FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Křivkový integrál reálné funkce ve vektorovém poli, POTENCIÁL

Studijní materiály

Brno 2020

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

1. Vypočítejte cirkulaci (křivkový integrál druhého druhu přes uzavřenou křivku):

$$\oint_{\gamma} \left(-x^2 y\,\vec{i} + xy^2\,\vec{j}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

kde **uzavřená** křivka γ je kladně orientovaná kružnice, se středem S=[0;0] a poloměrem $r = 2$.

$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}/$

Varianta – křivkový integrál

Napíšeme parametrické rovnice křivky γ, včetně prvních derivací:

$$x = 2\cos t \qquad x' = -2\sin t$$
$$y = 2\sin t \qquad y' = 2\cos t$$
$$t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$$

$$\oint_{\gamma} \left(-x^2 y\,\vec{i} + xy^2\,\vec{j}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-(2\cos t)^2 \cdot 2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\cdot(2\sin t)^2\,\vec{j}\right]\cdot\left(-2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(16\cos^2 t\sin^2 t + 16\cos^2 t\sin^2 t\right)\mathrm{d}t = 8\int_0^{2\pi} 4\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 8\int_0^{2\pi}(2\sin t\cos t)^2\,\mathrm{d}t =$$

$$= 8\int_0^{2\pi}(\sin 2t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{\begin{array}{c} 1 = \cos^2 2t + \sin^2 2t \\ \cos 4t = \cos^2 2t - \sin^2 2t \quad |\cdot(-1) \end{array}}{1 - \cos 4t = 2\sin^2 2t \Longrightarrow (\sin 2t)^2 = \frac{1-\cos 4t}{2}} = 4\int_0^{2\pi}\left(1 - \cos \underbrace{4t}_{4t=w}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= 4\left[t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{2\pi} = \left[4t - \sin 4t\right]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$, proto

$$= \left(8\pi - \underbrace{\sin 8\pi}_{0}\right) - \left(0 - \underbrace{\sin 0}_{0}\right) = \underline{\underline{8\pi}}$$

Varianta – Greenova věta

Jsou-li splněny podmínky **Věty 3.2.** (tzv. **Greenova věta**) na str. 17 skript [1] , platí

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\gamma} \vec{f}\left(P(x,y), Q(x,y)\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \oint_{\gamma} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Ověříme podmínky

- křivka γ je kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka a je jedinou hranicí oblasti Ω
- funkce $\vec{f}\left((P(x,y), Q(x,y)\right)$ je na této oblasti ohraničené křivkou γ **spojitá**, kde $P(x,y) = -x^2 y$, $Q(x,y) = xy^2$

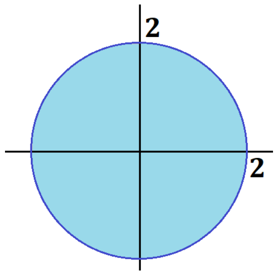
[1] DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80–7204–452–4.

- parciální derivace $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ jsou spojité na oblasti ohraničené křivkou γ.

Pak $\displaystyle\oint_\gamma \left(-x^2y\,\vec{i} + xy^2\,\vec{j}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega \left[y^2-(-x^2)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$

Zavedeme polární souřadnice

$$x = \varrho\cos\varphi$$
$$y = \varrho\sin\varphi$$
$$|\,J\,| = \varrho$$
$$\varrho \in \langle 0;2\rangle$$
$$\varphi \in \langle 0;2\pi)$$



$$= \iint_\Omega \left(y^2+x^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 \left(\varrho^2\sin^2\varphi + \varrho^2\cos^2\varphi\right)\cdot \underbrace{\varrho}_{|J|}\,\mathrm{d}\varrho\right]\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\underbrace{\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)}_{1}\int_0^2 \varrho^2\cdot\varrho\,\mathrm{d}\varrho\right]\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^2 \mathrm{d}\varphi =$$

primitivní funkce je spojitá pro $\varrho \in \mathbb{R}$, tedy i pro $\varrho \in \langle 0\,;\,2\rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{2^4}{4}-0\right)\mathrm{d}\varphi = 4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 4\left[\varphi\right]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $\varphi \in \mathbb{R}$, tedy i pro $\varphi \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$, proto

$$= 4(2\pi - 0) = \underline{\underline{8\pi}}$$

2. Vypočítejte cirkulaci (křivkový integrál druhého druhu přes uzavřenou křivku):

$\displaystyle\oint_\gamma \left(\frac{\vec{i}}{x^2+y^2} + \vec{j}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$ kde **uzavřená** křivka γ je kladně orientovaná kružnice, se středem S=[0;0] a poloměrem $r = 1$.
Jestli to lze, použijte Greenovu větu.

