali i pomocí charakteristické rovnice $\lambda - 2 = 0$, (protože zadaná rovnice má konstantní koeficienty) tak, jak bude ukázáno u rovnic vyššího řádu. Stejně tak bychom také mohli odhadnout partikulární řešení nehomogenní rovnice $y_P = ax + b$ a postupovat metodou neurčitých koeficientů (protože jde o rovnici se speciální pravou stranou) jak také bude ukázáno u rovnic vyššího řádu, ale my použijeme obecnější postup.

2. Řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou VARIACE KONSTANTY.

$$y_H = c \cdot \mathrm{e}^{2x} \qquad \text{konstantu } c \text{ nahradíme vhodnou funkcí } K(x)$$

$$
\begin{aligned}
y &= K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} \\
y' &= K'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} + K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot 2
\end{aligned}
$$

A po dosazení do původní rovnice:

$$
\begin{aligned}
\left[K'(x)\cdot \mathrm{e}^{2x} + 2K(x)\cdot \mathrm{e}^{2x}\right] - 2\left[K(x)\cdot \mathrm{e}^{2x}\right] &= x\\
K'(x)\cdot \mathrm{e}^{2x} &= x\\
K'(x) &= x\mathrm{e}^{-2x}
\end{aligned}
$$

$$
K(x) = \int x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x & v' = \mathrm{e}^{-2x} \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{matrix} \right| = \left[-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\right] - \int -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x =
$$

$$
= -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + c
$$

$$
\begin{aligned}
K(x) &= -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + c\\
y &= \left(-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + c\right)\mathrm{e}^{2x}\\
y &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + c\mathrm{e}^{2x} = \underbrace{c\mathrm{e}^{2x}}_{y_H}\ \underbrace{-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}}_{y_P}
\end{aligned}
$$

Obecným řešením nehomogenní lineární diferenc. rovnice $y' - 2y = x$

je funkce $f(x) : y = c\,\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$ **,**

přičemž

y_H označuje obecné řešení přidružené homogenní rovnice;

y_P označuje partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Lineární dif. rovnice n. řádu s KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY — HOMOGENNÍ

Příklad 2.a Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y'' - 5y' + 6y = 0$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

Pro připomenutí: kořeny mohou být pouze čísla $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6.$

Ovšem v tomto případě je určíme pomocí rozkladu $(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$
nebo podle vzorce

$$\lambda_{1;2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

Tedy

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3 & y_1 &= \mathrm{e}^{3x} \\ \lambda_2 &= 2 & y_2 &= \mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 \mathrm{e}^{3x} + c_2 \mathrm{e}^{2x}$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Příklad 2.b Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$

Kořeny určíme pomocí rozkladu $(\lambda + 1)^3 = 0$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 & y_1 &= \mathrm{e}^{-1x} \\ \lambda_2 &= -1 & y_2 &= \mathrm{e}^{-1x} \\ \lambda_3 &= -1 & y_3 &= \mathrm{e}^{-1x} \end{aligned}$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 x \mathrm{e}^{-x} + c_3 x^2 \mathrm{e}^{-x}$

nebo

$$y_H = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Příklad 2.c Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y^{(4)} - y = 0$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^4 - 1 = 0$

Kořeny určíme pomocí rozkladu $(\lambda^2 - 1)\cdot(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)\cdot(\lambda + 1)\cdot(\lambda^2 + 1) = 0$

$$
\begin{array}{ll}
\lambda_1 = 1 & y_1 = \mathrm{e}^{1x} \\
\lambda_2 = -1 & y_2 = \mathrm{e}^{-1x} \\
\lambda_{3;4} = \pm i & y_{3;4} = \mathrm{e}^{(0 \pm 1.i)x} \\
 & y_3 = \mathrm{e}^{0x}\cdot\cos 1x \\
 & y_4 = \mathrm{e}^{0x}\cdot\sin 1x
\end{array}
$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Příklad 2.d Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

Kořeny určíme pomocí rozkladu $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$

$$
\begin{array}{ll}
\lambda_{1;2} = \pm i & y_{1;2} = \mathrm{e}^{(0 \pm 1.i)x} \\
 & y_1 = \mathrm{e}^{0x}\cdot\cos 1x \\
 & y_2 = \mathrm{e}^{0x}\cdot\sin 1x \\
\lambda_{3;4} = \pm i & y_{3;4} = \mathrm{e}^{(0 \pm 1.i)x} \\
 & y_3 = \mathrm{e}^{0x}\cdot\cos 1x \\
 & y_4 = \mathrm{e}^{0x}\cdot\sin 1x
\end{array}
$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 x\cos x + c_4 x\sin x$

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Příklad 2.HS Najděte všechna řešení diferenciální rovnice:

$$y^{(5)} - 4y^{(4)} + 2y''' + 10y'' - 7y' - 10y = 0$$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^5 - 4\lambda^4 + 2\lambda^3 + 10\lambda^2 - 7\lambda - 10 = 0$

Kořeny mohou být pouze čísla $\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10$. Zda jsou to kořeny ověříme pomocí Hornerova sch.

