FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Greenova věta – cirkulace rovinné křivky

(reálná funkce 2 reálných proměnných ve vektorovém poli)

Studijní materiály

Brno 2023

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Jsou-li splněny podmínky **Věty 3.2.** (tzv. **Greenova věta**) na str. 17 skript[1] ,

- křivka γ je kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka a je jedinou hranicí oblasti Ω
- funkce $\vec{f}\,\big((P(x,y),Q(x,y)\big)$ je na této oblasti ohraničené křivkou γ **spojitá**
- parciální derivace $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ jsou spojité na oblasti ohraničené křivkou γ

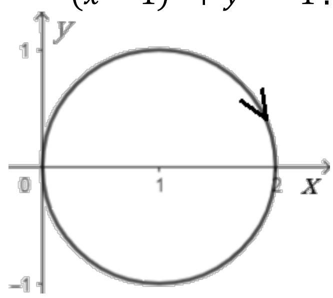
platí

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_{\gamma}\vec{f}\,\big(P(x,y),Q(x,y)\big)\cdot\,\mathrm{d}\vec{r}=\oint_{\gamma}P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

1. Určete cirkulaci:

$\oint_{\lambda}\left[y\,\vec{i}+(x-y)^2\,\vec{j}\right]\cdot\,\mathrm{d}\vec{r}$ kde **záporně** orientovaná **uzavřená** křivka λ je kružnice $(x-1)^2+y^2=1$.

/ $x\in\mathbb{R}\,;\ y\in\mathbb{R}$ /



1. způsob

Napíšeme parametrické rovnice křivky λ

$$\begin{aligned} x&=1+\cos t \qquad & x'&=-\sin t\\ y&=0+\sin t \qquad & y'&=\cos t \end{aligned}$$

$t\in\langle 0\,;2\pi\rangle$ $\Rightarrow$ opačná (kladná) orientace[2] ,

$$\oint_{\lambda}\left[y\,\vec{i}+(x-y)^2\,\vec{j}\right]\cdot\,\mathrm{d}\vec{r}=\oint_{\lambda}\left[y\,\vec{i}+(x^2-2xy+y^2)\,\vec{j}\right]\cdot\,\mathrm{d}\vec{r}=$$

$$=\int_{2\pi}^{0}\left\{\sin t\,\vec{i}+\left[(1+\cos t)^2-2(1+\cos t)\sin t+\sin^2 t\right]\vec{j}\right\}\cdot\left(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}\right)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_{2\pi}^{0}\left\{\sin t\,\vec{i}+\left(1+2\cos t+\cos^2 t-2\sin t-2\sin t\cos t+\sin^2 t\right)\vec{j}\right\}\cdot\left(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}\right)\,\mathrm{d}t=$$

$$=-\int_{0}^{2\pi}\left(\underbrace{-\sin^2 t}_{1}+\cos t+\underbrace{2\cos^2 t}_{1}+\cos^3 t-2\sin t\cos t-2\sin t\cos^2 t+\underbrace{\sin^2 t\cos t}_{3}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\left(\sin^2 t-2\cos^2 t\right)\mathrm{d}t+\int_{0}^{2\pi}\left(2\sin t\cos t-\cos t-\cos^3 t-\sin^2 t\cos t\right)\mathrm{d}t-\int_{0}^{2\pi}2\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\left(\sin^2 t-2\cos^2 t\right)\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{2\pi}\left(2\sin t-1-\underbrace{\left(1-\sin^2 t\right)}_{\cos^2 t}-\sin^2 t\right)\cos t\,\mathrm{d}t-\int_{0}^{2\pi}2\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\left(\sin^2 t-2\cos^2 t\right)\,\mathrm{d}t\qquad+\qquad\int_{0}^{2\pi}(2\sin t-2)\,\underline{\cos t\,\mathrm{d}t}+2\int_{0}^{2\pi}\cos^2 t\,\underline{(-\sin t)\,\mathrm{d}t}=$$

[1] DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80–7204–452–4.