$/x \neq 0 \lor y \neq 0/$

Ověříme podmínky použití Greenovy věty

- křivka γ je kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka a je jedinou hranicí oblasti Ω
  v našem případě **bod** [0;0] $\in \Omega$
- funkce $\vec{f}\left((P(x,y),Q(x,y)\right)$ je na této oblasti ohraničené křivkou γ **spojitá**, kde
  $P(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = 1$
  ovšem v **bodě** [0;0] není složka $P(x,y)$ a tedy ani funkce $\vec{f}$ **definována**, nelze tedy použít Greenovu větu.

Protože však jsou splněny podmínky **Definice 3.1.** (existence křivkového integrálu ve vektorovém poli) na str. 14 skript[1] a funkce $\vec{f}$ je spojitá na orientovaném oblouku γ víme, že

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \oint_\gamma \left(\frac{\vec{i}}{x^2+y^2}+\vec{j}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

existuje! **Napíšeme parametrické rovnice křivky** γ, včetně prvních derivací:

$$x=\cos t \qquad x'=-\sin t$$
$$y=\sin t \qquad y'=\cos t$$
$$t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$$

$$\oint_\gamma \left(\frac{\vec{i}}{x^2+y^2}+\vec{j}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r} =$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\vec{i}}{\underbrace{(\cos t)^2+(\sin t)^2}_{1}}+\vec{j}\right]\cdot(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}\,)\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}(-\sin t+\cos t)\,\mathrm{d}t=\Big[\cos t+\sin t\Big]_0^{2\pi}=$$

primitivní funkce je spojitá pro $t\in\mathbb{R}$, tedy i pro $t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$, proto

$$=\Big(\underbrace{\cos 2\pi}_{1}+\underbrace{\sin 2\pi}_{0}\Big)-\Big(\underbrace{\cos 0}_{1}+\underbrace{\sin 0}_{0}\Big)=\underline{\underline{0}}$$

3. Vypočítejte křivkové integrály

$$\mathcal{J}_\gamma=\int_\gamma\left(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{r} \qquad \mathcal{J}_\kappa=\int_\kappa\left(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

kde křivka γ je úsečka a křivka κ libovolná parabola.

$/x\in\mathbb{R};\ y\in\mathbb{R}/$ Obě křivky začínají v bodě $A=[0\,;1]$ a končí v bodě $B=[3\,;-4]$.

3. 1. Úsečka

Napíšeme parametrické rovnice úsečky γ, včetně prvních derivací:

$$x=3t \qquad x'=3$$
$$y=1-5t \qquad y'=-5$$
$$t\in\langle 0\,;\,1\rangle$$

$$\mathcal{J}_\gamma=\int_\gamma\left(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{r}=$$

$$=\int_0^1\Big[3t\,\vec{i}+(1-5t)\,\vec{j}\Big]\cdot(3\,\vec{i}-5\,\vec{j}\,)\,\mathrm{d}t=\int_0^1(9t-5+25t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1(34t-5)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{34t^2}{2}-5t\right]_0^1=$$

primitivní funkce je spojitá pro $t\in\mathbb{R}$, tedy i pro $t\in\langle 0\,;\,1\rangle$, proto $=(17-5)-(0)=\underline{\underline{12}}$

3. 2. Parabola

Napíšeme parametrické rovnice paraboly κ, například: $5x^2 + 9y - 9 = 0$

$$x = 3t \qquad x' = 3$$
$$y = 1 - 5t^2 \qquad y' = -10t$$
$$t \in \langle 0\,;\,1\rangle$$

$$\mathcal{J}_\kappa = \int_\kappa \left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}\right)\cdot\,\mathrm{d}\vec{r} =$$

$$= \int_0^1 \left[3t\,\vec{i} + (1-5t^2)\,\vec{j}\right]\cdot(3\,\vec{i} - 10t\,\vec{j})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(9t - 10t + 50t^3\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(50t^3 - t\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{50t^4}{4} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 =$$ primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,1\rangle$, proto

$$= \left(\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\right) - (0) = \underline{\underline{12}}$$

3. 3. Potenciální pole

Ověříme podmínky podle **věty 3. 5.** na straně 22 skript [1]

