

# Křivkový integrál (reálné funkce) ve skalárním poli

## Studijní materiály

Jsou-li splněny podmínky **Věty 2.2.**<sup>1</sup>, tedy že

- oblouk  $\gamma$  je dán parametrickými rovnicemi:  $x = \varphi(t)$ ;  $y = \psi(t)$ ;  $z = \chi(t)$ ;  $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$
- funkce  $f(x, y, z)$  je spojitá na oblouku  $\gamma$

můžeme **křivkový integrál** funkce  $f(x, y, z)$  přes oblouk  $\gamma$  nahradit určitým integrálem takto:

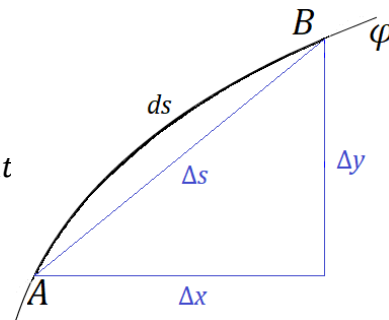
$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt$$

Pokud chybí souřadnice  $z$ , pak

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

kde:  $\Delta s \doteq ds = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2} =$

$$= \sqrt{\left(dx \cdot \frac{dt}{dt}\right)^2 + \left(dy \cdot \frac{dt}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] dt^2} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

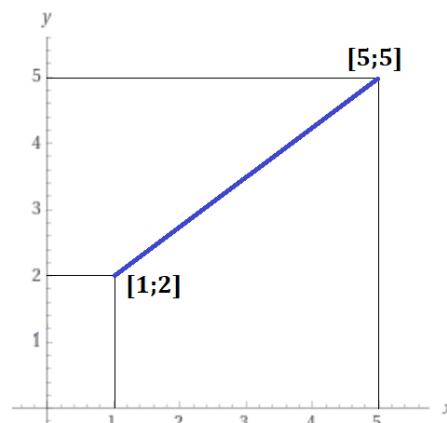


## 1. Vypočítejte křivkový integrál prvního druhu:

$\int_{\gamma} (5x - 9y) ds$ , kde křivka  $\gamma$  je nejkratší spojnici bodů o souřadnicích  $[1; 2]$  a  $[5; 5]$   
 $/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}/$  Nejkratší spojnici je úsečka!

Napišeme parametrické rovnice křivky  $\gamma$

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t & x' &= 4 & \text{směrový vektor} \\ y &= 2 + 3t & y' &= 3 & \vec{s} = (4; 3) \\ t &\in \langle 0; 1 \rangle \end{aligned}$$



$$\int_{\gamma} (5x - 9y) ds = \int_0^1 [5(1 + 4t) - 9(2 + 3t)] \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} dt =$$

$$= - \int_0^1 (7t + 13) \sqrt{25} dt = -5 \left[ 7 \frac{t^2}{2} + 13t \right]_0^1 =$$

primitivní funkce je spojitá pro  $t \in \mathbb{R}$ , tedy i pro  $t \in \langle 0; 1 \rangle$ , proto

$$= -5 \left[ \left( \frac{7}{2} + 13 \right) - (0) \right] = \frac{-35 - 130}{2} = \underline{\underline{\frac{165}{2}}}$$

<sup>1</sup> Strana 7 ve skriptech: DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80–7204–452–4.

## 2. Vypočítejte křivkový integrál ve skalárním poli:

$\int_{\gamma} ds$ , kde křivka  $\gamma$  je částí křivky  $\alpha$ , která leží mezi průsečíky křivky  $\alpha$  se souřadnými osami a jejichž souřadnice vyhovují vztahům:

$$\begin{aligned}x &= \frac{16 - t^2}{2} \\y &= \frac{1 + t^3}{3} \\t &\leq 3\end{aligned}$$

$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}/$  Vlastně počítáme délku oblouku.

