

Transformace dvojného integrálu

(reálné funkce 2 reálných proměnných)

Studijní materiály

Určete hmotnost části roviny Ω , jestliže:

- souřadnice bodů tvořících Ω vyhovují nerovnicím
 $x \cdot y \geq 1$; $x \cdot y \leq 3$; $x \leq 2y$; $y \leq 4x$; $x \geq 0$
- měrná hustota (hmotnosti) materiálu je dána
 $\rho = 2 \cdot \frac{y}{x}$.

Načtneme si hranice oblasti Ω (tučné černé křivky) a pro některý bod (například $V=[1;2]$) ověříme, zda do dané oblasti patří. V našem případě vidíme že ano, takže daný bod je vnitřním bodem zadané oblasti (všechny vnitřní body oblasti Ω budeme označovat $\text{int } \Omega$).

Víme, že hmotnost vypočítáme podle vzorce:

$$m = \iint_{\Omega} \rho(x; y) dx dy$$

a dále víme, že: $D(\rho) = \{[x; y] : x \neq 0, y \in (-\infty; \infty)\}$.

Proto je funkce ρ na uzávěru $\bar{\Omega}$ oblasti (oblast včetně hranic) Ω definovaná, spojitá i ohraničená. Tedy nikde na oblasti Ω ani nikde na její hranici „neutíká do nekonečna“. A protože lze uzavřenou oblast Ω rozdělit na trojici (viz dále) elementárních oblastí I. nebo II. druhu v rovině, je podle **Věty 1.4.**¹ integrovatelná.

Nyní zbývá převést tento dvojný integrál na dvojnásobný.

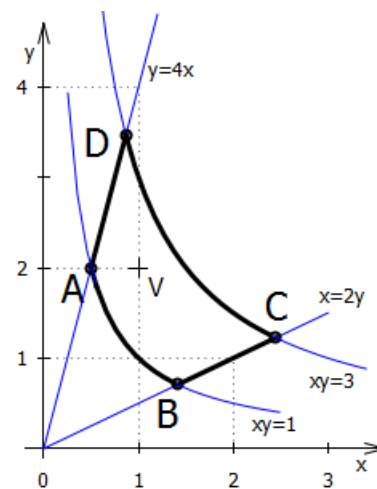
1. varianta – elementární oblasti v rovině

Rovnoběžky s osou y

V bodě **D** spustíme a v bodě **B** vztyčíme kolmici na osu x . Tyto kolmice nám oblast Ω rozdělí na tři elementární oblasti prvního druhu. Pro každou z těchto oblastí určíme meze a dvojný integrál poté vypočteme jako součet tří dvojnásobných integrálů.

Rovnoběžky s osou x

V bodě **A** vztyčíme a v bodě **C** spustíme kolmici na osu y . Tyto kolmice nám oblast Ω rozdělí na tři elementární oblasti druhého druhu. Pro každou z těchto oblastí určíme meze a dvojný integrál opět vypočteme jako součet tří dvojnásobných integrálů.



¹ Strana 10 ve skriptech: DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Dvojný a trojný integrál*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80-7204-453-2.

2. varianta – transformace oblasti Ω

Přepíšeme si rovnice každé ze čtyř hranic do vhodnějšího tvaru, kde $u_d; u_H; v_d; v_H$ představují konkrétní hodnoty a $u; v$ jsou patřičné konstanty zapsané obecně (viz níže):

$$\text{hyperbola AB: } x \cdot y = 1 \Rightarrow 1 = x \cdot y \Rightarrow u_d = x \cdot y$$

$$\text{hyperbola CD: } x \cdot y = 3 \Rightarrow 3 = x \cdot y \Rightarrow u_H = x \cdot y$$

$$\text{přímka BC: } x = 2y \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{x} \Rightarrow v_d = \frac{y}{x}$$

$$\text{přímka AD: } y = 4x \Rightarrow \frac{y}{x} = 4 \Rightarrow v_H = \frac{y}{x}$$