- křivka γ leží uvnitř jednoduše souvislé (*s každou kružnicí/kulovou plochou, která leží v* Ω*, také celý vnitřek této kružnice/kulové plochy leží v* Ω) oblasti Ω: například kruh se středem v počátku a poloměrem $r = 9$, $\quad \Omega : x^2 + y^2 \leq 81$;
- funkce $\vec{f}\left((P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\right)$ je na této oblasti Ω třídy C^1 (*všechny složky této vektorové funkce mají (⇒existují) všechny první parciální derivace v* Ω *a tyto parc. der. jsou spojité*):
  $P(x,y) = x\,,\quad \dfrac{\partial P}{\partial x} = 1\,,\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0\,,\qquad Q(x,y) = y\,,\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0\,,\quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 1$
  všechny první parciální derivace v Ω existují a jsou spojité;
- platí $\quad \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}\,,\quad \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}\,,\quad \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}$
  což v našem případě platí, protože $0 = 0$.

Pak existuje taková funkce $V(x,y)$ (**potenciál** nebo též ***kmenová funkce***) a platí:

$$\int_\gamma \vec{f}\left(P(x,y), Q(x,y)\right)\cdot\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = [V(x,y)]_A^B = V(B) - V(A)$$

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

Budeme hledat kmenovou funkci $V(x,y)$:

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) = y$$

$$V(x,y) = \int y \, \mathrm{d}y = \underline{\frac{y^2}{2} + g(x)}$$

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = x = g'(x)$$

$$g'(x) = x$$

$$g(x) = \int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c$$

$$V(x,y) = \underline{\frac{y^2}{2} + \overbrace{\left(\frac{x^2}{2} + c\right)}^{g(x)}}$$

Tedy:

$$\int_\gamma \vec{f}(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c\right]_{[0;1]}^{[3;-4]} = \left[\frac{3^2}{2} + \frac{(-4)^2}{2} + c\right] - \left(\frac{0^2}{2} + \frac{1^2}{2} + c\right) =$$

$$= \frac{9}{2} + 8 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{12}}$$

4. Vypočítejte křivkový integrál v potenciálním poli

$$\int_\gamma \left(\frac{y}{x^2}\,\vec{i} - \frac{1}{x}\,\vec{j}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

kde křivka γ začíná v bodě $A = [2\,;1]$, končí v bodě $B = [1\,;2]$ a neprotíná osu y .

$/x \neq 0;\ y \in \mathbb{R}/$

Ověříme, zda funkce $\vec{f}(x,y)$ popisuje potenciální pole:

- křivka γ leží uvnitř jednoduše souvislé oblasti (*například kruh se středem v bodu A a poloměrem $r = \sqrt{3}$*) $\Omega : (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 3$;
- $P(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{-2y}{x^3}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{-1}{x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0$
  všechny první parciální derivace v Ω existují a jsou zde spojité;
- $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Kmenová funkce:

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) = \frac{-1}{x}$$

$$V(x,y) = -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y = \underline{\frac{-y}{x} + g(x)}$$

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^2} + g'(x)$$

$$g'(x) = 0$$

$$g(x) = c$$

$$V(x,y) = \underline{\frac{-y}{x} + \overbrace{(c)}^{g(x)}}$$

Tedy: $$\int_\gamma \vec{f}(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left[\frac{-y}{x}\right]_{[2;1]}^{[1;2]} = \left(\frac{-2}{1}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right) = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$$

5. Vypočítejte křivkový integrál v potenciálním poli

$$\int_\gamma \left((x+yz)\,\vec{i} + (y+xz)\,\vec{j} + (z+xy)\,\vec{k}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

kde křivka γ začíná v bodě $A = [0\,;0\,;0]$, a končí v bodě $B = [1\,;2\,;3]$.

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$

Ověříme, zda funkce $\vec{f}(x,y,z)$ popisuje potenciální pole:

- křivka γ leží uvnitř jednoduše souvislé oblasti (*například koule se středem v počátku a poloměrem* $r = 8$) $\quad \Omega : x^2 + y^2 + z^2 \le 64$;
- $P(x,y,z) = x + yz\,, \quad \dfrac{\partial P}{\partial x} = 1\,, \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = z\,, \quad \dfrac{\partial P}{\partial z} = y\,,$

  $Q(x,y,z) = y + xz\,, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = z\,, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 1\,, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial z} = x\,,$