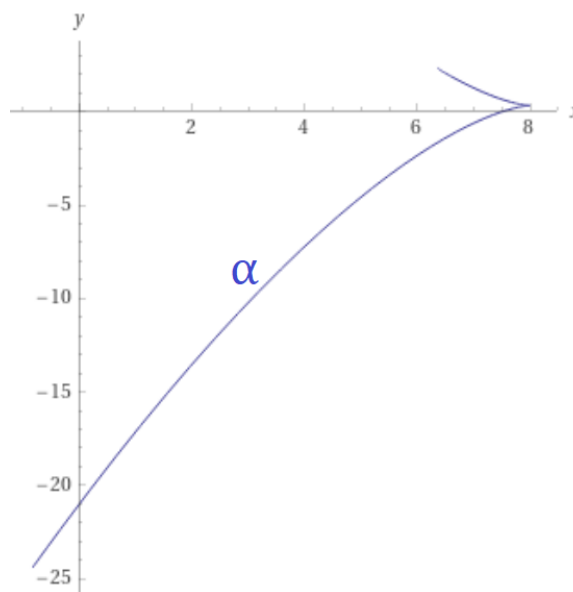
Určíme **meze parametru**  $t$  jako průsečíky křivky  $\alpha$  se souřadnými osami:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{16 - t^2}{2} & 0 &= \frac{1 + t^3}{3} \\0 &= 16 - t^2 & 0 &= 1 + t^3 \\t^2 &= 16 & -1 &= t^3 \\t &= \pm 4 & -1 &= t\end{aligned}$$

$$t \in \langle -4; -1 \rangle$$

$$x = \frac{16 - t^2}{2} = 8 - \frac{1}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad x' = -t$$

$$y = \frac{1 + t^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t^3 \quad \Rightarrow \quad y' = t^2$$



$$\int_{\gamma} ds = \int_{-4}^{-1} \sqrt{(-t)^2 + (t^2)^2} dt = \int_{-4}^{-1} \sqrt{t^2 + t^4} dt = \int_{-4}^{-1} \sqrt{t^2(1 + t^2)} dt = \int_{-4}^{-1} \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{1 + t^2} dt =$$

$$= \int_{-4}^{-1} |t| \cdot \sqrt{1 + t^2} dt = \int_{-4}^{-1} -(t) \cdot \sqrt{1 + t^2} dt = \left. \begin{array}{l} \sqrt{1 + t^2} = u \\ 1 + t^2 = u^2 \\ 2t dt = 2u du \\ dt = \frac{u}{t} du \\ \begin{array}{c|c} t & u \\ \hline -1 & \sqrt{2} \\ -4 & \sqrt{17} \end{array} \end{array} \right| = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} tu \cdot \frac{u}{t} du = \left[ \frac{u^3}{3} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} =$$

primitivní funkce je spojitá pro  $u \in \mathbb{R}$ , tedy i pro  $u \in \langle \sqrt{2}; \sqrt{17} \rangle$ , proto

$$= \left[ \frac{(\sqrt{17})^3}{3} - \frac{(\sqrt{2})^3}{3} \right] = \frac{17 \cdot \sqrt{17} - 2 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

### 3. Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{\gamma} (x + y^2 - z) \, ds, \quad \text{kde křivka } \gamma \text{ je úsečka } AB, \text{ přičemž souřadnice bodů jsou:}$$

$$A = [2; -1; 1], B = [1; 3; 3]$$

*/x ∈ ℝ; y ∈ ℝ; z ∈ ℝ/*

Napišeme parametrické rovnice úsečky  $\gamma$ ,

$$\text{kde } \vec{AB} = (-1; 4; 2)$$

$$x = 2 - t \quad x' = -1$$

$$y = -1 + 4t \quad y' = 4$$

$$z = 1 + 2t \quad z' = 2$$

$$t \in \langle 0; 1 \rangle$$

$$\int_{\gamma} (x + y^2 - z) \, ds = \int_0^1 [(2 - t) + (-1 + 4t)^2 - (1 + 2t)] \cdot \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2} \, dt =$$

$$= \sqrt{21} \int_0^1 (2 - t + 1 - 8t + 16t^2 - 1 - 2t) \, dt = \sqrt{21} \int_0^1 (16t^2 - 11t + 2) \, dt =$$

$$= \sqrt{21} \left[ 16 \frac{t^3}{3} - 11 \frac{t^2}{2} + 2t \right]_0^1 =$$

primitivní funkce je spojitá pro  $t \in \mathbb{R}$ , tedy i pro  $t \in \langle 0; 1 \rangle$ , proto