HS	1	−4	2	10	−7	−10	
1	1	−3	−1	9	2	−8	
−1	1	−5	7	3	−10	0	$\lambda_1 = -1$

$$(\lambda^5 - 4\lambda^4 + 2\lambda^3 + 10\lambda^2 - 7\lambda - 10) = (\lambda + 1)(\lambda^4 - 5\lambda^3 + 7\lambda^2 + 3\lambda - 10)$$

HS	1	−5	7	3	−10	
−1	1	−6	13	−10	0	$\lambda_2 = -1$

$$(\lambda^5 - 4\lambda^4 + 2\lambda^3 + 10\lambda^2 - 7\lambda - 10) = (\lambda + 1)^2(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 13\lambda - 10)$$

HS	1	−6	13	−10	
−1	1	−7	20	−30	
2	1	−4	5	0	
	a	b	c		$\lambda_3 = 2$

$$(\lambda^5 - 4\lambda^4 + 2\lambda^3 + 10\lambda^2 - 7\lambda - 10) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$$

$$\lambda_{4;5} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm \mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2\mathrm{i}}{2} = 2 \pm \mathrm{i}$$

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1 = -1 & y_1 = \mathrm{e}^{-1x} \\
\lambda_2 = -1 & y_2 = \mathrm{e}^{-1x} \\
\lambda_3 = 2 & y_3 = \mathrm{e}^{2x} \\
\lambda_{4;5} = 2 \pm i & y_{4;5} = \mathrm{e}^{(2 \pm 1.i)x} \\
 & y_4 = \mathrm{e}^{2x} \cdot \cos 1x \\
 & y_5 = \mathrm{e}^{2x} \cdot \sin 1x
\end{array}$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2x\mathrm{e}^{-x} + c_3\mathrm{e}^{2x} + c_4\mathrm{e}^{2x}\sin x + c_5\mathrm{e}^{2x}\cos x$

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$$

Příklad 2.e Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' - y' = 0$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^3 - \lambda = 0$

Kořeny určíme pomocí rozkladu $\lambda \cdot (\lambda^2 - 1) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) = 0$

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 0 & y_1 = \mathrm{e}^{0x} = \mathrm{e}^0 = 1 \\ \lambda_2 = 1 & y_2 = \mathrm{e}^{1x} \\ \lambda_3 = -1 & y_3 = \mathrm{e}^{-1x} \end{array}$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2\mathrm{e}^x + c_3\mathrm{e}^{-x}$ $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Příklad 2.f Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' - y'' = 0$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$

Kořeny určíme pomocí rozkladu $\lambda^2 \cdot (\lambda - 1) = 0$

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 0 & y_1 = \mathrm{e}^{0x} = \mathrm{e}^0 = 1 \\ \lambda_2 = 0 & y_2 = \mathrm{e}^{0x} \\ \lambda_3 = 1 & y_3 = \mathrm{e}^{1x} \end{array}$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2 x + c_3\mathrm{e}^x$ $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Příklad 2.g Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' + y' = 0$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^3 + \lambda = 0$

Kořeny určíme pomocí rozkladu $\lambda \cdot (\lambda^2 + 1) = 0$

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 0 & y_1 = \mathrm{e}^{0x} = \mathrm{e}^0 = 1 \\ \lambda_{2;3} = \pm i & y_{2;3} = \mathrm{e}^{(0 \pm 1.i)x} \\ & y_2 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \cos 1x \\ & y_3 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \sin 1x \end{array}$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Příklad 2.h Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y''' = 0$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^7 + 2\lambda^5 + \lambda^3 = 0$

Kořeny určíme pomocí rozkladu $\lambda^3 \cdot (\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = \lambda^3 \cdot (\lambda^2 + 1)^2 = 0$

$$
\begin{array}{ll}
\lambda_1 = 0 & y_1 = e^{0x} = e^0 = 1 \\
\lambda_2 = 0 & y_2 = e^{0x} \\
\lambda_3 = 0 & y_3 = e^{0x} \\
\lambda_{4;5} = \pm i & y_{4;5} = e^{(0 \pm 1.i)x} \\
 & y_4 = e^{0x} \cdot \cos 1x \\
 & y_5 = e^{0x} \cdot \sin 1x \\
\lambda_{6;7} = \pm i & y_{6;7} = e^{(0 \pm 1.i)x} \\
 & y_6 = e^{0x} \cdot \cos 1x \\
 & y_7 = e^{0x} \cdot \sin 1x
\end{array}
$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice:

$$y_H = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos x + c_5 \sin x + c_6 x \cos x + c_7 x \sin x$$

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 \in \mathbb{R}$$

Příklad 2. HS2 Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y^{(4)} - y''' - 7y'' + y' + 6y = 0$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^4 - \lambda^3 - 7\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$

Kořeny mohou být pouze čísla $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Zda jsou to kořeny ověříme pomocí Hornerova sch.

HS	1	-1	-7	1	6	
1	1	0	-7	-6	0	$\lambda_1 = 1$

HS	1	0	-7	-6	
1	1	-6	-6	-12	
-1	1	-1	-6	0	$\lambda_2 = -1$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) =$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3) =$$

$$
\begin{array}{ll}
\lambda_1 = 1 & y_1 = e^{1x} \\
\lambda_2 = -1 & y_2 = e^{-1x} \\
\lambda_3 = -2 & y_3 = e^{-2x} \\
\lambda_4 = 3 & y_4 = e^{3x}
\end{array}
$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{3x}$ $\quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

Příklad 2. HS3 Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $2y''' - 7y'' + y' + 10y = 0$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená charakteristická rovnice: $2\lambda^3 - 7\lambda^2 + \lambda + 10 = 0$

Kořeny mohou být pouze čísla $\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{5}{2}$.

Zda jde skutečně o kořeny si ověříme pomocí Hornerova schematu.

HS	2	− 7	1	10
1	2	− 5	− 4	6
−1	2	− 9	10	0

$\lambda_1 = -1 \quad (2\lambda^3 - 7\lambda^2 + \lambda + 10) = (\lambda + 1)(2\lambda^2 - 9\lambda + 10)$

$$\lambda_{2;3} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{4} = \begin{cases} \lambda_2 = \frac{10}{4} \\ \lambda_3 = \frac{8}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 & \quad y_1 &= \mathrm{e}^{-x} \\ \lambda_2 &= \tfrac{5}{2} & \quad y_2 &= \mathrm{e}^{\frac{5}{2}x} \\ \lambda_3 &= 2 & \quad y_3 &= \mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\mathrm{e}^{-1x} + c_2\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x} + c_3\mathrm{e}^{2x} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Lineární dif. rovnice n. řádu s KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY — SPECIÁLNÍ PRAVÁ STRANA