[2] Volba $x=1+\sin t\,;\ y=0+\cos t\,;\ t\in\langle 0\,;2\pi\rangle$ již dává správnou (zápornou) orientaci.

$$\left|\begin{array}{rr} \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t & \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \\ (1-\sin^2 t) - \sin^2 t = \cos 2t & \cos^2 t - (1-\cos^2 t) = \cos 2t \\ 1 - 2\sin^2 t = \cos 2t & 2\cos^2 t - 1 = \cos 2t \\ \frac{1-\cos 2t}{2} = \sin^2 t & \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{r} \sin t = u \\ \cos t \,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{r} \cos t = v \\ -\sin t \,\mathrm{d}t = \mathrm{d}v \end{array}\right|$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} - 2\,\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{t=2\pi} (2u-2)\,\mathrm{d}u + 2\int_{t=0}^{t=2\pi} v^2\,\mathrm{d}v =$$

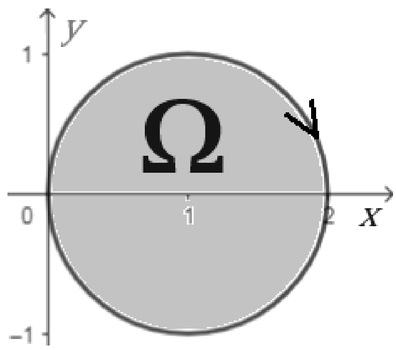
$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos \underbrace{2t}_{w}\right)\mathrm{d}t + \left[2\frac{u^2}{2} - 2u\right]_{t=0}^{t=2\pi} + \left[\frac{2}{3}v^3\right]_{t=0}^{t=2\pi} =$$

$$= \left[-\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} + \left[\sin^2 t - 2\sin t\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\ 2\pi\rangle$, proto

$$= \left[\left(-\frac{2\pi}{2} - \frac{3}{4}\underbrace{\sin 4\pi}_{0}\right) - \left(-\frac{0}{2} - \frac{3}{4}\underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right] + \left[\left(\underbrace{\sin^2 2\pi}_{0} - 2\underbrace{\sin 2\pi}_{0}\right) - \left(\underbrace{\sin^2 0}_{0} - 2\underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right] +$$

$$+ \left(\frac{2}{3}\underbrace{\cos^3 2\pi}_{1} - \frac{2}{3}\underbrace{\cos^3 0}_{1}\right) = \underline{\underline{-\pi}}$$



2. způsob

Ověříme splnění podmínek Greenovy věty

- křivka λ je kladně orientovaná (**NENÍ** – před dvojným integrálem bude znaménko **MÍNUS**)
  jednoduchá (**sama sebe neprotíná**)
  uzavřená (**JE**) křivka a **JE** jedinou hranicí ŠEDÉ oblasti Ω
- funkce $\vec{f}\Big((P(x,y), Q(x,y)\Big)$ **MÁ** na této oblasti ohraničené křivkou λ **spojité** obě složky
- parciální derivace $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ **jsou spojité** na oblasti ohraničené křivkou λ

Podmínky pro použití Greenovy věty jsou splněny, proto ji můžeme použít:

$$\oint_\lambda \left[y\,\vec{i} + (x-y)^2\,\vec{j}\right]\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\iint_\Omega \left(\frac{\partial (x-y)^2}{\partial x} - \frac{\partial\,(y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Omega [2(x-y).1 - 1]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Budeme tedy počítat dvojný integrál

$$\mathcal{I} = -\iint_\Omega (2x - 2y - 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega (1 - 2x + 2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Proto pomocí rovnoběžek s některou osou stanovíme meze pro jednotlivé proměnné:

Buď s $\boldsymbol{y}\uparrow$ $\begin{gathered} 0 \le x \le 2 \\ -\sqrt{1-(x-1)^2} \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2} \\ -\sqrt{2x-x^2} \le y \le \sqrt{2x-x^2} \end{gathered}$; s $\boldsymbol{x}\rightarrow$ $\begin{gathered} 1-\sqrt{1-y^2} \le x \le 1+\sqrt{1-y^2} \\ -1 \le y \le 1 \end{gathered}$

nebo transformujeme do polárních souřadnic:

$$\left(r^2\cos^2 t - 2r\cos t + 1\right) + r^2\sin^2 t = 1$$
$$r \cdot (r - 2\cos t) = 0$$

$$x = r\cos t \qquad r \in \langle 0\,;\ 2\cos t\rangle$$
$$y = r\sin t \qquad t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right\rangle$$
$$|\,J\,| = r$$

nebo **raději** transformujeme do **posunutých** polárních souřadnic:

$$x = 1 + r\cos t \qquad r \in \langle 0\,;\ 1\rangle$$
$$y = 0 + r\sin t \qquad t \in \langle 0\,;2\pi\rangle$$
$$|\,J\,| = r$$