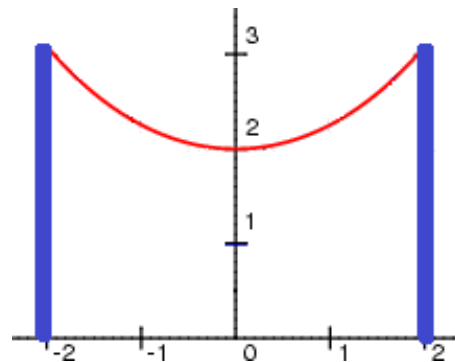
$$= \sqrt{21} \left[ 16 \frac{1}{3} - 11 \frac{1}{2} + 2 - (0) \right] = \sqrt{21} \frac{32 - 33 + 12}{6} = \frac{11 \cdot \sqrt{21}}{6}$$

**Délka (míra) křivky<sup>2</sup>  $\gamma$ :**  $L = \int_{\gamma} ds$

Mezi dvěma sloupy, vzdálenými od sebe 4 m, je zavěšené lano (křivka  $\gamma$ ). Vlivem vlastní hmotnosti se lano prohne do tvaru křivky, která se nazývá řetězovka. Zavedeme kartézskou souřadnou soustavu s osami  $x$  a  $y$ , kde osa  $x$  prochází patami sloupů a osa  $y$  je uprostřed mezi nimi. Určete délku prohnutého lana, jestliže v této souřadné soustavě je řetězovka popsána funkcí

$$y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$$

Protože  $y(0) = 2$ , je nejnižší bod lana 2 m nad zemí.



<sup>2</sup> Strana 9 ve skriptech: DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80–7204–452–4.

**Napišeme parametrické rovnice** (lana) křivky  $\gamma$

$$\begin{aligned} x = t & & x' = 1 & & x = 2r & & x' = 2 \\ y = e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} & & y' = e^{\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} + e^{-\frac{t}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) & & \text{nebo} & & y = e^r + e^{-r} & & y' = e^r - e^{-r} \\ & & t \in \langle -2; 2 \rangle & & & & & & r \in \langle -1; 1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} ds &= \int_{-2}^2 \sqrt{1^2 + \left[\frac{1}{2}(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}})\right]^2} dt = \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^t - 2 + e^{-t})} dt = \int_{-2}^2 \sqrt{\frac{1}{4}(e^t + 2 + e^{-t})} dt = \\ &= \int_{-2}^2 \sqrt{\frac{1}{4}(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 |e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}| dt = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \underbrace{e^{\frac{t}{2}}}_{\frac{t}{2}=u} dt + \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \underbrace{e^{-\frac{t}{2}}}_{-\frac{t}{2}=v} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 2e^{\frac{t}{2}} \right]_{-2}^2 + \frac{1}{2} \left[ -2e^{-\frac{t}{2}} \right]_{-2}^2 = \end{aligned}$$

primitivní funkce jsou spojité pro  $t \in \mathbb{R}$ , tedy i pro  $t \in \langle -2; 2 \rangle$ , proto

$$= (e^1 - e^{-1}) - (e^{-1} - e^1) = \underline{\underline{2e - \frac{2}{e}}}$$

Nebo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} ds &= \int_{-1}^1 \sqrt{2^2 + (e^r - e^{-r})^2} dr = \int_{-1}^1 \sqrt{4 + e^{2r} - 2 \underbrace{e^{r-r}}_1 + e^{-2r}} dr = \int_{-1}^1 \sqrt{(e^r + e^{-r})^2} dr = \\ &= \int_{-1}^1 |e^r + e^{-r}| dr = \int_{-1}^1 e^r dr + \int_{-1}^1 \underbrace{e^{-r}}_{-r=w} dr = [e^r]_{-1}^1 + [-e^{-r}]_{-1}^1 = \dots = \underline{\underline{2e - \frac{2}{e}}} \end{aligned}$$