Příklad 3.a Najděte řešení počáteční úlohy $\begin{cases} y'' + 4y = \mathrm{e}^x \cos 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená homogenní rovnice: $y'' + 4y = 0$

2. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^2 + 4 = 0$

$$\lambda_{1;2} = \pm 2i \qquad y_{1;2} = \mathrm{e}^{(0 \pm 2.i)x}$$

$$y_1 = \sin 2x$$
$$y_2 = \cos 2x$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

4. Odhadnuté partikulární řešení $y'' + 4y = \mathrm{e}^x \cos 2x \;\; = \underbrace{1}_{a} \mathrm{e}^{1x} \cos 2x$

$\Rightarrow \quad y_P = (a\mathrm{e}^x \cos 2x + b\mathrm{e}^x \sin 2x)x^k$, kde k je násobnost kořene $1 \pm 2\,\mathrm{i}$ v charakteristické rovnici. V našem případě není $1 \pm 2\,\mathrm{i}$ kořenem, proto $k = 0$. Tedy

$$\begin{aligned}
y_P &= (a\mathrm{e}^x \cos 2x + b\mathrm{e}^x \sin 2x)x^0 \\
y_P &= a\mathrm{e}^x \cos 2x + b\mathrm{e}^x \sin 2x \\
y_P &= \mathrm{e}^x (a \cos 2x + b \sin 2x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_P' &= \mathrm{e}^x (a \cos 2x + b \sin 2x) + \mathrm{e}^x(-a \sin 2x \cdot 2 + b \cos 2x \cdot 2) \\
y_P' &= \mathrm{e}^x [(a + 2b) \cos 2x + (b - 2a) \sin 2x] \\
y_P'' &= \mathrm{e}^x [(a + 2b) \cos 2x + (b - 2a) \sin 2x] + \mathrm{e}^x[-(a + 2b) \sin 2x \cdot 2 + (b - 2a) \cos 2x \cdot 2] \\
y_P'' &= \mathrm{e}^x [(-3a + 4b) \cos 2x + (-3b - 4a) \sin 2x]
\end{aligned}$$

A po dosazení

$$\{\mathrm{e}^x[(-3a + 4b) \cos 2x + (-3b - 4a) \sin 2x]\} + 4\mathrm{e}^x(a \cos 2x + b \sin 2x) = \mathrm{e}^x \cos 2x \qquad | : \mathrm{e}^x$$

$$(-3a + 4b) \cos 2x + (-3b - 4a) \sin 2x + 4a \cos 2x + 4b \sin 2x = \cos 2x$$

$$(a + 4b) \cos 2x + (b - 4a) \sin 2x = \cos 2x$$

$$x = 0 : \qquad (a + 4b) \underbrace{\cos 0}_{1} + (b - 4a) \underbrace{\sin 0}_{0} = \underbrace{\cos 0}_{1}$$

$$x = \frac{\pi}{4} : \qquad (a + 4b) \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} + (b - 4a) \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{1} = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0}$$

$$\begin{array}{rcl} a+4b&=&1 \\ b-4a&=&0 \\ \hline a+4b&=&1 \quad |.4 \\ -4a+b&=&0 \\ \hline 17b&=&4 \end{array}$$

$$\underline{||\, b} = \frac{4}{17}$$

$$a + 4\frac{4}{17} = 1$$

$$\underline{||\, a} = \frac{1}{17}$$

$$y_P = a\mathrm{e}^x \cos 2x + b\mathrm{e}^x \sin 2x = \frac{1}{17}\mathrm{e}^x \cos 2x + \frac{4}{17}\mathrm{e}^x \sin 2x$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = y_H + y_P$

$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \frac{\mathrm{e}^x}{17}(\cos 2x + 4\sin 2x)$$

$$y' = c_1 \cos 2x \cdot 2 - c_2 \sin 2x \cdot 2 + \frac{\mathrm{e}^x}{17}(\cos 2x + 4\sin 2x) + \frac{\mathrm{e}^x}{17}(-\sin 2x \cdot 2 + 4\cos 2x \cdot 2)$$

6. Partikulární řešení vyhovující podmínkám: $y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

$$y(0) = 1: \quad 1 = c_1 \underbrace{\sin 0}_{0} + c_2 \underbrace{\cos 0}_{1} + \frac{1}{17} \underbrace{\mathrm{e}^0}_{1} (\underbrace{\cos 0}_{1} + 4 \underbrace{\sin 0}_{0})$$

$$1 = c_2 + \frac{1}{17}$$

$$\underline{||\, c_2} = \frac{16}{17}$$

$$y'(0) = 0: \quad 0 = c_1 \cos 0 \cdot 2 - c_2 \sin 0 \cdot 2 + \frac{\mathrm{e}^0}{17}(\cos 0 + 4\sin 0) + \frac{\mathrm{e}^0}{17}(-\sin 0 \cdot 2 + 4\cos 0 \cdot 2)$$

$$0 = 2c_1 + \frac{1}{17} + \frac{8}{17}$$

$$\underline{||\, c_1} = -\frac{9}{34}$$

Hledané partikulární řešení je

$$y = -\frac{9}{34}\sin 2x + \frac{16}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\mathrm{e}^x \cos 2x + \frac{4}{17}\mathrm{e}^x \sin 2x$$

Příklad 3.b Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y'' + y' - 2y - 6e^x = 0$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$ $y'' + y' - 2y = 6e^x$

1. Přidružená homogenní rovnice: $y'' + y' - 2y = 0$

2. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$
má rozklad

$$(\lambda - 1) \cdot (\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad y_1 = e^{1x}$$
$$\lambda_2 = -2 \qquad y_2 = e^{-2x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$