Buď

$$\oint_\lambda \left[y\,\vec{i} + (x-y)^2\,\vec{j}\right]\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_\Omega (1-2x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{y\uparrow}{=} \int_0^2 \left[\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} (1-2x+2y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 \left[y - 2xy + 2\,\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \left\langle -\sqrt{2x-x^2}\,;\ \sqrt{2x-x^2}\right\rangle$, proto

$$= \int_0^2 \left[\left(\sqrt{2x-x^2} - 2x\sqrt{2x-x^2} + 2x - x^2\right) - \left(-\sqrt{2x-x^2} + 2x\sqrt{2x-x^2} + 2x - x^2\right)\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 \left[2\sqrt{1-1+2x-x^2} - 4x\sqrt{1-(1-x)^2}\right]\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{1-(1-x)^2}\,(2-4x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\left|\begin{aligned} (1-x) &= \sin z \\ 1-\sin z &= x \\ -\cos z\,\mathrm{d}z &= \mathrm{d}x \end{aligned}\right| \quad \begin{array}{c|c} x & z \\ \hline 2 & -\frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

nebo subst. $\sqrt{\dfrac{2-x}{x}} = z$; pro $x > 0$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 z}}_{\sqrt{\cos^2 z}}\left[2 - 4(1-\sin z)\right]\cos z\,\mathrm{d}z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\underbrace{\cos z}_{>0}|\,(4\sin z - 2)\cos z\,\mathrm{d}z =$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z\,\underline{\sin z\,\mathrm{d}z} - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z\,\mathrm{d}z \overset{viz}{=} -4\int_{z=-\frac{\pi}{2}}^{z=\frac{\pi}{2}} v^2\,\mathrm{d}v - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2z}{2}\,\mathrm{d}z =$$

$$= -4\left[\frac{\cos^3 z}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[z + \frac{1}{2}\sin 2z\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \left\langle -\frac{\pi}{2}\,;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$, proto

$$= -\frac{4}{3}\left[\underbrace{\cos^3\frac{\pi}{2}}_{0} - \underbrace{\cos^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{0}\right] - \left\{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\sin\pi}_{0}\right) - \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\sin(-\pi)}_{0}\right]\right\} = \underline{\underline{-\pi}}$$

nebo

$$\oint_{\lambda}\left[y\,\vec{i} + (x-y)^2\,\vec{j}\right]\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{\Omega}(1-2x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{0}^{2\cos t}(1-2r\cos t+2r\sin t)\underbrace{r}_{|J|}\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2} - 2\frac{r^3}{3}\cos t + 2\frac{r^3}{3}\sin t\right]_0^{2\cos t}\mathrm{d}t =$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0\,;\ 2\cos t\rangle$, proto

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\frac{1}{2}(2\cos t)^2 - \frac{2}{3}(2\cos t)^3\cos t + \frac{2}{3}(2\cos t)^3\sin t +\right] - [0]\right\}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2 t - \frac{16}{3}\underbrace{\cos^4 t}_{(\cos^2 t)^2}\right)\mathrm{d}t - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{16}{3}\cos^3 t\ \underline{(-\sin t)\,\mathrm{d}t} \overset{viz}{=}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[(1+\cos 2t) - \frac{4}{3}(1+\cos 2t)^2\right]\mathrm{d}t - \frac{16}{3}\int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} v^2\,\mathrm{d}v =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t - \frac{4}{3} - \frac{8}{3}\cos 2t - \frac{4}{3}\cos^2 2t\right)\mathrm{d}t - \frac{16}{3}\left[\frac{v^3}{3}\right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[t + \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{4}{3}t - \frac{4}{3}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3}(1+\cos 4t)\,\mathrm{d}t - \frac{16}{9}\left[\cos^3 t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[t + \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{4}{3}t - \frac{4}{3}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}\sin 4t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{16}{9}\left[\cos^3 t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\left[t + \frac{5}{6}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 4t + \frac{16}{9}\cos^3 t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}\,;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$, proto

$$= -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\underbrace{\sin\pi}_{0} + \frac{1}{3}\underbrace{\sin 2\pi}_{0} + \frac{16}{9}\underbrace{\cos^3\frac{\pi}{2}}_{0}\right) + \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\underbrace{\sin -\pi}_{0} + \frac{1}{3}\underbrace{\sin -2\pi}_{0} + \frac{16}{9}\underbrace{\cos^3\frac{-\pi}{2}}_{0}\right) =$$

$$= \underline{\underline{-\pi}}$$

raději

$$\oint_\lambda \left[y\,\vec{i} + (x-y)^2\,\vec{j}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_\Omega (1 - 2x + 2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \left[1 - 2(1 + r\cos t) + 2r\sin t\right] \underbrace{r}_{|J|}\,\mathrm{d}r \right\} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \left(2r^2\sin t - r - 2r^2\cos t\right)\mathrm{d}r \right\} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2\frac{r^3}{3}\sin t - \frac{r^2}{2} - 2\frac{r^3}{3}\cos t\right]_0^1 \mathrm{d}t =$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0\,;\,1\rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cos t\right) - (0)\right] \mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{3}\cos t - \frac{1}{2}t - \frac{2}{3}\sin t\right]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$, proto