Vidíme, že

hyperbolu můžeme zapsat ve tvaru $u = x \cdot y$

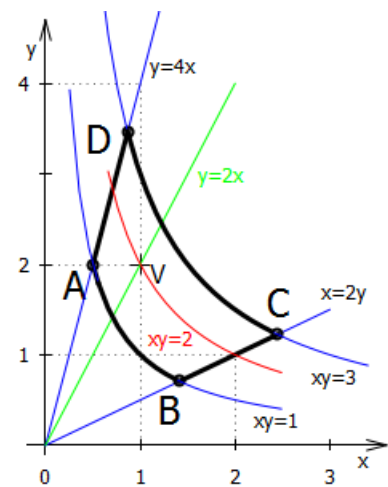
a přímku ve tvaru $v = \frac{y}{x}$

Přitom pro parametr u každé takové hyperboly protínající zadanou oblast Ω (ve vedlejším obrázku je jedna z nich nakreslena červeně) platí:

$$u_d \leq u \leq u_H$$

Podobně pro parametr v každé takové přímky protínající oblast Ω (ve vedlejším obrázku je jedna z nich nakreslena zeleně) platí:

$$v_d \leq v \leq v_H$$



Tím jsme vlastně **transformovali** staré proměnné $x; y$ na nové **proměnné** $u; v$

a zároveň jsme určili i **nové meze** pro tyto proměnné:

$$u \in \langle 1; 3 \rangle; v \in \langle \frac{1}{2}; 4 \rangle$$

Tedy transformace T určená funkcemi $u(x; y) = x \cdot y$ a $v(x; y) = \frac{y}{x}$

převéde každý bod o souřadnicích $[x; y]$ ze souřadné roviny “ $x y$ ” na jeho obraz v souřadné rovině “ $u v$ ” o souřadnicích $\left[x \cdot y; \frac{y}{x} \right]$. **Obrazy** bodů budeme označovat apostrofem. Potom (viz následující obrázek):

$$V = [1; 2] \xrightarrow{T} V' = [2; 2]; A = [0,5; 2] \xrightarrow{T} A' = [1; 4]; [2; 1] \xrightarrow{T} [2; 0,5] \text{ atd.}$$

Nyní zbývá ještě **transformovat diferenciály**, nebo-li určit **koeficient**, kolikrát se zvětší či zmenší obsah libovolně malého plošného elementu \mathcal{A}_V (například malinkého čtverečku kolem bodu V) vzhledem k plošnému obsahu jejího obrazu $\mathcal{A}'_{V'}$.

Věta 1.6. (ve zmíněných skriptech) uvádí, že tento koeficient je roven absolutní hodnotě **jakobiánu** a jakobián má tvar:

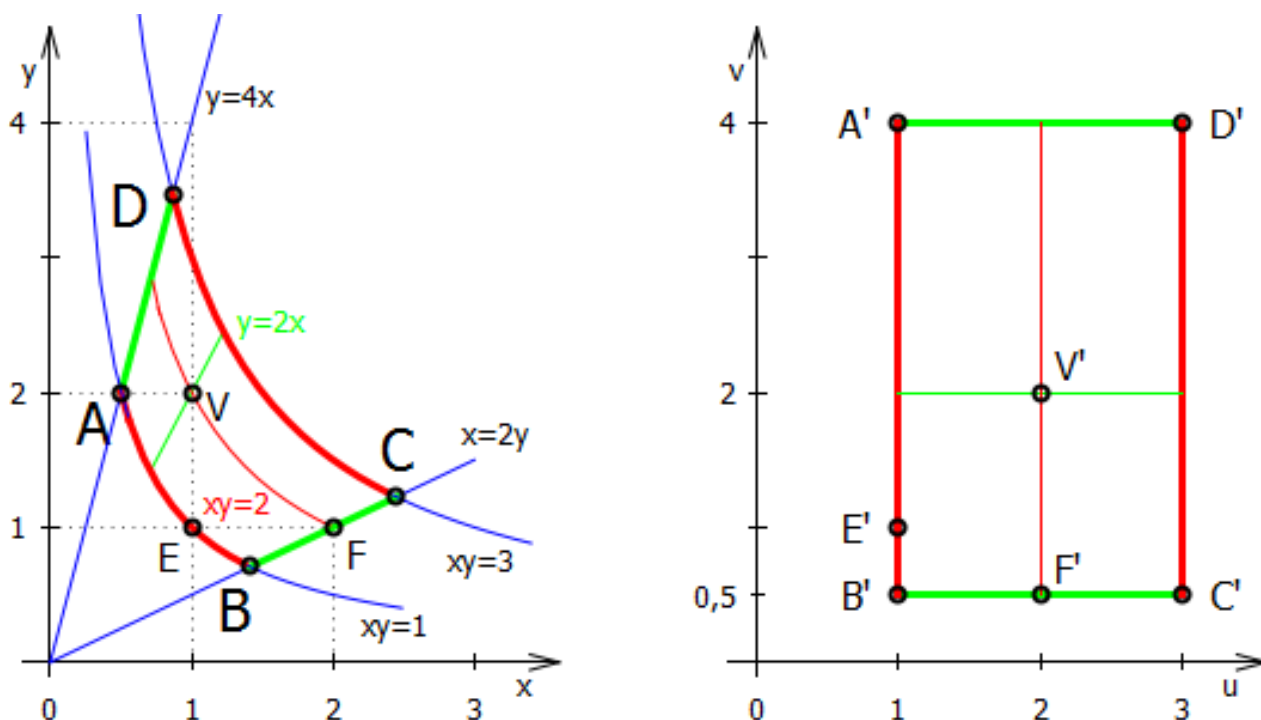
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$u = x \cdot y$$