**Obsah  $P$  části válcové plochy  $\Phi^3$**   $P = \int_{\gamma} [f(x, y) - g(x, y)] ds$

s řídící křivkou  $\gamma$  v rovině  $z = 0$ ,

tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou  $z$  a vymezenými

plochami  $z = g(x, y)$ ,  $z = f(x, y)$ ,  $g(x, y) \leq f(x, y) \quad \forall [x, y] \in \gamma$

Když například pro souřadnice všech bodů válcové plochy platí:

$$x = 2 \cos t \quad y = 2 \sin t \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle \quad 0 \leq z \leq 3$$

tedy  $g(x, y) = 0$ ,  $f(x, y) = 3$  a počítáme plošný obsah válcové plochy, která má poloměr 2

a je vysoká 3. Podle vzorce počítáme obsah **pláště válce**  $\Rightarrow P = 2\pi r v = 2\pi \cdot 2 \cdot 3 = 12\pi$

Ověříme si správnost úvahy: /  $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$  /

$$\begin{aligned} P &= \int_{\gamma} [f(x, y) - g(x, y)] ds = \int_0^{2\pi} [3 - 0] \cdot \sqrt{[2(-\sin t)]^2 + (2 \cos t)^2} dt = \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cdot \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_1} dt = 6 \int_0^{2\pi} dt = 6 [t]_0^{2\pi} = \dots = 6 \cdot (2\pi - 0) = \underline{\underline{12\pi}} \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Strana 9 ve skriptech: DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80-7204-452-4.

## Vypočtěte plošný obsah $P$ rotační válcové plochy

dané rovnicemi  $x = 2 \cos t$   $x' = -2 \sin t$  a omezené plochami  $0 \leq z \leq 2 + \sqrt{4 - x^2}$   
 $y = 2 \sin t$   $y' = 2 \cos t$  /  $x \in \langle -2; 2 \rangle$ ;  $y \in \mathbb{R}$  /

$$t \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

$$\begin{aligned} P &= \int_{\gamma} [f(x, y) - g(x, y)] ds = \int_0^{2\pi} [(2 + \sqrt{4 - x^2}) - 0] \cdot \sqrt{[2(-\sin t)]^2 + (2 \cos t)^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [2 + \sqrt{4 - (2 \cos t)^2}] \cdot \sqrt{4 \cdot \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_1} dt = \int_0^{2\pi} 2 \cdot \sqrt{4} dt + \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cdot \underbrace{(1 - \cos^2 t)}_{\sin^2 t}} \cdot \sqrt{4} dt = \\ &= 4 \int_0^{2\pi} dt + 4 \int_0^{2\pi} |\sin t| dt = 4 \int_0^{2\pi} dt + 4 \int_0^{\pi} (\sin t) dt + 4 \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t) dt = \\ &= 4 [t]_0^{2\pi} + 4 [-\cos t]_0^{\pi} + 4 [\cos t]_{\pi}^{2\pi} = \end{aligned}$$

primitivní funkce jsou spojité pro  $t \in \mathbb{R}$ , tedy i pro  $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ , proto

$$= 4 \cdot (2\pi - 0) + 4 \cdot [-\underbrace{\cos \pi}_{-1} - (-\underbrace{\cos 0}_1)] + 4 \cdot (\underbrace{\cos 2\pi}_1 - \underbrace{\cos \pi}_{-1}) = \underline{\underline{8\pi + 16}}$$

**Hmotnost křivky**<sup>4</sup>  $\gamma$ :  $m = \int_{\gamma} \varrho(x, y, z) ds$



kde  $\varrho(x, y, z)$  je měrná hmotnost/specifická **hustota**  
(lana, řetězu, kabelu, ...) ve tvaru křivky  $\gamma$ .