4. Odhadnuté partikulární řešení y_P **:** $\ldots = 6\,e^x \cdot 1 \quad = \underbrace{6}_{a}\,e^{1x} \cos 0x$

$\Rightarrow \quad y_P = (ae^{1x})x^k$, kde k je násobnost kořene $1 \pm 0\,\mathrm{i} \ = 1$ v charakteristické rovnici.
V našem případě je 1 **jednonásobným** kořenem, proto $k = 1$. Tedy

$$\begin{aligned} y_P &= (ae^x)x^1 \\ y_P &= (a\,x) \cdot (e^x) \\ y_P' &= ae^x + axe^x \\ y_P'' &= ae^x + ae^x + axe^x \end{aligned}$$

A po dosazení

$$\begin{aligned} (ae^x + ae^x + axe^x) + (ae^x + axe^x) - 2(axe^x) - 6e^x &= 0 \\ 3ae^x - 6e^x &= 0 \qquad |:e^x \\ 3a &= 6 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice: $y_P = 2xe^x$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = y_H + y_P$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + 2xe^x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 3.c

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y''-4y'-5y = (2x+3)\,\mathrm{e}^{2x}$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\; y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená homogenní rovnice: $y'' - 4y' - 5y = 0$

2. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

má rozklad

$$(\lambda+1)\cdot(\lambda-5) = 0$$

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & y_1 = \mathrm{e}^{-1x} \\ \lambda_2 = 5 & y_2 = \mathrm{e}^{5x} \end{array}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\,\mathrm{e}^{-x} + c_2\,\mathrm{e}^{5x}$

4. Odhadnuté partikulární řešení y_P **:** ... $= (2x+3)\,\mathrm{e}^{2x}\cdot 1 = (\underbrace{2}_{a}x + \underbrace{3}_{b})\,\mathrm{e}^{2x}\cos 0x$

$\Rightarrow \quad y_P = (ax+b)\mathrm{e}^{2x}x^k$, kde k je násobnost kořene $2 \pm 0\,\mathrm{i} = 2$ v charakteristické rovnici.

V našem případě není 2 kořenem, proto $k=0$. Tedy

$$\begin{aligned} y_P &= (ax+b)\,\mathrm{e}^{2x}x^0 \\ y_P &= (ax+b)\cdot\mathrm{e}^{2x} \\ y_P' &= a\,\mathrm{e}^{2x} + (ax+b)\,\mathrm{e}^{2x}\cdot 2 = (2ax+a+2b)\,\mathrm{e}^{2x} \\ y_P'' &= 2a\,\mathrm{e}^{2x} + (2ax+a+2b)\,\mathrm{e}^{2x}\cdot 2 \end{aligned}$$

A po dosazení

$$\left[2a\,\mathrm{e}^{2x} + 2(2ax+a+2b)\,\mathrm{e}^{2x}\right] - 4\left[(2ax+a+2b)\,\mathrm{e}^{2x}\right] - 5\left[(ax+b)\,\mathrm{e}^{2x}\right] = (2x+3)\,\mathrm{e}^{2x} \qquad |:\mathrm{e}^{2x}$$

$$2a + 4ax + 2a + 4b - 8ax - 4a - 8b - 5ax - 5b = 2x + 3$$

$$-9ax - 9b = 2x + 3$$

$$\begin{array}{ll} x^1: & -9a = 2 \\ x^0: & -9b = 3 \end{array}$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice: $y_P = -\left(\dfrac{2}{9}\cdot x + \dfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{2x}$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = y_H + y_P$

$$y = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{5x} - \left(\frac{2}{9}\cdot x + \frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 3.d Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y''-4y'+4y=(2x+3)\,\mathrm{e}^{2x}$

Řešení: $x\in\mathbb{R}\,;\ y\in\mathbb{R}$

1. Přidružená homogenní rovnice: $y''-4y'+4y=0$

2. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^2-4\lambda+4=0$

má rozklad

$$(\lambda-2)^2=0$$

$$\lambda_1=2 \qquad y_1=\mathrm{e}^{2x}$$
$$\lambda_2=2 \qquad y_2=\mathrm{e}^{2x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H=c_1\,\mathrm{e}^{2x}+c_2x\,\mathrm{e}^{2x}$

4. Odhadnuté partikulární řešení y_P **:** **...** $=(2x+3)\,\mathrm{e}^{2x}\cdot 1 \ =(\underbrace{2}_{a}\,x+\underbrace{3}_{b})\,\mathrm{e}^{2x}\cos 0x$

$\Rightarrow \ y_P=(ax+b)\,\mathrm{e}^{2x}\cdot x^k$, kde k je násobnost kořene $2\pm 0\,\mathrm{i}\ =2$ v charakteristické rovnici.

V našem případě je 2 **dvojnásobným** kořenem, proto $k=2$. Tedy

$$\begin{aligned} y_P &= (ax+b)\,\mathrm{e}^{2x}x^2 \\ y_P &= (ax^3+bx^2)\cdot\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_P' &= (3ax^2+2bx)\,\mathrm{e}^{2x}+(ax^3+bx^2)\,\mathrm{e}^{2x}\cdot 2=(2ax^3+3ax^2+2bx^2+2bx)\,\mathrm{e}^{2x} \\ y_P'' &= (6ax^2+6ax+4bx+2b)\,\mathrm{e}^{2x}+(2ax^3+3ax^2+2bx^2+2bx)\,\mathrm{e}^{2x}\cdot 2= \\ &= (4ax^3+12ax^2+4bx^2+6ax+8bx+2b)\,\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

A po dosazení

$$\left[(4ax^3+12ax^2+4bx^2+6ax+8bx+2b)\,\mathrm{e}^{2x}\right]-$$
$$-4\left[(2ax^3+3ax^2+2bx^2+2bx)\,\mathrm{e}^{2x}\right]+4\left[(ax^3+bx^2)\,\mathrm{e}^{2x}\right]=(2x+3)\,\mathrm{e}^{2x} \qquad |:\mathrm{e}^{2x}$$
$$6ax+2b=2x+3$$

$$x^1: \qquad 6a=2$$
$$x^0: \qquad 2b=3$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice: $y_P=\left(\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{3}{2}\cdot x^2\right)\mathrm{e}^{2x}$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y=y_H+y_P=c_1\mathrm{e}^{2x}+c_2\,x\,\mathrm{e}^{2x}+\left(\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{3}{2}\cdot x^2\right)\mathrm{e}^{2x}$

nebo

$$y=\left(c_1+c_2\,x+\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{3}{2}\cdot x^2\right)\mathrm{e}^{2x} \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Lineární dif. rovnice n. řádu s KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY — PRAVÁ STRANA je složena ze SPECIÁLNÍCH částí

