FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Lineární diferenciální rovnice

(obyčejné v reálném oboru)

Studijní materiály

Brno 2018

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Obsah

Úvod

Jednou z nejpoužívanějších matematických disciplín jak v přírodních vědách tak v technických vědách jsou ***diferenciální rovnice***. **Obyčejná** diferenciální rovnice vyjadřuje vztah mezi hledanou funkcí jedné proměnné (většinou označovanou $y(x)$ nebo jen y), jejími derivacemi a nezávislou proměnnou (většinou označovanou x).

V nejjednodušší formě jste se s nimi setkali již u neurčitého integrálu, kdy jste vlastně řešili rovnici:

$$\begin{aligned} y' &= f(x) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x) \\ \mathrm{d}y &= f(x)\,\mathrm{d}x \\ \int \mathrm{d}y &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ y &= F(x) + c \end{aligned}$$

S řešením diferenciálních rovnic jsou spjaty tyto základní otázky:

Existence — kdy má diferenciální rovnice řešení [1].

Jednoznačnost — kdy daným podmínkám vyhovuje právě jedno partikulární řešení.

Metody řešení — následně budeme probírat pouze některé typy diferenciálních rovnic.

[1]Touto (stejně jako i následující) otázkou se nebudeme zabývat vzhledem k tomu, že je probírána na přednáškách a v literatuře (např. Diblík, J., Přibyl, O.: *Obyčejné diferenciální rovnice.* Brno : VUT v Brně, Fakulta stavební, 150 s., 2004. ISBN 80–214–2795–7)

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu $y' + g(x) \cdot y = h(x)$

Příklad 1. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y' - 2y = x$

1. Přidružená homogenní rovnice $y' - 2y = 0$ je separovatelná.

$$\begin{aligned}
y' - 2y &= 0 \\
y' &= 2y && y \neq 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= 2\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| - \ln|c| &= 2x && c \neq 0 \\
\ln\left|\frac{y}{c}\right| &= 2x && \text{vhodnou volbou znaménka } c \\
\ln\frac{y}{c} &= 2x \\
\frac{y}{c} &= \mathrm{e}^{2x} \\
y &= c \cdot \mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}$$

Ověření podmínky: $c = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = 0$

$$0 - 2 \cdot 0 = 0$$

Obecné řešení homogenní rovnice je: $y_H = c \cdot \mathrm{e}^{2x} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

Ke stejnému výsledku bychom se dopracovali i pomocí charakteristické rovnice ($\lambda - 2 = 0$, protože zadaná rovnice má konstantní koeficienty) tak, jak bude ukázáno u rovnic vyššího řádu. Stejně tak bychom také mohli odhadnout partikulární řešení nehomogenní rovnice (protože jde o rovnici se speciální pravou stranou), ale my použijeme obecnější postup.

2. Řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou VARIACE KONSTANTY.

$$y_H = c \cdot \mathrm{e}^{2x} \qquad \text{konstantu } c \text{ nahradíme vhodnou funkcí } K(x)$$

$$\begin{aligned} y &= K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} \\ y' &= K'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} + K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot 2 \end{aligned}$$

A po dosazení do původní rovnice:

$$\begin{aligned} [K'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} + 2K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x}] - 2(K(x) \cdot \mathrm{e}^{2x}) &= x \\ K'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} &= x \\ K'(x) &= x\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

$$K(x) = \int x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \mathrm{e}^{-2x} \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{array} \right| = \left[-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\right] - \int -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + c$$

$$\begin{aligned} K(x) &= -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + c \\ y &= \left(-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + c\right)\mathrm{e}^{2x} \\ y &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + c\mathrm{e}^{2x} = \underbrace{c\mathrm{e}^{2x}}_{y_H} \underbrace{-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}}_{y_P} \end{aligned}$$

Obecným řešením nehomogenní lineární diferenc. rovnice $y' - 2y = x$

je funkce $f(x) : y = c\mathrm{e}^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$ **,**

přičemž

y_H označuje obecné řešení přidružené homogenní rovnice;

y_P označuje partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Lineární dif. rovnice n. řádu s KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY — HOMOGENNÍ

Příklad 2. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y^{(5)} - 4y^{(4)} + 2y''' + 10y'' - 7y' - 10y = 0$

Řešení:

1. Přidružená charakteristická rovnice: $\lambda^5 - 4\lambda^4 + 2\lambda^3 + 10\lambda^2 - 7\lambda - 10 = 0$

Kořeny mohou být pouze čísla $\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10$. Zda jde skutečně o kořeny si ověříme pomocí Hornerova schematu.