  $R(x,y,z) = z + xy\,, \quad \dfrac{\partial R}{\partial x} = y\,, \quad \dfrac{\partial R}{\partial y} = x\,, \quad \dfrac{\partial R}{\partial z} = 1\,,$

  všechny první parciální derivace v Ω existují a jsou zde spojité;
- $\dfrac{\partial P}{\partial y} = z = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \quad , \quad \dfrac{\partial P}{\partial z} = y = \dfrac{\partial R}{\partial x} \quad , \quad \dfrac{\partial Q}{\partial z} = x = \dfrac{\partial R}{\partial y}$

Kmenová funkce:

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} = Q(x,y,z) = y + xz$$

$$V(x,y,z) = \int (y + xz)\,\mathrm{d}y = \underline{\frac{y^2}{2} + xyz + g(x,z)}$$

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} = P(x,y,z) = x + yz = yz + \frac{\partial g(x,z)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g(x,z)}{\partial x} = x$$

$$g(x,z) = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + h(z)$$

$$V(x,y,z) = \underline{\frac{y^2}{2} + xyz + \left[\frac{x^2}{2} + h(z)\right]}$$

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z) = z + xy = xy + h'(z)$$

$$h'(z) = z$$

$$h(z) = \int z\,\mathrm{d}z = \frac{z^2}{2} + c$$

$$V(x,y,z) = \underline{\frac{y^2}{2} + xyz + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{z^2}{2} + c\right)}$$

Tedy: $\displaystyle\int_\gamma \vec{f}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + xyz\right]_{[0;0;0]}^{[1;2;3]} = \left(\frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{2} + 1\cdot 2\cdot 3\right) - (0) = \underline{\underline{13}}$

6. Vypočítejte křivkový integrál v potenciálním poli

$$\int_\gamma \left(z\,\vec{i} + (y^2+z)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

kde křivka γ začíná v bodě $A = [0\,;3\,;1]$, a končí v bodě $B = [2\,;6\,;0]$.

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$

Ověříme, zda funkce $\vec{f}(x,y,z)$ popisuje potenciální pole:

- křivka γ leží uvnitř jednoduše souvislé oblasti (*například koule se středem v počátku a poloměrem* $r = 7$) $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \le 49$;
- $P(x,y,z) = z \qquad \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad \dfrac{\partial P}{\partial z} = 1$

  $Q(x,y,z) = y^2 + z \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2y \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 1$

  $R(x,y,z) = x + y \qquad \dfrac{\partial R}{\partial x} = 1 \qquad \dfrac{\partial R}{\partial y} = 1 \qquad \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$

  všechny první parciální derivace v Ω existují a jsou zde spojité;
- $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = 1 = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = 1 = \dfrac{\partial R}{\partial y}$

Kmenová funkce:
$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} = P(x,y,z) = z$$
$$V(x,y,z) = \int z\,\mathrm{d}x = \underline{xz + g(y,z)}$$
$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z) = x + y = x + \frac{\partial g(y,z)}{\partial z}$$
$$\frac{\partial g(y,z)}{\partial z} = y$$
$$g(y,z) = \int y\,\mathrm{d}z = yz + h(y)$$
$$V(x,y,z) = \underline{xz + [yz + h(y)]}$$
$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} = Q(x,y,z) = y^2 + z = z + h'(y)$$
$$h'(y) = y^2$$
$$h(y) = \int y^2\,\mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} + c$$
$$V(x,y,z) = \underline{xz + yz + \left(\frac{y^3}{3} + c\right)}$$

Tedy: $\displaystyle\int_\gamma \vec{f}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left[xz + yz + \frac{y^3}{3}\right]_{[0;3;1]}^{[2;6;0]} = \left(2\cdot 0 + 6\cdot 0 + \frac{6^3}{3}\right) - \left(0\cdot 1 + 3\cdot 1 + \frac{3^3}{3}\right) = \underline{\underline{60}}$

7. Vypočítejte křivkový integrál v potenciálním poli

$$\int_\gamma \left((3x^2y^2 - 2z^4)\,\vec{i} + 2x^3y\,\vec{j} - 8xz^3\,\vec{k}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

kde křivka γ začíná v bodě $A = [0;0;0]$, a končí v bodě $B = [1;1;1]$.