Příklad 4. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' + 2y'' + y' = x^2 + \sin x$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$
$$\lambda(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \ \ 0 & \qquad y_1 &= \mathrm{e}^{0.x} = 1 \\ \lambda_2 &= -1 & y_2 &= \mathrm{e}^{-1x} \\ \lambda_3 &= -1 & y_3 &= \mathrm{e}^{-1x} \end{aligned}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3 x\mathrm{e}^{-x}$

Dále můžeme pokračovat buď metodou variace konstant nebo odhadnout partikulární řešení pomocí neurčitých koeficientů.

$$y''' + 2y'' + y' = \underbrace{x^2}_{1} + \underbrace{\sin x}_{2}$$

Protože pravá strana zadané rovnice je složena ze dvou speciálních částí, použijeme princip superpozice a odhadneme partikulární řešení pro každou část zvlášť.

4. Odhadnuté partikulární řešení $y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$

Pro první část pravé strany: $\ldots = x^2 \cdot 1 \cdot 1 \quad = (\underbrace{1}_{a} x^2 + \underbrace{0}_{b} x + \underbrace{0}_{c}) \cdot \mathrm{e}^{0x} \cdot \cos 0x$

$\Rightarrow \quad y_{P_1} = (ax^2 + bx + c)x^k$, kde k je násobnost kořene $0 \pm 0\,\mathrm{i} = 0$ v charakteristické rovnici.

V našem případě je 0 jednonásobným kořenem, proto $k = 1$. Tedy

$$\begin{aligned} y_{P_1} &= (ax^2 + bx + c)x \\ y_{P_1} &= ax^3 + bx^2 + cx \\ y'_{P_1} &= 3ax^2 + 2bx + c \\ y''_{P_1} &= 6ax + 2b \\ y'''_{P_1} &= 6a \end{aligned}$$

a po dosazení

$$
\begin{aligned}
(6a) + 2(6ax + 2b) + (3ax^2 + 2bx + c) &= x^2 \\
3ax^2 + (12a + 2b)x + 6a + 4b + c &= x^2 \\
x^2: \qquad\qquad 3a &= 1 \\
\underline{||\, a} &= \frac{1}{3} \\
x: \qquad\qquad 12a + 2b &= 0 \\
12 \cdot \frac{1}{3} + 2b &= 0 \\
2b &= -4 \\
\underline{||\, b} &= -2 \\
x^0: \qquad\qquad 6a + 4b + c &= 0 \\
6 \cdot \frac{1}{3} + 4(-2) + c &= 0 \\
2 - 8 + c &= 0 \\
\underline{||\, c} &= 6 \\
\underline{||\, y_{P_1}} &= \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x
\end{aligned}
$$

Pro druhou část pravé strany: $\ldots = 1 \cdot 1 \cdot \sin x \; = \underbrace{1}_{a} \cdot \mathrm{e}^{0x} \cdot \sin 1x$

$\Rightarrow \quad y_{P_2} = (a \sin x + b \cos x)x^k$, kde k je násobnost kořene $0 \pm 1\,\mathrm{i} = \pm \mathrm{i}$ v chrakteristické rovnici. V našem případě není i kořenem, proto $k = 0$. Tedy

$$
\begin{aligned}
y_{P_2} &= (a \sin x + b \cos x)x^0 \\
y_{P_2} &= a \sin x + b \cos x \\
y'_{P_2} &= a \cos x - b \sin x \\
y''_{P_2} &= -a \sin x - b \cos x \\
y'''_{P_2} &= -a \cos x + b \sin x
\end{aligned}
$$

a po dosazení

$$
\begin{aligned}
(-a\cos x + b\sin x) + 2(-a\sin x - b\cos x) + (a\cos x - b\sin x) &= \sin x \\
-2a\sin x - 2b\cos x &= \sin x \\
x = 0: \qquad -2a\underbrace{\sin 0}_{0} - 2b\underbrace{\cos 0}_{1} &= \underbrace{\sin 0}_{0} \\
-2b &= 0 \\
\underline{\|\, b} &= 0 \\
x = \frac{\pi}{2}: \qquad -2a\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - 2b\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} &= \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} \\
-2a &= 1 \\
\underline{\|\, a} &= -\frac{1}{2} \\
\underline{\|\, y_{P_2}} &= -\frac{1}{2}\sin x
\end{aligned}
$$

$$
y_P = y_{P_1} + y_{P_2} = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2}\sin x
$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = y_H + y_P$

$$
y = c_1 + c_2\,\mathrm{e}^{-x} + c_3\,x\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2}\sin x \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}
$$

Lineární dif. rovnice n. řádu s KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY — METODA VARIACE KONSTANT

Příklad 5. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad y_1 = e^{1x}$$
$$\lambda_2 = 1 \qquad y_2 = e^{1x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 e^x + c_2 x e^x$

4. Variace konstant: Konstanty c_i nahradíme vhodnými funkcemi $K_i(x)$ (pro přehlednost budeme vynechávat označení proměnné) a dosadíme do původní rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$$

$$y_H = c_1 e^x + c_2 x e^x$$
$$y = K_1(x)\cdot[e^x] + K_2(x)\cdot[xe^x] = K_1\cdot(e^x) + K_2\cdot(xe^x)$$

$$y' = K_1'\cdot(e^x) + K_1\cdot(e^x)' + K_2'\cdot(xe^x) + K_2\cdot(xe^x)'$$
$$y' = K_1'e^x + K_1e^x + K_2'xe^x + K_2\cdot(1e^x + xe^x)$$

za podmínky: $K_1'e^x + K_2'xe^x = 0$

$$y' = K_1e^x + K_2(e^x + xe^x)$$
$$y'' = K_1'e^x + K_1e^x + K_2'(e^x + xe^x) + K_2[e^x + (e^x + xe^x)]$$