HS	1	−4	2	10	−7	−10
1	1	−3	−1	9	2	−8
−1	1	−5	7	3	−10	0

$\lambda_1 = -1$

$$(\lambda^5 - 4\lambda^4 + 2\lambda^3 + 10\lambda^2 - 7\lambda - 10) = (\lambda + 1)(\lambda^4 - 5\lambda^3 + 7\lambda^2 + 3\lambda - 10)$$

HS	1	−5	7	3	−10
−1	1	−6	13	−10	0

$\lambda_2 = -1$

$$(\lambda^5 - 4\lambda^4 + 2\lambda^3 + 10\lambda^2 - 7\lambda - 10) = (\lambda + 1)^2(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 13\lambda - 10)$$

HS	1	−6	13	−10
2	1	−4	5	0

$\lambda_3 = 2$

$$(\lambda^5 - 4\lambda^4 + 2\lambda^3 + 10\lambda^2 - 7\lambda - 10) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$$

$$\lambda_{4;5} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm \mathrm{i}\sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2\mathrm{i}}{2} = 2 \pm \mathrm{i}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 & \qquad y_1 &= \mathrm{e}^{-x} \\ \lambda_2 &= -1 & \qquad y_2 &= \mathrm{e}^{-x} \\ \lambda_3 &= 2 & \qquad y_3 &= \mathrm{e}^{2x} \\ \lambda_4 &= 2 + \mathrm{i} & \qquad y_4 &= \mathrm{e}^{2x} \sin x \\ \lambda_5 &= 2 - \mathrm{i} & \qquad y_5 &= \mathrm{e}^{2x} \cos x \end{aligned}$$

2. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2 x\mathrm{e}^{-x} + c_3\mathrm{e}^{2x} + c_4\mathrm{e}^{2x}\sin x + c_5\mathrm{e}^{2x}\cos x$

Lineární dif. rovnice n. řádu s KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY — SPECIÁLNÍ PRAVÁ STRANA

Příklad 3.

Příklad 3. Najděte řešení počáteční úlohy
$$\begin{cases} y'' + 4y = \mathrm{e}^x \cos 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Řešení:

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y'' + 4y = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\mathrm{i} \qquad & y_1 &= \sin 2x \\ \lambda_2 &= -2\mathrm{i} \qquad & y_2 &= \cos 2x \end{aligned}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

4. Odhadnuté partikulární řešení $y'' + 4y = \mathrm{e}^x \cos 2x \quad = \underbrace{1}_{a} \mathrm{e}^{1x} \cos 2x$

$\Rightarrow \quad y_P = (a\mathrm{e}^x \cos 2x + b\mathrm{e}^x \sin 2x)x^k$, kde k je násobnost kořene $1 + 2\,\mathrm{i}$ v charakteristické rovnici. V našem případě není $1 + 2\,\mathrm{i}$ kořenem, proto $k = 0$. Tedy

$$y_P = (a\mathrm{e}^x \cos 2x + b\mathrm{e}^x \sin 2x)x^0$$
$$y_P = a\mathrm{e}^x \cos 2x + b\mathrm{e}^x \sin 2x$$
$$y_P = \mathrm{e}^x (a \cos 2x + b \sin 2x)$$

$$y_P' = \mathrm{e}^x (a \cos 2x + b \sin 2x) + \mathrm{e}^x (-a \sin 2x \cdot 2 + b \cos 2x \cdot 2)$$
$$y_P' = \mathrm{e}^x [(a + 2b) \cos 2x + (b - 2a) \sin 2x]$$
$$y_P'' = \mathrm{e}^x [(a + 2b) \cos 2x + (b - 2a) \sin 2x] + \mathrm{e}^x [-(a + 2b) \sin 2x \cdot 2 + (b - 2a) \cos 2x \cdot 2]$$
$$y_P'' = \mathrm{e}^x [(-3a + 4b) \cos 2x + (-3b - 4a) \sin 2x]$$

A po dosazení

$$\{\mathrm{e}^x [(-3a + 4b) \cos 2x + (-3b - 4a) \sin 2x]\} + 4\mathrm{e}^x (a \cos 2x + b \sin 2x) = \mathrm{e}^x \cos 2x \qquad | : \mathrm{e}^x$$
$$(-3a + 4b) \cos 2x + (-3b - 4a) \sin 2x + 4a \cos 2x + 4b \sin 2x = \cos 2x$$
$$(a + 4b) \cos 2x + (b - 4a) \sin 2x = \cos 2x$$

$$x = 0 : \qquad (a + 4b) \underbrace{\cos 0}_{1} + (b - 4a) \underbrace{\sin 0}_{0} = \underbrace{\cos 0}_{1}$$