$$= \left(-\frac{2}{3}\underbrace{\cos 2\pi}_{1} - \frac{2\pi}{2} - \frac{2}{3}\underbrace{\sin 2\pi}_{0}\right) - \left(-\frac{2}{3}\underbrace{\cos 2\pi}_{1} - \frac{0}{2} - \frac{2}{3}\underbrace{\sin 0}_{0}\right) = \underline{\underline{-\pi}}$$

2. Greenovou větou (pokud to lze) určete cirkulaci:

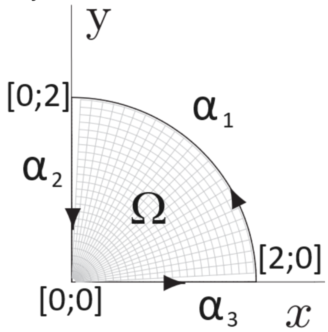
$\oint\limits_{\alpha} \left[xy\,\vec{i} + (x^2+2x)\,\vec{j} \right] \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ kde **kladně** orientovaná **uzavřená** křivka α je složena ze tří částí, pro které platí: $x \geq 0\,, y \geq 0$

$/ \; x \in \mathbb{R}\;;\; y \in \mathbb{R} \; /$

$\alpha_1 : \quad x^2 + y^2 = 4$

$\alpha_2 : \quad x = 0$

$\alpha_3 : \quad y = 0$



Ověříme splnění podmínek

- křivka α je kladně orientovaná (**JE**) jednoduchá (**sama sebe neprotíná**) uzavřená (**JE**) křivka a **JE** jedinou hranicí VYŠRAFOVANÉ oblasti Ω
- funkce $\vec{f}\Big((P(x,y), Q(x,y)\Big)$ **MÁ** na této oblasti ohraničené křivkou α **spojité** obě složky
- parciální derivace $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ **jsou spojité** na oblasti ohraničené křivkou α

Podmínky pro použití Greenovy věty jsou splněny, proto ji můžeme použít:

$$\oint\limits_{\alpha} \left[xy\,\vec{i} + (x^2+2x)\,\vec{j} \right] \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial (x^2+2x)}{\partial x} - \frac{\partial (xy)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} \left[(2x+2) - (x) \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Budeme tedy počítat dvojný integrál

$$\mathcal{A} = \iint\limits_{\Omega} (x+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Proto pomocí rovnoběžek s některou osou stanovíme meze pro jednotlivé proměnné:

Buď s osou $\boldsymbol{y} \uparrow$ $\quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \end{array}$ s osou $\boldsymbol{x} \rightarrow$ $\quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \\ 0 \leq y \leq 2 \end{array}$

nebo transformujeme do polárních souřadnic: $\begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ |J| = r \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} r \in \langle 0\,;\,2 \rangle \\ t \in \left\langle 0\,;\,\frac{\pi}{2} \right\rangle \end{array}$

BUĎ s osou $\boldsymbol{y} \uparrow$ $\quad \mathcal{A} = \iint\limits_{\Omega} (x+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left[\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+2)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x =$

$$= \int\limits_0^2 \left[(x+2) \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (x+2)\,\Big[y \Big]_0^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle 0\,;\,\sqrt{4-x^2} \,\rangle$, proto

$$= \int_0^2 (x+2)\left[\sqrt{4-x^2}-0\right] dx = \int_0^2 x\cdot\sqrt{4-x^2}\, dx + \int_0^2 2\cdot\sqrt{4-x^2}\, dx =$$

$$\left|\begin{aligned} 4-x^2 &= u \\ -2x\, dx &= du \\ dx &= \frac{-du}{2x} \end{aligned}\right| \quad \left|\begin{aligned} x &= 2\sin v \\ dx &= 2\cos v\, dv \\ \arcsin\frac{x}{2} &= v \end{aligned}\right|$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} x\cdot\sqrt{u}\cdot\frac{-du}{2x} + 2\int_{x=0}^{x=2} \sqrt{\underbrace{4-(2\sin v)^2}_{4\cos^2 v\ ;\ \Omega:\cos v>0}}\cdot 2\cos v\, dv =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=2} u^{\frac{1}{2}}\, du + 2\int_{x=0}^{x=2} 2\cos v\cdot 2\cos v\, dv = -\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=2} + 8\int_{x=0}^{x=2}\cos^2 v\, dv \overset{viz}{=}$$