A po dosazení:

$$[K_1'(e^x)' + K_1e^x + K_2'(xe^x)' + K_2(2e^x + xe^x)] - 2[K_1e^x + K_2(e^x + xe^x)] + [K_1e^x + K_2xe^x] = \frac{e^x}{x^2+1}$$
$$K_1'(e^x)' + K_2'(xe^x)' + K_1(e^x - 2e^x + e^x) + K_2(2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x) = \frac{e^x}{x^2+1}$$
$$K_1'(e^x)' + K_2'(xe^x)' = \frac{e^x}{x^2+1}$$

Formální sestavení systému:

$$K_1'e^x \quad + \quad K_2'xe^x \quad = 0$$
$$K_1'(e^x)' + K_2'(xe^x)' = \frac{e^x}{x^2+1}$$

$$K_1'\mathrm{e}^x + K_2'x\mathrm{e}^x = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$K_1'\mathrm{e}^x + K_2'(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$

$$K_2'\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1} \quad | : \mathrm{e}^x$$

$$\underline{||\, K_2'} = \frac{1}{x^2+1}$$

A po dosazení do první rovnice systému

$$K_1'\mathrm{e}^x + \frac{1}{x^2+1}x\mathrm{e}^x = 0 \quad | : \mathrm{e}^x$$

$$\underline{||\, K_1'} = -\frac{x}{x^2+1}$$

$$K_1 = -\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left| -\frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \right| = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c_1 = \underline{-\ln\sqrt{x^2+1} + c_1}$$

$$K_2 = \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \underline{\operatorname{arctg} x + c_2}$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = (-\ln\sqrt{x^2+1} + c_1)\mathrm{e}^x + (\operatorname{arctg} x + c_2)x\mathrm{e}^x$

$$y = \underbrace{c_1\mathrm{e}^x + c_2x\mathrm{e}^x}_{y_H} + \underbrace{\mathrm{e}^x(-\ln\sqrt{x^2+1} + x\operatorname{arctg} x)}_{y_P} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 5.b Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' + 2y'' + y' = x^2$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$
$$\lambda(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 & \qquad y_1 &= \mathrm{e}^{0.x} = 1 \\ \lambda_2 &= -1 & y_2 &= \mathrm{e}^{-1x} \\ \lambda_3 &= -1 & y_3 &= \mathrm{e}^{-1x} \end{aligned}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3 x\mathrm{e}^{-x}$

Dále můžeme pokračovat buď metodou variace konstant nebo odhadnout partikulární řešení pomocí neurčitých koeficientů protože pravá strana je speciální.

4. Variace konstant: Konstanty c_i nahradíme vhodnými funkcemi $K_i(x)$ a formálně sestavíme systém (pro přehlednost budeme vynechávat označení proměnné).

$$\begin{array}{ccccccc} K_1' & + & K_2'\mathrm{e}^{-x} & + & K_3' x\mathrm{e}^{-x} & = 0 \\ K_1'(1)' & + & K_2'\left(\mathrm{e}^{-x}\right)' & + & K_3'\left(x\mathrm{e}^{-x}\right)' & = 0 \\ K_1'\left[(1)'\right]' & + & K_2'\left[\left(\mathrm{e}^{-x}\right)'\right]' & + & K_3'\left[\left(x\mathrm{e}^{-x}\right)'\right]' & = x^2 \\ \hline K_1' & + & K_2'\mathrm{e}^{-x} & + & K_3' x\mathrm{e}^{-x} & = 0 \\ 0 & + & K_2'(-\mathrm{e}^{-x}) & + & K_3'(\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}) & = 0 & + \\ 0 & + & K_2'(\mathrm{e}^{-x}) & + & K_3'(-\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}) & = x^2 \\ \hline & & & & -K_3'\mathrm{e}^{-x} & = x^2 \\ & & & & K_3' & = -\frac{x^2}{\mathrm{e}^{-x}} = -x^2\mathrm{e}^x \end{array}$$

$$\begin{aligned} -K_2'\mathrm{e}^{-x} + (-x^2\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}) &= 0 \\ -K_2'\mathrm{e}^{-x} - x^2 + x^3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1' + \left[(x^3 - x^2)\,\mathrm{e}^x\right]\mathrm{e}^{-x} + (-x^2\mathrm{e}^x)x\mathrm{e}^{-x} &= 0 \\ K_1' - x^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\underline{\|\ K_3} = \int -x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = -x^2 & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = -2x & v = \mathrm{e}^x \end{matrix} \right| = -x^2\mathrm{e}^x - \int -2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = 2x & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = 2 & v = \mathrm{e}^x \end{matrix} \right| =$$

$$= -x^2\mathrm{e}^x + \left(2x\mathrm{e}^x - \int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) = -x^2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + c_3 = \underline{\mathrm{e}^x(-x^2 + 2x - 2) + c_3}$$

$\underline{|| K_2} = \int \underbrace{(x^3 - x^2)}_{u} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v'} \,\mathrm{d}x =$ … ještě 2× per partes … $= \underline{\mathrm{e}^x (x^3 - 4x^2 + 8x - 8) + c_2}$

$\underline{|| K_1} = \int x^2 \,\mathrm{d}x = \underline{\frac{x^3}{3} + c_1}$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) + [\mathrm{e}^x (x^3 - 4x^2 + 8x - 8) + c_2]\mathrm{e}^{-x} + [\mathrm{e}^x(-x^2 + 2x - 2) + c_3]x\mathrm{e}^{-x}$$