$$x = \frac{\pi}{4} : \qquad (a + 4b) \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} + (b - 4a) \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{1} = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0}$$

$$\begin{aligned} a + 4b &= 1 \\ b - 4a &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + 4b &= 1 \quad |.4 \\ -4a + b &= 0 \end{aligned}$$

$$17b = 4$$

$$\underline{\| \, b} = \frac{4}{17}$$

$$a + 4\frac{4}{17} = 1$$

$$\underline{\| \, a} = \frac{1}{17}$$

$$y_P = a\mathrm{e}^x \cos 2x + b\mathrm{e}^x \sin 2x = \frac{1}{17}\mathrm{e}^x \cos 2x + \frac{4}{17}\mathrm{e}^x \sin 2x$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = y_H + y_P$

$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \frac{\mathrm{e}^x}{17}(\cos 2x + 4 \sin 2x)$$

$$y' = c_1 \cos 2x \cdot 2 - c_2 \sin 2x \cdot 2 + \frac{\mathrm{e}^x}{17}(\cos 2x + 4 \sin 2x) + \frac{\mathrm{e}^x}{17}(-\sin 2x \cdot 2 + 4 \cos 2x \cdot 2)$$

6. Partikulární řešení vyhovující podmínkám: $y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

$$y(0) = 1: \quad 1 = c_1 \underbrace{\sin 0}_{0} + c_2 \underbrace{\cos 0}_{1} + \frac{1}{17} \underbrace{\mathrm{e}^0}_{1} (\underbrace{\cos 0}_{1} + 4 \underbrace{\sin 0}_{0})$$

$$1 = c_2 + \frac{1}{17}$$

$$\underline{\|\, c_2} = \frac{16}{17}$$

$$y'(0) = 0: \quad 0 = c_1 \cos 0 \cdot 2 - c_2 \sin 0 \cdot 2 + \frac{\mathrm{e}^0}{17}(\cos 0 + 4 \sin 0) + \frac{\mathrm{e}^0}{17}(-\sin 0 \cdot 2 + 4 \cos 0 \cdot 2)$$

$$0 = 2c_1 + \frac{1}{17} + \frac{8}{17}$$

$$\underline{\|\, c_1} = -\frac{9}{34}$$

Hledané partikulární řešení je

$$y = -\frac{9}{34} \sin 2x + \frac{16}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} \mathrm{e}^x \cos 2x + \frac{4}{17} \mathrm{e}^x \sin 2x$$

Lineární dif. rovnice n. řádu s KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY — PRAVÁ STRANA je složena ze SPECIÁLNÍch částí

Příklad 4. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' + 2y'' + y' = x^2 + \sin x$

Řešení:

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$
$$\lambda(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad y_1 = \mathrm{e}^{0.x} = 1$$
$$\lambda_2 = -1 \qquad y_2 = \mathrm{e}^{-1x}$$
$$\lambda_3 = -1 \qquad y_3 = \mathrm{e}^{-1x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3 x\mathrm{e}^{-x}$

Dále můžeme pokračovat buď metodou variace konstant nebo odhadnout partikulární řešení pomocí neurčitých koeficientů.

$$y''' + 2y'' + y' = \underbrace{x^2}_{1} + \underbrace{\sin x}_{2}$$

Protože pravá strana zadané rovnice je složena ze dvou speciálních částí, použijeme princip superpozice a odhadneme partikulární řešení pro každou část zvlášť.

4. Odhadnuté partikulární řešení $y_P = y_{P_1} + y_{P_2}$

Pro první část pravé strany: $y''' + 2y'' + y' = x^2 \quad = \underbrace{1}_{a} x^2 + \underbrace{0}_{b} x + \underbrace{0}_{c}$

$\Rightarrow \quad y_{P_1} = (ax^2 + bx + c)x^k$, kde k je násobnost kořene $0 + 0\,\mathrm{i}$ v chrakteristické rovnici.
V našem případě je 0 jednonásobným kořenem, proto $k = 1$. Tedy

$$\begin{aligned} y_{P_1} &= (ax^2 + bx + c)x \\ y_{P_1} &= ax^3 + bx^2 + cx \\ y'_{P_1} &= 3ax^2 + 2bx + c \\ y''_{P_1} &= 6ax + 2b \\ y'''_{P_1} &= 6a \end{aligned}$$

a po dosazení

$$\begin{aligned} (6a) + 2(6ax + 2b) + (3ax^2 + 2bx + c) &= x^2 \\ 3ax^2 + (12a + 2b)x + 6a + 4b + c &= x^2 \\ x^2 : \qquad 3a &= 1 \end{aligned}$$

$$\underline{\| a} = \frac{1}{3}$$

$$x: \qquad 12a + 2b = 0$$

$$12 \cdot \frac{1}{3} + 2b = 0$$

$$2b = -4$$

$$\underline{\| b} = -2$$

$$x^0: \qquad 6a + 4b + c = 0$$

$$6 \cdot \frac{1}{3} + 4(-2) + c = 0$$

$$2 - 8 + c = 0$$

$$\underline{\| c} = 6$$

$$\underline{\| y_{P_1}} = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x$$