$$-\frac{1}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=2} + 4\int_{x=0}^{x=2} dv + 4\int_{x=0}^{x=2}\cos\underbrace{2v}_{w}\, dv = -\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3\right]_0^2 + 4\left[v\right]_{x=0}^{x=2} + 2\left[\sin 2v\right]_{x=0}^{x=2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3\right]_0^2 + 4\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^2 + 2\left[\sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $x \in \langle -2\ ;\ 2\rangle$, tedy i pro $x \in \langle 0\ ;\ 2\rangle$, proto

$$= -\frac{1}{3}(0-8) + 4\left(\underbrace{\arcsin\frac{2}{2}}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arcsin\frac{0}{2}}_{0}\right) + 2\left[\underbrace{\sin\left(2\arcsin\frac{2}{2}\right)}_{0} - \underbrace{\sin\left(2\arcsin\frac{0}{2}\right)}_{0}\right] = \underline{\underline{\frac{8}{3}+2\pi}}$$

NEBO $\quad \mathcal{A} = \iint_\Omega (x+2)\, dx\, dy = \int_0^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\cos t+2)\underbrace{r}_{|J|}\, dt\right] dr =$

$$= \int_0^2\left[r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\, dt\right] dr + \int_0^2\left[2r\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\right] dr = \int_0^2 r^2\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr + \int_0^2 2r\left[t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\rangle$, proto

$$= \int_0^2 r^2\left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - \underbrace{\sin 0}_{0}\right) dr + \int_0^2 2r\left(\frac{\pi}{2}-0\right) dr = \int_0^2 r^2\, dr - \pi\int_0^2 r\, dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 + \pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 =$$

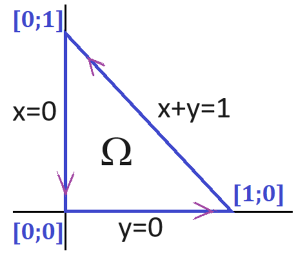
primitivní funkce jsou spojité pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0\ ;\ 2\rangle$, proto

$$= \left[\frac{2^3}{3}-0\right] + \pi\left[\frac{2^2}{2}-0\right] = \underline{\underline{\frac{8}{3}+2\pi}}$$

3. Greenovou větou (pokud to lze) určete cirkulaci:

$\oint\limits_{\beta} \left[(x^2+y^2)\,\vec{\imath} + (x^2-y^2)\,\vec{\jmath}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde křivka β je **kladně** orientovaný obvod ΔABC o vrcholech $A=[0\,;0]$, $B=[1\,;0]$, $C=[0\,;1]$.

/ $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ /



Ověříme splnění podmínek

- křivka β je kladně orientovaná (**JE**) jednoduchá (**sama sebe neprotíná**) uzavřená (**JE**) křivka a **JE** jedinou hranicí oblasti Ω
- funkce $\vec{f}\Big((P(x,y), Q(x,y)\Big)$ **MÁ** na této oblasti ohraničené křivkou β **spojité** obě složky
- parciální derivace $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ **jsou spojité** na oblasti ohraničené křivkou β

Podmínky pro použití Greenovy věty jsou splněny, proto ji můžeme použít: [3]

$$\oint\limits_{\beta} \left[(x^2+y^2)\,\vec{\imath} + (x^2-y^2)\,\vec{\jmath}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} [(2x-2y)]\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Budeme tedy počítat dvojný integrál

$$\mathcal{B} = \iint\limits_{\Omega} (2x-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Proto pomocí rovnoběžek například s osou y stanovíme meze pro jednotlivé proměnné:

$$\uparrow \qquad \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{array} \qquad \mathcal{B} = \iint\limits_{\Omega} (2x-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{1-x} (2x-2y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[2xy - 2\cdot\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle\, 0\,;\ 1-x\,\rangle$, proto

$$= \int\limits_0^1 \left\{\left[2x(1-x) - 2\cdot\frac{(1-x)^2}{2}\right] - 0\right\} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(2x - 2x^2 - 1 + 2x - x^2\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(4x - 3x^2 - 1\right) \mathrm{d}x = \left[4\frac{x^2}{2} - 3\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle\, 0\,;\ 1\,\rangle$, proto

$$= (2-1-1) - (0) = \underline{\underline{0}}$$

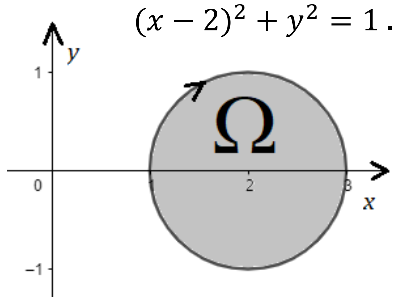
[3] Stejný příklad řešený klasicky pomocí tří křivkových integrálů (β je po částech hladká křivka) je na straně 7 dokumentu `KrivkIntV.pdf`