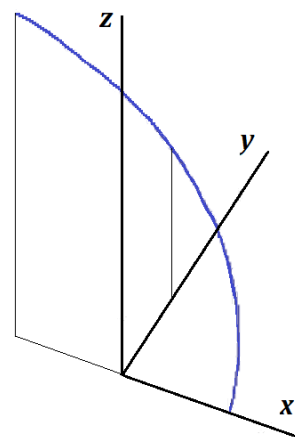
Určete hmotnost homogenního ( $\varrho(x, y, z) = \text{konst.}$ )  
oblouku (jednoho **půlzávit**) /  $x \in \mathbb{R}$ ;  $y \in \mathbb{R}$ ;  $z \in \mathbb{R}$  /  
šroubovice dané parametricky:

$$x = \cos t \quad x' = -\sin t$$

$$y = \sin t \quad y' = \cos t$$

$$z = t \quad z' = 1$$

$$t \in \langle 0; \pi \rangle$$



$$m = \int_{\gamma} \varrho ds = \varrho \int_0^{\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} dt = \varrho \sqrt{2} \int_0^{\pi} dt = \varrho \sqrt{2} [t]_0^{\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro  $t \in \mathbb{R}$ , tedy i pro  $t \in \langle 0; \pi \rangle$ , proto  $= \varrho \sqrt{2} (\pi - 0) = \underline{\underline{\varrho \sqrt{2} \pi}}$

<sup>4</sup> Strana 10 ve skriptech: DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80–7204–452–4.

**Těžiště hmotné křivky**<sup>5</sup>  $\gamma$ , kde  $\varrho(x, y, z)$  je měrná hmotnost/specifická hustota

**rovinná křivka:**  $T = \left[ \frac{S_y}{m}; \frac{S_x}{m} \right] = \left[ \frac{\int_{\gamma} x \cdot \varrho(x, y) ds}{\int_{\gamma} \varrho(x, y) ds}; \frac{\int_{\gamma} y \cdot \varrho(x, y) ds}{\int_{\gamma} \varrho(x, y) ds} \right]$

**prostorová:**  $T = \left[ \frac{S_{yz}}{m}; \frac{S_{xz}}{m}; \frac{S_{xy}}{m} \right] = \left[ \frac{\int_{\gamma} x \cdot \varrho(x, y, z) ds}{\int_{\gamma} \varrho(x, y, z) ds}; \frac{\int_{\gamma} y \cdot \varrho(x, y, z) ds}{\int_{\gamma} \varrho(x, y, z) ds}; \frac{\int_{\gamma} z \cdot \varrho(x, y, z) ds}{\int_{\gamma} \varrho(x, y, z) ds} \right]$

kde

- $S_x, S_y$  jsou statické momenty hmotné křivky  $\gamma$  vzhledem k souřadnicovým osám;
- $S_{xy}, S_{xz}, S_{yz}$  jsou statické momenty křivky  $\gamma$  vzhledem k souřadnicovým rovinám.

## Těžiště rovinné hmotné křivky

Určete těžiště kostry draka, která je vyrobena z drátu tenkého průřezu o měrné hustotě  $\varrho(x, y) = 2$ . Rozměry kostry jsou na vedlejším obrázku. /  $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$  /

Protože je kostra draka symetrická vzhledem k ose  $y$  je statický moment  $S_y$  vzhledem k této ose roven nule. Sami se následujícím výpočtem přesvědčte, že

$$S_y = \int_{\gamma} x \cdot \varrho(x, y) ds = 0$$

Tedy  $x$ -ová souřadnice těžiště je také nula:  $T = [0; y_T]$ . Zbývá určit  $y$ -ovou souřadnici těžiště.

Křivka  $\gamma$  je složena ze tří jednodušších křivek:  $\gamma = \alpha \cup \beta \cup \kappa$ ,

proto například hmotnost určíme:

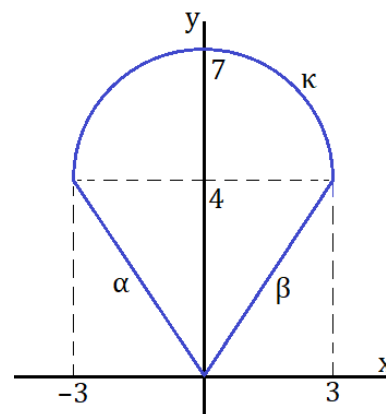
$$m = \int_{\gamma} \varrho(x, y) ds = \int_{\alpha} \varrho(x, y) ds + \int_{\beta} \varrho(x, y) ds + \int_{\kappa} \varrho(x, y) ds = 2 \int_{\alpha} ds + 2 \int_{\beta} ds + 2 \int_{\kappa} ds$$

kde

$\alpha$  je úsečka s krajními body  $[-3; 4]$ ,  $[0; 0]$

$\beta$  je úsečka s krajními body  $[0; 0]$ ,  $[3; 4]$

$\kappa$  je horní polokružnice se středem  $[0; 4]$  a poloměrem  $r = 3$



<sup>5</sup> Strana 11 ve skriptech: DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80–7204–452–4.

Jednotlivé křivky vyjádříme parametricky:

$\alpha$	$\beta$	$\kappa$
$x = -3t$	$x = 3t$	$x = 3 \cos t$
$x' = -3$	$x' = 3$	$x' = -3 \sin t$
$y = 4t$	$y = 4t$	$y = 4 + 3 \sin t$
$y' = 4$	$y' = 4$	$y' = 3 \cos t$
$t \in \langle 0; 1 \rangle$	$t \in \langle 0; 1 \rangle$	$t \in \langle 0; \pi \rangle$

Potom hmotnost kostry draka je:

$$\begin{aligned}
 m &= 2 \int_{\alpha} ds + 2 \int_{\beta} ds + 2 \int_{\kappa} ds = \\
 &= 2 \int_0^1 \sqrt{(-3)^2 + 4^2} dt + 2 \int_0^1 \sqrt{3^2 + 4^2} dt + 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2} dt = \\
 &= \left( 2 \int_0^1 \sqrt{25} dt + 2 \int_0^1 \sqrt{25} dt \right) + 2 \int_0^{\pi} \sqrt{9(\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_1)} dt = 4 \cdot 5 \int_0^1 dt + 2 \cdot 3 \int_0^{\pi} dt = \\
 &= 20 [t]_0^1 + 6 [t]_0^{\pi} =
 \end{aligned}$$

primitivní funkce jsou spojité pro  $t \in \mathbb{R}$ , tedy i pro  $t \in \langle 0; 1 \rangle$  nebo  $t \in \langle 0; \pi \rangle$ , proto

$$= 20(1 - 0) + 6(\pi - 0) = \underline{\underline{20 + 6\pi}} \doteq 38,85$$

Statický moment  $S_x$  kostry draka vzhledem k ose  $x$  je:

$$\begin{aligned}
 m &= 2 \int_{\alpha} y ds + 2 \int_{\beta} y ds + 2 \int_{\kappa} y ds = \\
 &= 2 \int_0^1 4t \cdot \sqrt{(-3)^2 + 4^2} dt + 2 \int_0^1 4t \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} dt + 2 \int_0^{\pi} (4 + 3 \sin t) \cdot \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2} dt = \\
 &= \left( 8 \int_0^1 t \cdot \sqrt{25} dt + 8 \int_0^1 t \cdot \sqrt{25} dt \right) + 2 \int_0^{\pi} (4 + 3 \sin t) \cdot \sqrt{9(\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_1)} dt = \\
 &= 2 \cdot 8 \cdot 5 \int_0^1 t dt + 2 \cdot 3 \int_0^{\pi} (4 + 3 \sin t) dt = 80 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 + 6 [4t - 3 \cos t]_0^{\pi} =
 \end{aligned}$$

primitivní funkce jsou spojité pro  $t \in \mathbb{R}$ , tedy i pro  $t \in \langle 0; 1 \rangle$  nebo  $t \in \langle 0; \pi \rangle$ , proto

$$= 80 \left( \frac{1}{2} - 0 \right) + 6 \left[ (4\pi - 3 \underbrace{\cos \pi}_{-1}) - (0 - 3 \underbrace{\cos 0}_1) \right] = 40 + 24\pi + 36 = \underline{\underline{76 + 24\pi}} \doteq 151,4$$

$$\frac{76+24\pi}{20+6\pi} \doteq 3,9 \quad \Rightarrow \quad \text{Těžiště draka má (přibližně) souřadnice: } \underline{\underline{T = [0; 3,9]}}.$$