Pro druhou část pravé strany: $y''' + 2y'' + y' = \sin x \quad = \underbrace{1}_{a} \sin 1x$

$\Rightarrow \quad y_{P_2} = (a \sin x + b \cos x)x^k$, kde k je násobnost kořene $0 + 1\,\mathrm{i}$ v chrakteristické rovnici. V našem případě není i kořenem, proto $k = 0$. Tedy

$$y_{P_2} = (a \sin x + b \cos x)x^0$$

$$y_{P_2} = a \sin x + b \cos x$$

$$y'_{P_2} = a\cos x - b\sin x$$

$$y''_{P_2} = -a\sin x - b\cos x$$

a po dosazení

$$y'''_{P_2} = -a\cos x + b\sin x$$

$$(-a\cos x + b\sin x) + 2(-a\sin x - b\cos x) + (a\cos x - b\sin x) = \sin x$$

$$-2a\sin x - 2b\cos x = \sin x$$

$x = 0:$

$$-2a\underbrace{\sin 0}_{0} - 2b\underbrace{\cos 0}_{1} = \underbrace{\sin 0}_{0}$$

$$-2b = 0$$

$$\underline{\|\ b} = 0$$

$x = \frac{\pi}{2}:$

$$-2a\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - 2b\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} = \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}$$

$$-2a = 1$$

$$\underline{\|\ a} = -\frac{1}{2}$$

$$\underline{\|\ y_{P_2}} = -\frac{1}{2}\sin x$$

$$y_P = y_{P_1} + y_{P_2} = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2}\sin x$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = y_H + y_P$

$$y = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{-x} + c_3 x \mathrm{e}^{-x} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2}\sin x$$

Lineární dif. rovnice n. řádu s KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY — METODA VARIACE KONSTANT

Příklad 5. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$

Řešení:

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad y_1 = e^{1x}$$
$$\lambda_2 = 1 \quad y_2 = e^{1x}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 e^x + c_2 x e^x$

4. Variace konstant: Konstanty c_i nahradíme vhodnými funkcemi $K_i(x)$ (pro přehlednost budeme vynechávat označení proměnné) a dosadíme do původní rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$

$$y_H = c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x$$

$$y = K_1(x)\cdot[\mathrm{e}^x] + K_2(x)\cdot[x\mathrm{e}^x] = K_1\cdot(\mathrm{e}^x) + K_2\cdot(x\mathrm{e}^x)$$

$$y' = K_1'\cdot(\mathrm{e}^x) + K_1\cdot(\mathrm{e}^x)' + K_2'\cdot(x\mathrm{e}^x) + K_2\cdot(x\mathrm{e}^x)'$$

$$y' = K_1'\mathrm{e}^x + K_1\mathrm{e}^x + K_2'x\mathrm{e}^x + K_2\cdot(1\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)$$

za podmínky: $K_1'\mathrm{e}^x + K_2'x\mathrm{e}^x = 0$

$$y' = K_1\mathrm{e}^x + K_2(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)$$

$$y'' = K_1'\mathrm{e}^x + K_1\mathrm{e}^x + K_2'(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) + K_2[\mathrm{e}^x + (\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)]$$

A po dosazení:

$$[K_1'(\mathrm{e}^x)' + K_1\mathrm{e}^x + K_2'(x\mathrm{e}^x)' + K_2(2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)] - 2[K_1\mathrm{e}^x + K_2(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)] + [K_1\mathrm{e}^x + K_2x\mathrm{e}^x] = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$

$$K_1'(\mathrm{e}^x)' + K_2'(x\mathrm{e}^x)' + K_1(\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x) + K_2(2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$

$$K_1'(\mathrm{e}^x)' + K_2'(x\mathrm{e}^x)' = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$