4. Greenovou větou (pokud to lze) určete cirkulaci:

$$\oint\limits_{\varphi} \left[\frac{-1}{x^2}\,\vec{i} + 2x\,\vec{j} \right] \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

kde **záporně** orientovaná **uzavřená** křivka φ je kružnice $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

$/\ x \neq 0\ ;\ y \in \mathbb{R}\ /$



Ověříme splnění podmínek

- křivka φ je kladně orientovaná (**NENÍ** – před dvojným integrálem bude znaménko **MÍNUS**)
  jednoduchá (**sama sebe neprotíná**)
  uzavřená (**JE**) křivka a **JE** jedinou hranicí ŠEDÉ oblasti Ω
- funkce $\vec{f}\left((P(x,y), Q(x,y)\right)$ **MÁ** na této oblasti ohraničené křivkou φ **spojité** obě složky
- parciální derivace $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ **jsou spojité** na oblasti ohraničené křivkou φ

Podmínky pro použití Greenovy věty jsou splněny, proto ji můžeme použít:

$$\oint\limits_{\varphi} \left[\frac{-1}{x^2}\,\vec{i} + 2x\,\vec{j} \right] \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial(2x)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint\limits_{\Omega} 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

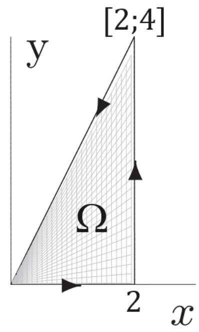
Budeme tedy počítat dvojný integrál

$$\mathcal{F} = -2 \underbrace{\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{plošný obsah oblasti } \Omega} = -2\left(\pi r^2\right) = \underline{\underline{-2\pi}}$$

5. Greenovou větou (pokud to lze) určete cirkulaci:

$\oint\limits_{\gamma} \left[(y^2 - 3y)\,\vec{i} + xy\,\vec{j} \right] \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ kde **kladně** orientovaná **uzavřená** křivka γ je na obrázku:

/ $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ /



Ověříme splnění podmínek

- křivka γ je kladně orientovaná (**JE**) jednoduchá (**sama sebe neprotíná**) uzavřená (**JE**) křivka a **JE** jedinou hranicí VYŠRAFOVANÉ oblasti Ω
- funkce $\vec{f}\Big((P(x,y), Q(x,y)\Big)$ **MÁ** na této oblasti ohraničené křivkou γ **spojité** obě složky
- parciální derivace $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ **jsou spojité** na oblasti ohraničené křivkou γ

Podmínky pro použití Greenovy věty jsou splněny, proto ji můžeme použít:

$$\oint\limits_{\gamma} \left[(y^2 - 3y)\,\vec{i} + xy\,\vec{j} \right] \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2 - 3y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} [(y) - (2y - 3)]\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Budeme tedy počítat dvojný integrál

$$\mathcal{C} = \iint\limits_{\Omega} (3 - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Proto pomocí rovnoběžek s některou osou stanovíme meze pro jednotlivé proměnné:

Buď s osou $\boldsymbol{y} \uparrow$ $\quad \begin{array}{l} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2x \end{array}$ **nebo** s osou $\boldsymbol{x} \rightarrow$ $\quad \begin{array}{l} \frac{y}{2} \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 \end{array}$

BUĎ $$\mathcal{C} = \iint\limits_{\Omega} (3 - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left[\int_0^{2x} (3 - y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_0^2 \left[3y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{2x} \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle\, 0 \,;\ 2x \,\rangle$, proto

$$= \int_0^2 \left\{ \left[3(2x) - \frac{(2x)^2}{2} \right] - (0 - 0) \right\} \mathrm{d}x = \int_0^2 (6x - 2x^2)\,\mathrm{d}x = \left[6 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^2 =$$

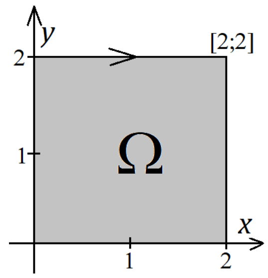
primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle\, 0 \,;\ 2 \,\rangle$, proto

$$= \left(6 \cdot \frac{2^2}{2} - 2 \cdot \frac{2^3}{3} \right) - (0 - 0) = \underline{\underline{\frac{20}{3}}}$$