$$v = \frac{y}{x}$$

Musíme tedy původně uvažovanou soustavu dvou transformačních rovnic

která je tvaru $u = f(x; y)$, $v = g(x; y)$, převést na tvar $x = \varphi(u; v)$, $y = \psi(u; v)$.



Proto z první i druhé rovnice vyjádříme y . Potom

$$\frac{u}{x} = v \cdot x$$

$$u = v \cdot x^2$$

$$\frac{u}{v} = x^2$$

a protože všechny body oblasti Ω mají x ové souřadnice kladné (viz obrázek oblasti vlevo), dostáváme

$$\varphi(u; v) : x = \sqrt{\frac{u}{v}} = \sqrt{u \cdot v^{-1}} = u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}}$$

a po dosazení do druhé rovnice

$$\psi(u; v) : y = v \cdot x = v \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

Nyní již může stanovit hodnotu *jakobiánu*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot v^{-1} - \left(-\frac{1}{4} \cdot v^{-1} \right) = \frac{1}{2v}$$

A pokud jsou splněny i další podmínky uvedené Věty 1.6.

- každý bod $[x; y]$ se pomocí uvažované transformace T zobrazí jednoznačně (existuje k němu jediný obraz) a ke každému obrazu $[u; v]$ existuje jediný vzor \Rightarrow **zobrazení** zprostředkované těmito transformačními rovnicemi **je prosté**;

/a to v našem případě platí/

- funkce $\varrho(x; y)$ je spojitá a ohraničená na oblasti Ω , která je sjednocením konečného počtu elementárních oblastí prvního nebo druhého druhu;

/a to v našem případě platí – problém jsme diskutovali, když jsme zkoumali integrovatelnost zadání/

- funkce $\varphi(u; v)$, $\psi(u; v)$ a všechny jejich první parciální derivace jsou spojité na uzávěru $\overline{\Omega'}$ (což je obraz původně zadané oblasti Ω)

/a to v našem případě platí – obě uvedené funkce a všechny jejich první parciální derivace jsou spojité mimo jiné pro $u \in (0; \infty)$ a $v \in (0; \infty)$, což naše Ω' splňuje/

- jakobián $J(u; v) \neq 0 \quad \forall [u; v] \in \Omega'$

/a to v našem případě také platí/

potom podle uvedené věty platí:

$$\iint_{\Omega} f(x; y) \, dx \, dy = \iint_{\Omega' = T(\Omega)} f(\varphi(u; v); \psi(u; v)) \cdot |J(u; v)| \, du \, dv$$

což v našem případě:

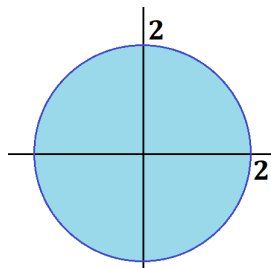
$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} 2 \cdot \frac{y}{x} \, dx \, dy &= \iint_{\Omega'} \left(2 \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}}} \right) \cdot \left| \frac{1}{2v} \right| \, du \, dv = \int_1^3 \left\{ \int_{0,5}^4 2v \cdot \frac{1}{2v} \, dv \right\} du = \int_1^3 [v]_{0,5}^4 \, du = \\ &= [(4 - 0,5) \cdot u]_1^3 = 3,5 \cdot (3 - 1) = \underline{\underline{7}} \end{aligned}$$

Hmotnost části roviny Ω je 7 váhových jednotek.

