

1. Vypočítejte cirkulaci (křivkový integrál druhého druhu přes uzavřenou křivku):

$$\oint_{\gamma} (-x^2 y \vec{i} + xy^2 \vec{j}) \cdot d\vec{r} \quad \text{kde uzavřená křivka } \gamma \text{ je kladně orientovaná kružnice,}$$

se středem $S=[0;0]$ a poloměrem $r=2$.

$x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

Varianta – křivkový integrál

Napišeme parametrické rovnice křivky γ , včetně prvních derivací:

$$x = 2 \cos t \quad x' = -2 \sin t$$

$$y = 2 \sin t \quad y' = 2 \cos t$$

$$t \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

$$\oint_{\gamma} (-x^2 y \vec{i} + xy^2 \vec{j}) \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-(2 \cos t)^2 \cdot 2 \sin t \vec{i} + 2 \cos t \cdot (2 \sin t)^2 \vec{j} \right] \cdot (-2 \sin t \vec{i} + 2 \cos t \vec{j}) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (16 \cos^2 t \sin^2 t + 16 \cos^2 t \sin^2 t) dt = 8 \int_0^{2\pi} 4 \sin^2 t \cos^2 t dt = 8 \int_0^{2\pi} (2 \sin t \cos t)^2 dt =$$

$$= 8 \int_0^{2\pi} (\sin 2t)^2 dt = \frac{1 = \cos^2 2t + \sin^2 2t}{\cos 4t = \cos^2 2t - \sin^2 2t \mid \cdot (-1)} = 4 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt =$$

$1 - \cos 4t = 2 \sin^2 2t \Rightarrow (\sin 2t)^2 = \frac{1 - \cos 4t}{2}$

$$= 4 \left[t - \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{2\pi} = [4t - \sin 4t]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, proto

$$= \left(8\pi - \frac{\sin 8\pi}{0} \right) - \left(0 - \frac{\sin 0}{0} \right) = \underline{\underline{8\pi}}$$

Varianta – Greenova věta

Jsou-li splněny podmínky **Věty 3.2.** (tzv. **Greenova věta**) na str. 17 skript¹, platí

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\gamma} \vec{f}(P(x,y), Q(x,y)) \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma} P(x,y) dx + Q(x,y) dy$$

Ověříme podmínky

- křivka γ je kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka a je jedinou hranicí oblasti Ω
- funkce $\vec{f}((P(x,y), Q(x,y)))$ je na této oblasti ohraničené křivkou γ **spojitá**, kde
 $P(x,y) = -x^2 y$, $Q(x,y) = xy^2$

¹ DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80-7204-452-4.

- parciální derivace $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ jsou spojité na oblasti ohraničené křivkou γ .

$$\text{Pak } \oint_{\gamma} (-x^2 y \vec{i} + xy^2 \vec{j}) \cdot d\vec{r} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} [y^2 - (-x^2)] dx dy =$$

Zavedeme polární souřadnice

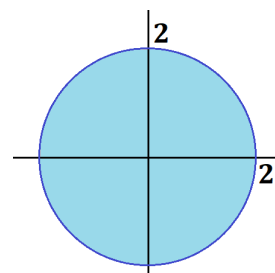
$$x = \varrho \cos \varphi$$

$$y = \varrho \sin \varphi$$

$$|J| = \varrho$$

$$\varrho \in \langle 0; 2 \rangle$$

$$\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$$



$$= \iint_{\Omega} (y^2 + x^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 (\varrho^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2 \cos^2 \varphi) \cdot \underbrace{\varrho}_{|J|} d\varrho \right] d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_1 \int_0^2 \varrho^2 \cdot \varrho d\varrho \right] d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^2 d\varphi =$$

primitivní funkce je spojitá pro $\varrho \in \mathbb{R}$, tedy i pro $\varrho \in \langle 0; 2 \rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2^4}{4} - 0 \right) d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4 \left[\varphi \right]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $\varphi \in \mathbb{R}$, tedy i pro $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$, proto

$$= 4(2\pi - 0) = \underline{\underline{8\pi}}$$

2. Vypočítejte křivkové integrály

$$\mathcal{J}_{\gamma} = \int_{\gamma} (x \vec{i} + y \vec{j}) \cdot d\vec{r} \quad \mathcal{J}_{\kappa} = \int_{\kappa} (x \vec{i} + y \vec{j}) \cdot d\vec{r}$$

kde křivka γ je úsečka
a křivka κ libovolná parabola.

$x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

Obě křivky začínají v bodě $A = [0; 1]$ a končí v bodě $B = [3; -4]$.