## Těžiště prostorové hmotné křivky

Určete polohu těžiště homogenního ( $\rho(x, y, z) = \text{konst.}$ ) oblouku (jednoho půlzávitů) šroubovice dané parametricky:

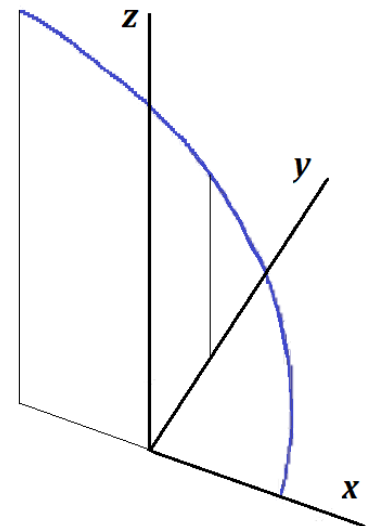
$$x = \cos t \quad x' = -\sin t$$

$$y = \sin t \quad y' = \cos t$$

$$z = t \quad z' = 1$$

$$t \in \langle 0; \pi \rangle$$

jestliže měrná hustota materiálu šroubovice je:  $\rho(x, y, z) = 4$   
/  $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}$  /



$$m = \int_{\gamma} \underbrace{4}_{\rho} ds = 4 \int_0^{\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} dt = 4 \int_0^{\pi} \sqrt{2} dt = 4 \cdot \sqrt{2} [t]_0^{\pi} = \quad / ds = \sqrt{2} dt /$$

primitivní funkce je spojitá pro  $t \in \mathbb{R}$ , tedy i pro  $t \in \langle 0; \pi \rangle$ , proto  $= 4 \cdot \sqrt{2} (\pi - 0) = \underline{\underline{4\pi\sqrt{2}}}$

$$S_{yz} = \int_{\gamma} x \cdot \underbrace{4}_{\rho} ds = 4 \int_0^{\pi} \cos t \cdot \sqrt{2} dt = 4 \cdot \sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos t dt = 4 \cdot \sqrt{2} [\sin t]_0^{\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro  $t \in \mathbb{R}$ , tedy i pro  $t \in \langle 0; \pi \rangle$ , proto  $= 4 \cdot \sqrt{2} (\underbrace{\sin \pi}_0 - \underbrace{\sin 0}_0) = \underline{\underline{0}}$

$$S_{xz} = \int_{\gamma} y \cdot \underbrace{4}_{\rho} ds = 4 \int_0^{\pi} \sin t \cdot \sqrt{2} dt = 4 \cdot \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin t dt = 4 \cdot \sqrt{2} [-\cos t]_0^{\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro  $t \in \mathbb{R}$ , tedy i pro  $t \in \langle 0; \pi \rangle$ , proto

$$= 4 \cdot \sqrt{2} \left[ (-\underbrace{\cos \pi}_{-1}) - (-\underbrace{\cos 0}_1) \right] = \underline{\underline{8 \cdot \sqrt{2}}}$$

$$S_{xy} = \int_{\gamma} z \cdot \underbrace{4}_{\rho} ds = 4 \int_0^{\pi} t \cdot \sqrt{2} dt = 4 \cdot \sqrt{2} \int_0^{\pi} t dt = 4 \cdot \sqrt{2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro  $t \in \mathbb{R}$ , tedy i pro  $t \in \langle 0; \pi \rangle$ , proto  $= 2 \cdot \sqrt{2} (\pi^2 - 0) = \underline{\underline{2\pi^2\sqrt{2}}}$

$$T = \left[ \frac{S_{yz}}{m}; \frac{S_{xz}}{m}; \frac{S_{xy}}{m} \right] = \left[ \frac{0}{4\pi\sqrt{2}}; \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{4\pi\sqrt{2}}; \frac{2\pi^2 \cdot \sqrt{2}}{4\pi\sqrt{2}} \right] = \underline{\underline{\left[ 0; \frac{2}{\pi}; \frac{\pi}{2} \right]}}$$