Transformace do polárních souřadnic

Vypočtěte $\iint_{\mathcal{A}} \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$ jestliže pro souřadnice bodů oblasti \mathcal{A} platí:

$$x^2 + y^2 \leq 4$$



$$[4 - x^2 - y^2 \geq 0] \quad \text{Zavedeme polární souřadnice: } \begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \\ |J| &= \varrho \\ \varrho &\in \langle 0; 2 \rangle \\ \varphi &\in \langle 0; 2\pi \rangle \end{aligned}$$

kde pro každý bod **modré** oblasti **nová proměnná** ϱ vyjadřuje jeho vzdálenost od počátku a **nová proměnná** φ je úhel, který svírá průvodič (spojnice bodu s počátkem) daného bodu s kladným směrem vodorovné osy.

$$\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{4 - \varrho^2 \cos^2 \varphi - \varrho^2 \sin^2 \varphi} \cdot \underbrace{\varrho}_{|J|} \, d\varphi \right) d\varrho = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \varrho \cdot \sqrt{4 - \varrho^2 (\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_1)} \, d\varphi \right] d\varrho =$$

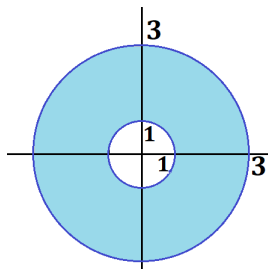
$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \varrho \sqrt{4 - \varrho^2} \, d\varphi \right) d\varrho = \int_0^2 \left(\varrho \sqrt{4 - \varrho^2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \right) d\varrho = \int_0^2 \varrho \sqrt{4 - \varrho^2} \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \, d\varrho =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \sqrt{4 - \varrho^2} \cdot \varrho \, d\varrho = \left| \begin{array}{l} \sqrt{4 - \varrho^2} = t \\ 4 - \varrho^2 = t^2 \\ -2\varrho \, d\varrho = 2t \, dt \\ \varrho \, d\varrho = -t \, dt \\ \begin{array}{c|c} \varrho & t \\ \hline 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \end{array} \right| = 2\pi \int_2^0 t \cdot (-t) \, dt = -2\pi \left[\frac{t^3}{3} \right]_2^0 = -2\pi \left(0 - \frac{2^3}{3} \right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{16}{3}\pi}}$$

Vypočtěte $\iint_B (x + y) dx dy$ jestliže pro souřadnice bodů oblasti B platí:

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$$



$[[x; y] \in (-\infty; \infty) \times (-\infty; \infty)]$

Zavedeme polární souřadnice: $x = \varrho \cos \varphi$

$$y = \varrho \sin \varphi$$

$$|J| = \varrho$$

$$\varrho \in \langle 1; 3 \rangle$$

$$\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

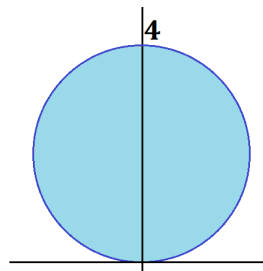
$$\int_1^3 \left[\int_0^{2\pi} (\varrho \cos \varphi + \varrho \sin \varphi) \cdot \underbrace{\varrho}_{|J|} d\varphi \right] d\varrho = \int_1^3 \left[\int_0^{2\pi} \varrho (\cos \varphi + \sin \varphi) \varrho d\varphi \right] d\varrho =$$

$$= \int_1^3 \left[\varrho^2 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \right] d\varrho = \int_1^3 \varrho^2 [\sin \varphi - \cos \varphi]_0^{2\pi} d\varrho = \int_1^3 \varrho^2 [(0 - 0) - (1 - 1)] d\varrho =$$

$$= \int_1^3 0 d\varrho = \underline{\underline{0}}$$

Vypočtěte $\iint_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) dx dy$ jestliže pro souřadnice bodů oblasti \mathcal{C} platí:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &\leq 4y \\x^2 + y^2 - 4y &\leq 0 \\x^2 + y^2 - 4y + 4 &\leq 4 \\x^2 + (y - 2)^2 &\leq 2^2\end{aligned}$$



$$[[x; y] \in (-\infty; \infty) \times (-\infty; \infty)]$$

Zavedeme polární souřadnice:

$$\begin{aligned}x &= \varrho \cos \varphi & (\varrho \cos \varphi)^2 + (\varrho \sin \varphi)^2 &= 4\varrho \sin \varphi \\y &= \varrho \sin \varphi & \varrho^2 (\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_1) &= 4\varrho \sin \varphi \\|J| &= \varrho & \varrho &= 4 \sin \varphi \\ \varrho &\in \langle 0; 4 \sin \varphi \rangle \\ \varphi &\in \langle 0; \pi \rangle\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \left[\int_0^{4 \sin \varphi} (\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi) \cdot \underbrace{\varrho}_{|J|} d\varrho \right] d\varphi = \int_0^\pi \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^{4 \sin \varphi} d\varphi = \int_0^\pi 64 \sin^4 \varphi d\varphi = \dots$$