2.1. Úsečka

Napišeme parametrické rovnice úsečky γ , včetně prvních derivací:

$$x = 3t \quad x' = 3$$

$$y = 1 - 5t \quad y' = -5$$

$$t \in \langle 0; 1 \rangle$$

$$\mathcal{J}_{\gamma} = \int_{\gamma} (x \vec{i} + y \vec{j}) \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_0^1 [3t \vec{i} + (1 - 5t) \vec{j}] \cdot (3 \vec{i} - 5 \vec{j}) dt = \int_0^1 (9t - 5 + 25t) dt = \int_0^1 (34t - 5) dt = \left[\frac{34t^2}{2} - 5t \right]_0^1 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; 1 \rangle$, proto $= (17 - 5) - (0) = \underline{\underline{12}}$

2. 2. Parabola

Napišeme parametrické rovnice paraboly κ , například: $5x^2 + 9y - 9 = 0$

$$\begin{aligned} x &= 3t & x' &= 3 \\ y &= 1 - 5t^2 & y' &= -10t \\ t &\in \langle 0; 1 \rangle \end{aligned}$$

$$J_\kappa = \int_\gamma (x \vec{i} + y \vec{j}) \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_0^1 [3t \vec{i} + (1 - 5t^2) \vec{j}] \cdot (3 \vec{i} - 10t \vec{j}) dt = \int_0^1 (9t - 10t + 50t^3) dt = \int_0^1 (50t^3 - t) dt =$$

$$= \left[\frac{50t^4}{4} - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; 1 \rangle$, proto

$$= \left(\frac{25}{2} - \frac{1}{2} \right) - (0) = \underline{\underline{12}}$$

2. 3. Potenciální pole

Ověříme podmínky podle věty 3. 5. na straně 22 skript¹

- křivka γ leží uvnitř jednoduše souvislé (s každou kružnicí/kulovou plochou, která leží v Ω , také celý vnitřek této kružnice/kulové plochy leží v Ω) oblasti Ω : například kruh se středem v počátku a poloměrem $r = 9$, $\Omega : x^2 + y^2 \leq 81$;
- funkce $\vec{f}((P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)))$ je na této oblasti Ω třídy C^1 (všechny složky této vektorové funkce mají (\Rightarrow existují) všechny první parciální derivace v Ω a tyto parc. der. jsou spojité):

$$P(x, y) = x, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad Q(x, y) = y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 1$$
všechny první parciální derivace v Ω existují a jsou spojité;
- platí $\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y}$
což v našem případě platí, protože $0 = 0$.

Pak existuje taková funkce $V(x, y)$ (**potenciál** nebo též **kmenová funkce**) a platí:

$$\int_\gamma \vec{f}(P(x, y), Q(x, y)) \cdot d\vec{r} = \int_A^B P(x, y) dx + Q(x, y) dy = [V(x, y)]_A^B = V(B) - V(A)$$

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$$

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

Budeme hledat kmenovou funkci $V(x, y)$:

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) = y$$

$$V(x, y) = \int y \, dy = \underline{\frac{y^2}{2} + g(x)}$$

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = P(x, y) = x = g'(x)$$

$$g'(x) = x$$

$$g(x) = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$V(x, y) = \underline{\frac{y^2}{2} + \overbrace{\left(\frac{x^2}{2} + c\right)}^{g(x)}}$$

Tedy:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{f}(x, y) \cdot d\vec{r} &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c \right]_{[0;1]}^{[3;-4]} = \left[\frac{3^2}{2} + \frac{(-4)^2}{2} + c \right] - \left(\frac{0^2}{2} + \frac{1^2}{2} + c \right) = \\ &= \frac{9}{2} + 8 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{12}} \end{aligned}$$

3. Vypočítejte křivkový integrál v potenciálním poli

$$\int_{\gamma} \left(\frac{y}{x^2} \vec{i} - \frac{1}{x} \vec{j} \right) \cdot d\vec{r}$$

kde křivka γ začíná v bodě $A = [2; 1]$, končí v bodě $B = [1; 2]$
a neprotíná osu y .

$/x \neq 0; y \in \mathbb{R}/$

Ověříme, zda funkce $\vec{f}(x, y)$ popisuje potenciální pole:

- křivka γ leží uvnitř jednoduše souvislé oblasti (například kruh se středem v bodu B a polo-
měrem $r = \sqrt{3}$) $\Omega : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 3$;
- $P(x, y) = \frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-2y}{x^3}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$, $Q(x, y) = \frac{-1}{x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$
všechny první parciální derivace v Ω existují a jsou zde spojité;
- $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Kmenová funkce:

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) = \frac{-1}{x}$$

$$V(x, y) = - \int \frac{1}{x} dy = \underline{\underline{\frac{-y}{x} + g(x)}}$$

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = P(x, y) = \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^2} + g'(x)$$

$$g'(x) = 0$$

$$g(x) = c$$

$$V(x, y) = \underline{\underline{\frac{-y}{x} + \widetilde{c}}}$$

Tedy:
$$\int_{\gamma} \vec{f}(x, y) \cdot d\vec{r} = \left[\frac{-y}{x} \right]_{[2;1]}^{[1;2]} = \left(\frac{-2}{1} \right) - \left(\frac{-1}{2} \right) = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$$

4. Vypočítejte křivkový integrál v potenciálním poli

$$\int_{\gamma} \left((x + yz) \vec{i} + (y + xz) \vec{j} + (z + xy) \vec{k} \right) \cdot d\vec{r} \quad \text{kde křivka } \gamma \text{ začíná v bodě } A = [0; 0; 0],$$

a končí v bodě $B = [1; 2; 3]$.