Formální sestavení systému:

$$K_1'\mathrm{e}^x + K_2'x\mathrm{e}^x = 0$$

$$K_1'(\mathrm{e}^x)' + K_2'(x\mathrm{e}^x)' = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$

$$K_1'\mathrm{e}^x + K_2'x\mathrm{e}^x = 0 \quad |\cdot(-1)$$

$$K_1'\mathrm{e}^x + K_2'(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$

$$K_2'\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1} \quad |:\mathrm{e}^x$$

$$\underline{||\,K_2'} = \frac{1}{x^2+1}$$

A po dosazení do první rovnice systému

$$K_1'\mathrm{e}^x + \frac{1}{x^2+1}x\mathrm{e}^x = 0 \quad |:\mathrm{e}^x$$

$$\underline{||\,K_1'} = -\frac{x}{x^2+1}$$

$$K_1 = -\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left| -\frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \right| = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c_1 = -\ln\sqrt{x^2+1} + c_1$$

$$K_2 = \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c_2$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = (-\ln\sqrt{x^2+1} + c_1)\mathrm{e}^x + (\operatorname{arctg} x + c_2)x\mathrm{e}^x$

$$y = \underbrace{c_1\mathrm{e}^x + c_2x\mathrm{e}^x}_{y_H} + \underbrace{\mathrm{e}^x(-\ln\sqrt{x^2+1} + x\operatorname{arctg} x)}_{y_P}$$

Příklad 6. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice: $y''' + 2y'' + y' = x^2$

Řešení:

1. Přidružená homogenní rovnice:

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

2. Přidružená charakteristická rovnice:

$$\begin{aligned} \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) &= 0 \\ \lambda(\lambda + 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 & y_1 &= \mathrm{e}^{0.x} = 1 \\ \lambda_2 &= -1 & y_2 &= \mathrm{e}^{-1x} \\ \lambda_3 &= -1 & y_3 &= \mathrm{e}^{-1x} \end{aligned}$$

3. Obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3x\mathrm{e}^{-x}$

Dále můžeme pokračovat buď metodou variace konstant nebo odhadnout partikulární řešení pomocí neurčitých koeficientů protože pravá strana je speciální.

4. Variace konstant: Konstanty c_i nahradíme vhodnými funkcemi $K_i(x)$ a formálně sestavíme systém (pro přehlednost budeme vynechávat označení proměnné).

$$K_1' + K_2'\mathrm{e}^{-x} + K_3'x\mathrm{e}^{-x} = 0$$
$$K_1'(1)' + K_2'\left(\mathrm{e}^{-x}\right)' + K_3'\left(x\mathrm{e}^{-x}\right)' = 0$$
$$K_1'\left[(1)'\right]' + K_2'\left[\left(\mathrm{e}^{-x}\right)'\right]' + K_3'\left[\left(x\mathrm{e}^{-x}\right)'\right]' = x^2$$

$$K_1' + K_2'\mathrm{e}^{-x} + K_3'x\mathrm{e}^{-x} = 0$$
$$0 + K_2'(-\mathrm{e}^{-x}) + K_3'(\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}) = 0$$
$$0 + K_2'(\mathrm{e}^{-x}) + K_3'(-\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}) = x^2 \quad +$$

$$-K_3'\mathrm{e}^{-x} = x^2$$
$$K_3' = -\frac{x^2}{\mathrm{e}^{-x}} = -x^2\mathrm{e}^x$$

$$\underline{\|\, K_3} = \int -x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = -x^2 & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = -2x & v = \mathrm{e}^x \end{matrix} \right| = -x^2\mathrm{e}^x - \int -2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = 2x & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = 2 & v = \mathrm{e}^x \end{matrix} \right| =$$

$$= -x^2\mathrm{e}^x + \left(2x\mathrm{e}^x - \int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) = -x^2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + c_3 = \mathrm{e}^x(-x^2 + 2x - 2) + c_3$$

$$-K_2'\mathrm{e}^{-x} + (-x^2\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}) = 0$$
$$-K_2'\mathrm{e}^{-x} - x^2 + x^3 = 0$$

$$\underline{\|\, K_2} = \int (x^3 - x^2)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int -x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \quad \ldots \quad = \mathrm{e}^x(x^3 - 4x^2 + 8x - 8) + c_2$$

$$K_1' + [(x^3 - x^2)\,\mathrm{e}^x]\,\mathrm{e}^{-x} + (-x^2\mathrm{e}^x)x\mathrm{e}^{-x} = 0$$

$$K_1' - x^2 = 0$$

$$\underline{||\,K_1} = \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c_1$$

5. Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) + [\mathrm{e}^x(x^3 - 4x^2 + 8x - 8) + c_2]\mathrm{e}^{-x} + [\mathrm{e}^x(-x^2 + 2x - 2) + c_3]x\mathrm{e}^{-x}$$

$$y = \underbrace{c_1 + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3x\mathrm{e}^{-x}}_{y_H} + \underbrace{\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - 8}_{y_P}$$