Zavedeme posunuté polární souřadnice:

$$\begin{aligned}x &= \varrho \cos \varphi \\y &= 2 + \varrho \sin \varphi \\|J| &= \varrho \\ \varrho &\in \langle 0; 2 \rangle \\ \varphi &\in \langle 0; 2\pi \rangle\end{aligned} \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \varrho(-\sin \varphi) \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = \varrho \cos^2 \varphi + \varrho \sin^2 \varphi = \varrho$$

$$\begin{aligned}& \int_0^2 \left\{ \int_0^{2\pi} [(\varrho \cos \varphi)^2 + (2 + \varrho \sin \varphi)^2] \cdot \underbrace{\varrho}_{|J|} d\varphi \right\} d\varrho = \\&= \int_0^2 \left\{ \varrho \int_0^{2\pi} [\varrho^2 \cos^2 \varphi + 4 + 4\varrho \sin \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi] d\varphi \right\} d\varrho = \\&= \int_0^2 \left\{ \varrho \int_0^{2\pi} [\varrho^2 + 4 + 4\varrho \sin \varphi] d\varphi \right\} d\varrho = \int_0^2 \left\{ \varrho^3 [\varphi]_0^{2\pi} + 4\varrho [\varphi]_0^{2\pi} + 4\varrho^2 [-\cos \varphi]_0^{2\pi} \right\} d\varrho = \\&= 2\pi \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^2 + 8\pi \left[\frac{\varrho^2}{2} \right]_0^2 + 0 = \underline{\underline{24\pi}}\end{aligned}$$

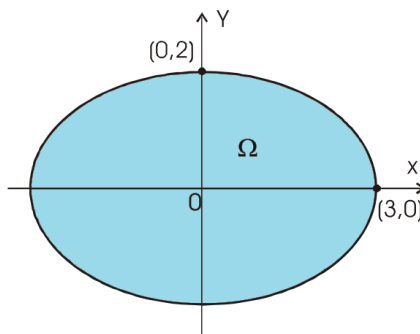
Transformace do zobecněných polárních souřadnic

Vypočtěte $\iint_D \sqrt{4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} dx dy$ jestliže pro souřadnice bodů oblasti D platí:

$$4x^2 + 9y^2 \leq 36$$

$$\frac{4}{36}x^2 + \frac{9}{36}y^2 \leq 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$$



$[4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} \geq 0]$ Zavedeme zobecněné polární souřadnice:

$$x = 3\rho \cos \varphi$$

$$y = 2\rho \sin \varphi$$

$$|J| = 6\rho$$

$$\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \cos \varphi & 3\rho(-\sin \varphi) \\ 2 \sin \varphi & 2\rho \cos \varphi \end{vmatrix} = 6\rho \cos^2 \varphi + 6\rho \sin^2 \varphi = 6\rho$$

Meze nové proměnné ρ (která pro každý bod vyjadřuje jeho vzdálenost od počátku, proto musí být nezáporná) určíme tak, že zobecněné polární souřadnice dosadíme do vymezení oblasti D .

$$4(3\rho \cos \varphi)^2 + 9(2\rho \sin \varphi)^2 \leq 36$$

$$36\rho^2 \cos^2 \varphi + 36\rho^2 \sin^2 \varphi \leq 36$$

$$36\rho^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 \leq 36 \quad | : 36$$

$$(0 \leq) \rho \leq 1$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \sqrt{4 - \frac{(3\rho \cos \varphi)^2}{9} - \frac{(2\rho \sin \varphi)^2}{4}} \cdot \underbrace{6\rho}_{|J|} d\rho \right] d\varphi = 6 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho \sqrt{4 - \rho^2} d\rho \right) d\varphi =$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{4 - \rho^2} = t \\ 4 - \rho^2 = t^2 \\ -2\rho d\rho = 2t dt \\ \rho d\rho = -t dt \\ \begin{array}{c|c} \rho & t \\ \hline 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 \end{array} \end{array} \right| = -6 \int_0^{2\pi} \left(\int_2^{\sqrt{3}} t \cdot t dt \right) d\varphi = -6 \int_0^{2\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_2^{\sqrt{3}} d\varphi = -6(\sqrt{3} - \frac{8}{3}) \cdot [\varphi]_0^{2\pi} =$$

$$\underline{\underline{4\pi(8 - 3\sqrt{3})}}$$