A po úpravě

$$y = \underbrace{c_1 + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3 x\mathrm{e}^{-x}}_{y_H} + \underbrace{\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - 8}_{y_P} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Příklad 6.c Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' + y' = \cos^2 x$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y''' + y' = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^3 + \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{0x} = 1$$

$$\lambda_{2;3} = \pm i \qquad y_{2;3} = \mathrm{e}^{(0\pm 1.i)x}$$

$$y_2 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \cos 1x$$

$$y_3 = \mathrm{e}^{0x} \cdot \sin 1x$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$

4. Variace konstant: Konstanty c_i nahradíme vhodnými funkcemi $K_i(x)$ a formálně sestavíme systém (pro přehlednost budeme vynechávat označení proměnné).

$$\begin{aligned}
K_1' \quad &+ \quad K_2' \cos x \quad + \quad K_3' \sin x &= 0 \\
K_1'(1)' \quad &+ \quad K_2'\,(\cos x)' \quad + \quad K_3'\,(\sin x)' &= 0 \\
K_1'\,[(1)']' + K_2'&\left[(\cos x)'\right]' + K_3'\left[(\sin x)'\right]' &= \cos^2 x
\end{aligned}$$

Po provedení příslušných derivací:

$$\begin{aligned}
K_1' + K_2' \cos x + K_3' \sin x \;&=\; 0 \qquad (1) \\
0 + K_2'(-\sin x) + K_3'(\cos x) \;&=\; 0 \qquad (2) \\
0 + K_2'(-\cos x) + K_3'(-\sin x) \;&=\; \cos^2 x \qquad (3)
\end{aligned}$$

Vezmeme rovnice (2) a (3):

$$-K_2' \sin x + K_3' \cos x = 0 \qquad |\cdot \cos x$$

$$-K_2' \cos x - K_3' \sin x = \cos^2 x \qquad |\cdot(-\sin x)$$

$$K_3'\,\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1} = \cos^2 x \cdot (-\sin x)$$

$$\underline{\|\, K_3} = \int \cos^2 x \cdot \underbrace{(-\sin x)\,\mathrm{d}x}_{} = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ \underbrace{-\sin x\,\mathrm{d}x}_{} = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + c_3 = \underline{\frac{1}{3}\cos^3 x + c_3}$$

Opět vezmeme rovnice (2) a (3):

$$-K_2' \sin x + K_3' \cos x = 0 \qquad |\cdot \sin x$$

$$-K_2' \cos x - K_3' \sin x = \cos^2 x \,|\cdot \cos x$$

$$-\,K_2'\,\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} = \cos^3 x$$

$$\underline{\| K_2} = \int -\cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int -\cos^2 x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \int (\sin^2 x - 1)\cdot \underbrace{\cos x \,\mathrm{d}x} = \left| \begin{array}{c} \sin x = u \\ \underbrace{\cos x \,\mathrm{d}x} = \mathrm{d}u \end{array} \right| =$$

$$= \int (u^2 - 1)\,\mathrm{d}u = \frac{u^3}{3} - u + c_2 = \underline{\frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + c_2}$$

Nyní K_2' a K_3' dosadíme do rovnice (1):

$$K_1' + (-\cos^3 x)\cdot\cos x + (-\sin x\cdot\cos^2 x)\cdot\sin x = 0$$

$$K_1' - \cos^2 x(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1}) = 0$$

$$\underline{\| K_1} = \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} 1 = \cos^2 x + \sin^2 x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \end{array} \right| = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos \underbrace{2x}_{v}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \underline{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c_1}$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\underbrace{\sin 2x}_{2\sin x\cos x} + c_1\right) + \left(\frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + c_2\right)\cdot\cos x + \left(\frac{1}{3}\cos^3 x + c_3\right)\cdot\sin x$$

A po úpravě

$$y = \underbrace{c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x}_{y_H} + \underbrace{\frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin 2x}_{y_P} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Příklad 7.d Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$

Řešení: $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y'' + 3y' + 2 = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$
$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$
$$\lambda_1 = -1 \qquad y_1 = e^{-1x}$$
$$\lambda_2 = -2 \qquad y_2 = e^{-2x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-2x}$

4. Variace konstant: Konstanty c_i nahradíme vhodnými funkcemi $K_i(x)$ a formálně sestavíme systém (pro přehlednost budeme vynechávat označení proměnné).

$$\begin{aligned} K_1'\, e^{-x} \quad + \quad K_2'\, e^{-2x} \quad &= 0 \\ K_1'\,(e^{-x})' + K_2'\,\left(e^{-2x}\right)' &= \tfrac{1}{e^x+1} \end{aligned}$$

Po provedení příslušných derivací:

$$\begin{aligned} K_1'\, e^{-x} \quad + \quad K_2'\, e^{-2x} \quad &= 0 \\ K_1'\, e^{-x}(-1) + \quad K_2'\left[e^{-2x}(-2)\right] &= \frac{1}{e^x+1} \end{aligned}$$

$$K_2'\,\left(-e^{-2x}\right) = \frac{1}{e^x+1} \qquad | \cdot \left(-e^{2x}\right)$$

$$K_2' = -\frac{e^{2x}}{e^x+1}$$

a po dosazení do první rovnice

$$K_1'\, e^{-x} - \frac{e^{2x}}{e^x+1}\, e^{-2x} = 0$$

$$K_1' = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$\underline{\| K_2} = \int -\frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = -\int \frac{e^x}{e^x+1}\cdot \underbrace{e^x\,dx} = \left|\begin{aligned} e^x + 1 &= t \\ e^x &= t-1 \\ \underbrace{e^x\,dx} &= dt \end{aligned}\right| = -\int \frac{t-1}{t}\,dt = \ /\ \underbrace{-1+\tilde{c}_2}_{c_2}$$

$$= -\int dt + \int \frac{1}{t}\,dt = -t + \ln|t| + \tilde{c}_2 = \underline{-(e^x+1) + \tilde{c}_2 + \ln(e^x+1)}$$

$$\underline{||\, K_1} = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \qquad \left| \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \right| \qquad = \underline{\ln(\mathrm{e}^x + 1) + c_1}$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = [\ln(\mathrm{e}^x + 1) + c_1]\ \mathrm{e}^{-x} + [-\mathrm{e}^x + \ln(\mathrm{e}^x + 1) + c_2]\ \mathrm{e}^{-2x}$$