6. Greenovou větou (pokud to lze) určete cirkulaci:

$\oint\limits_{\eta} \left[(1-x^2)\,\vec{i} + x(1+y^2)\,\vec{j}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ kde **záporně** orientovaná **uzavřená** křivka η je na obrázku:

$/\ x \in \mathbb{R}\ ;\ y \in \mathbb{R}\ /$



Ověříme splnění podmínek

- křivka η je kladně orientovaná (**NENÍ** – před dvojným integrálem bude znaménko **MÍNUS**)
  jednoduchá (**sama sebe neprotíná**)
  uzavřená (**JE**) křivka a **JE** jedinou hranicí ŠEDÉ oblasti Ω
- funkce $\vec{f}\left((P(x,y), Q(x,y)\right)$ **MÁ** na této oblasti ohraničené křivkou η **spojité** obě složky
- parciální derivace $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ **jsou spojité** na oblasti ohraničené křivkou η

Podmínky pro použití Greenovy věty jsou splněny, proto ji můžeme použít:

$$\oint\limits_{\eta} \left[(1-x^2)\,\vec{i} + x(1+y^2)\,\vec{j}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial(x+xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(1-x^2)}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint\limits_{\Omega} \left[(1+y^2)-(0)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Budeme tedy počítat dvojný integrál

$$\mathcal{H} = -\iint\limits_{\Omega} \left(1+y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné: $\begin{array}{c} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{array}$

$$\mathcal{H} = -\iint\limits_{\Omega} \left(1+y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_0^2 \left[\int_0^2 \left(1+y^2\right) \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = -\int_0^2 \left[y + \frac{y^3}{3}\right]_0^2 \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle 0\ ;\ 2 \rangle$, proto

$$= -\int_0^2 \left[\left(2+\frac{2^3}{3}\right) - (0+0)\right] \mathrm{d}x = -\frac{6+8}{3}\int_0^2 \mathrm{d}x = -\frac{14}{3}\left[x\right]_0^2 =$$

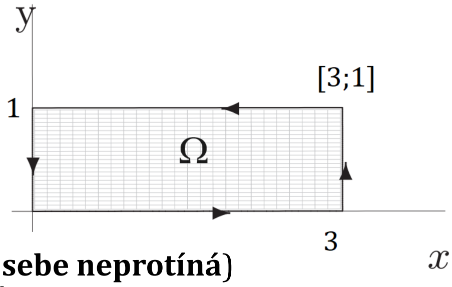
primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle 0\ ;\ 2 \rangle$, proto

$$= -\frac{14}{3}(2-0) = \underline{\underline{-\frac{28}{3}}}$$

7. Greenovou větou (pokud to lze) určete cirkulaci:

$$\oint_\delta \left[\frac{y^3}{3}\vec{i} + (x^2+y^2)\vec{j}\right]\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$ kde **kladně** orientovaná **uzavřená** křivka δ je na obrázku:

/ $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ /



Ověříme splnění podmínek

- křivka δ je kladně orientovaná (**JE**) jednoduchá (**sama sebe neprotíná**) uzavřená (**JE**) křivka a **JE** jedinou hranicí VYŠRAFOVANÉ oblasti Ω
- funkce $\vec{f}\left((P(x,y),Q(x,y)\right)$ **MÁ** na této oblasti ohraničené křivkou δ **spojité** obě složky
- parciální derivace $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ **jsou spojité** na oblasti ohraničené křivkou δ

Podmínky pro použití Greenovy věty jsou splněny, proto ji můžeme použít:

$$\oint_\delta \left[\frac{y^3}{3}\vec{i} + (x^2+y^2)\vec{j}\right]\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\frac{y^3}{3})}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega \left[(2x)-(y^2)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Budeme tedy počítat dvojný integrál

$$\mathcal{D} = \iint_\Omega \left(2x-y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné: $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 1$

$$\mathcal{D} = \iint_\Omega \left(2x-y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 \left[\int_0^1 \left(2x-y^2\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_0^3 \left[2xy - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle 0\,;\,1\rangle$, proto

$$= \int_0^3 \left[\left(2x-\frac{1}{3}\right)-(0-0)\right]\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(2x-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x = \left[2\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\cdot x\right]_0^3 =$$