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$

Ověříme, zda funkce $\vec{f}(x,y,z)$ popisuje potenciální pole:

- křivka γ leží uvnitř jednoduše souvislé oblasti (*například koule se středem v počátku a polo–měrem* $r = 2$) $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \le 4$;
- $P(x,y,z) = 3x^2y^2 - 2z^4$ $\quad \dfrac{\partial P}{\partial x} = 6xy^2 \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y \quad \dfrac{\partial P}{\partial z} = -8z^3$

  $Q(x,y,z) = 2x^3y$ $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y \quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2x^3 \quad \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0$

  $R(x,y,z) = -8xz^3$ $\quad \dfrac{\partial R}{\partial x} = -8z^3 \quad \dfrac{\partial R}{\partial y} = 0 \quad \dfrac{\partial R}{\partial z} = -24xz^2$

  všechny první parciální derivace v Ω existují a jsou zde spojité;
- $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = -8z^3 = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \dfrac{\partial R}{\partial y}$

Kmenová funkce:

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} = Q(x,y,z) = 2x^3y$$

$$V(x,y,z) = \int 2x^3y\,\mathrm{d}y = \underline{2x^3\frac{y^2}{2} + g(x,z)}$$

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} = P(x,y,z) = 3x^2y^2 - 2z^4 = 3x^2y^2 + \frac{\partial g(x,z)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g(x,z)}{\partial x} = -2z^4$$

$$g(x,z) = \int -2z^4\,\mathrm{d}x = -2xz^4 + h(z)$$

$$V(x,y,z) = \underline{x^3y^2 + \left[-2xz^4 + h(z)\right]}$$

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z) = -8xz^3 = -8xz^3 + h'(z)$$

$$h'(z) = 0$$

$$h(z) = c$$

$$V(x,y,z) = \underline{x^3y^2 - 2xz^4 + (c)}$$

Tedy:

$$\int_\gamma \vec{f}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left[x^3y^2 - 2xz^4\right]_{[0;0;0]}^{[1;1;1]} = \left(1^3\cdot 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1^4\right) - (0) = \underline{\underline{-1}}$$

8. Vypočítejte křivkový integrál v potenciálním poli

$$\int_\gamma \left(\left[3x^2 - \frac{y}{(x+z)^2}\right]\vec{i} + \frac{1}{x+z}\vec{j} - \frac{y}{(x+z)^2}\vec{k}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$ kde křivka γ začíná v bodě $A = [1;1;1]$, a končí v bodě $B = [2;2;2]$.

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \neq -x/$

Ověříme, zda funkce $\vec{f}(x,y,z)$ popisuje potenciální pole:

- křivka γ leží uvnitř jednoduše souvislé oblasti (*například koule se středem v bodu* B *a poloměrem* $r = 2$) $\Omega : (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \le 4$;
- $P(x,y,z) = 3x^2 - \dfrac{y}{(x+z)^2}$ $\quad \dfrac{\partial P}{\partial x} = 6x + \dfrac{2y}{(x+z)^3}$ $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-1}{(x+z)^2}$ $\quad \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{2y}{(x+z)^3}$

  $Q(x,y,z) = \dfrac{1}{x+z}$ $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{-1}{(x+z)^2}$ $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0$ $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{-1}{(x+z)^2}$

  $R(x,y,z) = -\dfrac{y}{(x+z)^2}$ $\quad \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{2y}{(x+z)^3}$ $\quad \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{-1}{(x+z)^2}$ $\quad \dfrac{\partial R}{\partial z} = \dfrac{2y}{(x+z)^3}$

  všechny první parciální derivace v Ω existují a jsou zde spojité;
- $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-1}{(x+z)^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\quad \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{2y}{(x+z)^3} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{-1}{(x+y)^2} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$

Kmenová funkce:

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} = Q(x,y,z) = \frac{1}{x+z}$$

$$V(x,y,z) = \int \frac{1}{x+z}\,\mathrm{d}y = \underline{\frac{y}{x+z} + g(x,z)}$$

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z) = -\frac{y}{(x+z)^2} = \frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{\partial g(x,z)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial g(x,z)}{\partial z} = 0$$

$$g(x,z) = h(x)$$

$$V(x,y,z) = \underline{\frac{y}{x+z} + [h(x)]}$$

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} = P(x,y,z) = 3x^2 - \frac{y}{(x+z)^2} = \frac{-y}{(x+z)^2} + h'(x)$$

$$h'(x) = 3x^2$$

$$h(x) = \int 3x^2\,\mathrm{d}x = \frac{3x^3}{3} + c$$

$$V(x,y,z) = \underline{\frac{y}{x+z} + \left(x^3 + c\right)}$$

Tedy: $$\int_\gamma \vec{f}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left[\frac{y}{x+z} + x^3\right]_{[1;1;1]}^{[2;2;2]} = \left(\frac{2}{2+2} + 2^3\right) - \left(\frac{1}{1+1} + 1^3\right) = \underline{\underline{7}}$$