$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$

Ověříme, zda funkce $\vec{f}(x, y, z)$ popisuje potenciální pole:

- křivka γ leží uvnitř jednoduše souvislé oblasti (například koule se středem v počátku a poloměrem $r = 8$) $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 64$;

- $P(x, y, z) = x + yz, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = y,$

$$Q(x, y, z) = y + xz, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = z, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = x,$$

$$R(x, y, z) = z + xy, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 1,$$

všechny první parciální derivace v Ω existují a jsou zde spojité;

- $\frac{\partial P}{\partial y} = z = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = y = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = x = \frac{\partial R}{\partial y}$

Kmenová funkce:

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = Q(x, y, z) = y + xz$$

$$V(x, y, z) = \int (y + xz) dy = \frac{y^2}{2} + xyz + g(x, z)$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = P(x, y, z) = x + yz = yz + \frac{\partial g(x, z)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g(x, z)}{\partial x} = x$$

$$g(x, z) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + h(z)$$

$$V(x, y, z) = \frac{y^2}{2} + xyz + \left[\frac{x^2}{2} + h(z) \right]$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = R(x, y, z) = z + xy = xy + h'(z)$$

$$h'(z) = z$$

$$h(z) = \int z dz = \frac{z^2}{2} + c$$

$$V(x, y, z) = \frac{y^2}{2} + xyz + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{z^2}{2} + c \right)$$

Tedy: $\int_{\gamma} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + xyz \right]_{[0;0;0]}^{[1;2;3]} = \left(\frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{2} + 1 \cdot 2 \cdot 3 \right) - (0) = \underline{\underline{13}}$

5. Vypočítejte křivkový integrál v potenciálním poli

$$\int_{\gamma} \left(z \vec{i} + (y^2 + z) \vec{j} + (x + y) \vec{k} \right) \cdot d\vec{r}$$

$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$

kde křivka γ začíná v bodě $A = [0; 3; 1]$,
a končí v bodě $B = [2; 6; 0]$.

Ověříme, zda funkce $\vec{f}(x, y, z)$ popisuje potenciální pole:

- křivka γ leží uvnitř jednoduše souvislé oblasti (například koule se středem v počátku a poloměrem $r = 7$) $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 49$;

$P(x, y, z) = z$	$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial P}{\partial z} = 1$
$Q(x, y, z) = y^2 + z$	$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2y$	$\frac{\partial Q}{\partial z} = 1$
$R(x, y, z) = x + y$	$\frac{\partial R}{\partial x} = 1$	$\frac{\partial R}{\partial y} = 1$	$\frac{\partial R}{\partial z} = 0$

všechny první parciální derivace v Ω existují a jsou zde spojité;

$$\bullet \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 1 = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 1 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Kmenová funkce:

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = P(x, y, z) = z$$

$$V(x, y, z) = \int z \, dx = \underline{xz + g(y, z)}$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = R(x, y, z) = x + y = x + \frac{\partial g(y, z)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial g(y, z)}{\partial z} = y$$

$$g(y, z) = \int y \, dz = yz + h(y)$$

$$V(x, y, z) = \underline{xz + [yz + h(y)]}$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = Q(x, y, z) = y^2 + z = z + h'(y)$$

$$h'(y) = y^2$$

$$h(y) = \int y^2 \, dy = \frac{y^3}{3} + c$$

$$V(x, y, z) = \underline{xz + yz + \left(\frac{y^3}{3} + c\right)}$$

$$\text{Tedy: } \int_{\gamma} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = \left[xz + yz + \frac{y^3}{3} \right]_{[0;3;1]}^{[2;6;0]} = \left(2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + \frac{6^3}{3} \right) - \left(0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + \frac{3^3}{3} \right) = \underline{\underline{60}}$$

6. Vypočítejte křivkový integrál v potenciálním poli

$$\int_{\gamma} \left((3x^2y^2 - 2z^4) \vec{i} + 2x^3y \vec{j} - 8xz^3 \vec{k} \right) \cdot d\vec{r}$$

$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$

kde křivka γ začíná v bodě $A = [0; 0; 0]$,
a končí v bodě $B = [1; 1; 1]$.