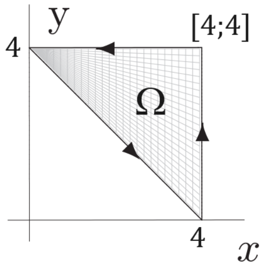
primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle 0\,;\,3\rangle$, proto

$$= (9-1)-(0-0) = \underline{\underline{8}}$$

8. Greenovou větou (pokud to lze) určete cirkulaci:

$\oint\limits_{\varepsilon} \left[y^2\, \vec{i} + (x+y)^2\, \vec{j} \right] \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ kde **kladně** orientovaná **uzavřená** křivka ε je na obrázku:

/ $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ /



Ověříme splnění podmínek

- křivka ε je kladně orientovaná (**JE**) jednoduchá (**sama sebe neprotíná**) uzavřená (**JE**) křivka a **JE** jedinou hranicí VYŠRAFOVANÉ oblasti Ω
- funkce $\vec{f}\Big((P(x,y), Q(x,y)\Big)$ **MÁ** na této oblasti ohraničené křivkou ε **spojité** obě složky
- parciální derivace $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ **jsou spojité** na oblasti ohraničené křivkou ε

Podmínky pro použití Greenovy věty jsou splněny, proto ji můžeme použít:

$$\oint\limits_{\varepsilon} \left[y^2\, \vec{i} + (x+y)^2\, \vec{j} \right] \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial \left[(x+y)^2\right]}{\partial x} - \frac{\partial (y^2)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} \left[2(x+y)^1 \cdot 1 - (2y) \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Budeme tedy počítat dvojný integrál

$$E = \iint\limits_{\Omega} (2x)\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Proto pomocí rovnoběžek s některou osou stanovíme meze pro jednotlivé proměnné:

buď s osou $\boldsymbol{y} \uparrow$ $\quad 0 \le x \le 4$, $\; 4 - x \le y \le 4$ $\qquad$ **nebo** s osou $\boldsymbol{x} \rightarrow$ $\quad 4 - y \le x \le 4$, $\; 0 \le y \le 4$

BUĎ $\uparrow$ $\quad E = \iint\limits_{\Omega} (2x)\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^4 \left[\int\limits_{4-x}^{4} (2x)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int\limits_0^4 \Big[(2x) y \Big]_{4-x}^{4} \mathrm{d}x =$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle 4 - x \,;\, 4 \rangle$, proto

$$= \int\limits_0^4 \left[(2x) \cdot 4 - (2x) \cdot (4 - x) \right] \mathrm{d}x = \int\limits_0^4 \left(2x^2 \right) \mathrm{d}x = \left[2 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^4 =$$

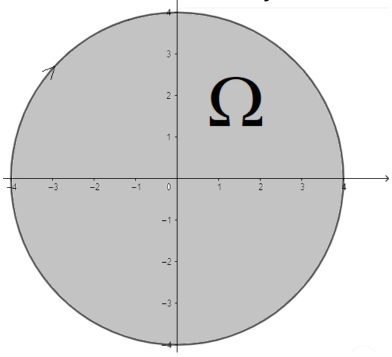
primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle 0 \,;\, 4 \rangle$, proto

$$= 2 \cdot \frac{4^3}{3} - 0 = \underline{\underline{\frac{128}{3}}}$$

9. Greenovou větou (pokud to lze) určete cirkulaci:

$\oint\limits_{\chi} \left[-y\,\vec{i} + x\,\vec{j}\right] \cdot \,\mathrm{d}\vec{r}$ kde **záporně** orientovaná **uzavřená** křivka χ je kružnice $x^2 + y^2 = 16$.

/ $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ /



Ověříme splnění podmínek

- křivka χ je kladně orientovaná (**NENÍ** – před dvojným integrálem bude znaménko **MÍNUS**)
  jednoduchá (**sama sebe neprotíná**)
  uzavřená (**JE**) křivka a **JE** jedinou hranicí ŠEDÉ oblasti Ω
- funkce $\vec{f}\left((P(x,y), Q(x,y)\right)$ **MÁ** na této oblasti ohraničené křivkou χ **spojité** obě složky
- parciální derivace $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ **jsou spojité** na oblasti ohraničené křivkou χ

Podmínky pro použití Greenovy věty jsou splněny, proto ji můžeme použít:

$$\oint\limits_{\chi} \left[-y\,\vec{i} + x\,\vec{j}\right] \cdot \,\mathrm{d}\vec{r} = -\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial\,(-y)}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint\limits_{\Omega} 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Budeme tedy počítat dvojný integrál

$$\mathcal{G} = -2 \underbrace{\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{plošný obsah oblasti }\Omega} = -2\left(\pi r^2\right) = \underline{\underline{-32\pi}}$$