A po úpravě

$$y = \underbrace{c_1\,\mathrm{e}^{-x} + c_2\,\mathrm{e}^{-2x}}_{y_H} + \underbrace{(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x})\ \ln(\mathrm{e}^x + 1) - \mathrm{e}^{-x}}_{y_P} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 8.e Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y'' + 4y' + 4y = x^{-3}\,\mathrm{e}^{-2x}$

Řešení: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,;\; y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y'' + 4y' + 4 = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$
$$(\lambda + 2)^2 = 0$$
$$\lambda_1 = -2 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{-2x}$$
$$\lambda_2 = -2 \qquad y_2 = \mathrm{e}^{-2x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2\,x\,\mathrm{e}^{-2x}$

4. Variace konstant: Konstanty c_i nahradíme vhodnými funkcemi $K_i(x)$ a formálně sestavíme systém (pro přehlednost budeme vynechávat označení proměnné).

$$\begin{aligned} K_1'\,\mathrm{e}^{-2x} \;+\; K_2'\,x\,\mathrm{e}^{-2x} &= 0 \\ K_1'\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)' + K_2'\left(x\cdot\mathrm{e}^{-2x}\right)' &= x^{-3}\,\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

Po provedení příslušných derivací:

$$\begin{aligned} K_1'\,\mathrm{e}^{-2x} \;+\; K_2'\,x\,\mathrm{e}^{-2x} &= 0 && |\cdot 2 \\ K_1'\,\mathrm{e}^{-2x}(-2) + K_2'\left[\mathrm{e}^{-2x} + x\cdot\mathrm{e}^{-2x}(-2)\right] &= x^{-3}\,\mathrm{e}^{-2x} \\ \hline K_2'\,\mathrm{e}^{-2x} &= x^{-3}\,\mathrm{e}^{-2x} && |\cdot\left(\mathrm{e}^{2x}\right) \\ K_2' &= x^{-3} \end{aligned}$$

a po dosazení do první rovnice

$$K_1' = -x^{-2}$$

$$\underline{\|\,K_2} = \int x^{-3}\,\mathrm{d}x = \underline{\frac{x^{-2}}{-2} + c_2} \qquad \underline{\|\,K_1} = \int -x^{-2}\,\mathrm{d}x = \underline{-\frac{x^{-1}}{-1} + c_1}$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = \left(x^{-1} + c_1\right)\,\mathrm{e}^{-2x} + \left(-0{,}5x^{-2} + c_2\right)\cdot x\,\mathrm{e}^{-2x}$$

A po úpravě

$$y = \underbrace{c_1\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2\,x\,\mathrm{e}^{-2x}}_{y_H} + \underbrace{0{,}5\,x^{-1}\,\mathrm{e}^{-2x}}_{y_P} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 9.f Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x} \ln x$

Řešení: $x > 0\,;\ y \in \mathbb{R}$

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y'' + 4y' + 4 = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$
$$(\lambda + 2)^2 = 0$$
$$\lambda_1 = -2 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{-2x}$$
$$\lambda_2 = -2 \qquad y_2 = \mathrm{e}^{-2x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2\,x\,\mathrm{e}^{-2x}$

4. Variace konstant: Konstanty c_i nahradíme vhodnými funkcemi $K_i(x)$ a formálně sestavíme systém (pro přehlednost budeme vynechávat označení proměnné).

$$\begin{aligned} K_1'\,\mathrm{e}^{-2x} + K_2'\,x\,\mathrm{e}^{-2x} &= 0 \\ K_1'\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)' + K_2'\left(x \cdot \mathrm{e}^{-2x}\right)' &= \mathrm{e}^{-2x}\,\ln x \end{aligned}$$

Po provedení příslušných derivací:

$$\begin{aligned} K_1'\,\mathrm{e}^{-2x} \quad + \quad K_2'\,x\,\mathrm{e}^{-2x} &= 0 \qquad | \cdot 2 \\ K_1'\,\mathrm{e}^{-2x}(-2) + K_2'\left[\mathrm{e}^{-2x} + x \cdot \mathrm{e}^{-2x}(-2)\right] &= \mathrm{e}^{-2x}\,\ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2'\,\mathrm{e}^{-2x} &= \mathrm{e}^{-2x}\,\ln x \qquad | \cdot \left(\mathrm{e}^{2x}\right) \\ K_2' &= \ln x \end{aligned}$$

a po dosazení do první rovnice

$$K_1' = -x \ln x$$

$$\underline{\|\,K_2} = \int \ln x \cdot 1\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{matrix} \right| = x\,\ln x - \int \frac{1}{x}\,x\,\mathrm{d}x = x\,\ln x - \int \mathrm{d}x = \\ = \underline{x\,\ln x - x + c_2}$$

$$\underline{\|\,K_1} = \int -x \ln x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln x & v' = -x \\ u' = \frac{1}{x} & v = -\frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = -\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \underline{-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + c_1}$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = \left(-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + c_1\right)\mathrm{e}^{-2x} + (x\,\ln x - x + c_2) \cdot x\,\mathrm{e}^{-2x}$$

A po úpravě

$$y = \underbrace{c_1\,\mathrm{e}^{-2x} + c_2\,x\,\mathrm{e}^{-2x}}_{y_H} + \underbrace{\frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\,\ln x - \frac{3x^2}{4}\,\mathrm{e}^{-2x}}_{y_P} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$