Ověříme, zda funkce $\vec{f}(x, y, z)$ popisuje potenciální pole:

- křivka γ leží uvnitř jednoduše souvislé oblasti (například koule se středem v počátku a poloměrem $r = 2$) $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$;

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= 3x^2y^2 - 2z^4 & \frac{\partial P}{\partial x} &= 6xy^2 & \frac{\partial P}{\partial y} &= 6x^2y & \frac{\partial P}{\partial z} &= -8z^3 \\ Q(x, y, z) &= 2x^3y & \frac{\partial Q}{\partial x} &= 6x^2y & \frac{\partial Q}{\partial y} &= 2x^3 & \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 \\ R(x, y, z) &= -8xz^3 & \frac{\partial R}{\partial x} &= -8z^3 & \frac{\partial R}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial R}{\partial z} &= -24xz^2 \end{aligned}$$

všechny první parciální derivace v Ω existují a jsou zde spojité;

$$\bullet \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -8z^3 = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Kmenová funkce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} &= Q(x, y, z) = 2x^3y \\ V(x, y, z) &= \int 2x^3y \, dy = \underline{2x^3 \frac{y^2}{2} + g(x, z)} \\ \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} &= P(x, y, z) = 3x^2y^2 - 2z^4 = 3x^2y^2 + \frac{\partial g(x, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial g(x, z)}{\partial x} &= -2z^4 \\ g(x, z) &= \int -2z^4 \, dx = -2xz^4 + h(z) \\ V(x, y, z) &= \underline{x^3y^2 + [-2xz^4 + h(z)]} \\ \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} &= R(x, y, z) = -8xz^3 = -8xz^3 + h'(z) \\ h'(z) &= 0 \\ h(z) &= c \\ V(x, y, z) &= \underline{x^3y^2 - 2xz^4 + (c)} \end{aligned}$$

Tedy:
$$\int_{\gamma} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = \left[x^3y^2 - 2xz^4 \right]_{[0;0;0]}^{[1;1;1]} = (1^3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1^4) - (0) = \underline{\underline{-1}}$$

7. Vypočítejte křivkový integrál v potenciálním poli

$$\int_{\gamma} \left(\left[3x^2 - \frac{y}{(x+z)^2} \right] \vec{i} + \frac{1}{x+z} \vec{j} - \frac{y}{(x+z)^2} \vec{k} \right) \cdot d\vec{r} \text{ kde křivka } \gamma \text{ začíná v bodě } A = [1; 1; 1],$$

a končí v bodě $B = [2; 2; 2]$.

/ $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \neq -x$ /

Ověříme, zda funkce $\vec{f}(x, y, z)$ popisuje potenciální pole:

- křivka γ leží uvnitř jednoduše souvislé oblasti (například koule se středem v bodu B a poloměrem $r = 2$) $\Omega : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 \leq 4$;

$$\bullet \quad P(x, y, z) = 3x^2 - \frac{y}{(x+z)^2} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 6x + \frac{2y}{(x+z)^3} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1}{(x+z)^2} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2y}{(x+z)^3}$$

$$Q(x, y, z) = \frac{1}{x+z} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-1}{(x+y)^2} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{-1}{(x+y)^2}$$

$$R(x, y, z) = -\frac{y}{(x+z)^2} \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{2y}{(x+z)^3} \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{-1}{(x+y)^2} \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{2y}{(x+z)^3}$$

všechny první parciální derivace v Ω existují a jsou zde spojité;

$$\bullet \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1}{(x+z)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2y}{(x+z)^3} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{-1}{(x+y)^2} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Kmenová funkce:

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = Q(x, y, z) = \frac{1}{x+z}$$

$$V(x, y, z) = \int \frac{1}{x+z} dy = \frac{y}{x+z} + g(x, z)$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = R(x, y, z) = -\frac{y}{(x+z)^2} = \frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{\partial g(x, z)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial g(x, z)}{\partial z} = 0$$

$$g(x, z) = h(x)$$

$$V(x, y, z) = \frac{y}{x+z} + [h(x)]$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = P(x, y, z) = 3x^2 - \frac{y}{(x+z)^2} = \frac{-y}{(x+z)^2} + h'(x)$$

$$h'(x) = 3x^2$$

$$h(x) = \int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + c$$

$$V(x, y, z) = \frac{y}{x+z} + (x^3 + c)$$

Tedy:
$$\int_{\gamma} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = \left[\frac{y}{x+z} + x^3 \right]_{[1;1;1]}^{[2;2;2]} = \left(\frac{2}{2+2} + 2^3 \right) - \left(\frac{1}{1+1} + 1^3 \right) = \underline{\underline{7}}$$