

Transformace trojného integrálu

(reálné funkce 3 reálných proměnných)

Studijní materiály

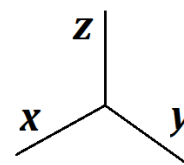
Jsou-li splněny podmínky **Věty 2.4.**¹, tedy že

- funkce $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$ definují prosté zobrazení $G(\varphi, \psi, \chi)$ a jakobián $J(u, v, w) \neq 0$, což **obě probírané transformace splňují**;
- integrovaná funkce $f(x, y, z)$ je na uzávěru $\overline{G(K)}$ oblasti $G(K)$ (oblast včetně hranic přes kterou integrujeme) **definovaná, spojitá i ohraničená**, tedy nikde na oblasti $G(K)$ ani nikde na její hranici „neutíká do nekonečna“;
- uzavřenou oblast (přes kterou integrujeme) lze rozdělit na několik elementárních oblastí prvního, druhého, nebo třetího druhu

pak **platí**

$$\iiint_{\overline{G(K)}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_K f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw$$

Následující obrázky jsou kresleny v kolmé axonometrii a souřadné osy (pokud nejsou zakresleny) jsou voleny takto:



Cylindrické/válcové souřadnice

Transformační rovnice jsou:

$$\begin{aligned} x &= r \cos t = \varphi(r, t, z) \\ y &= r \sin t = \psi(r, t, z) \\ z &= z = \chi(r, t, z) \end{aligned}$$

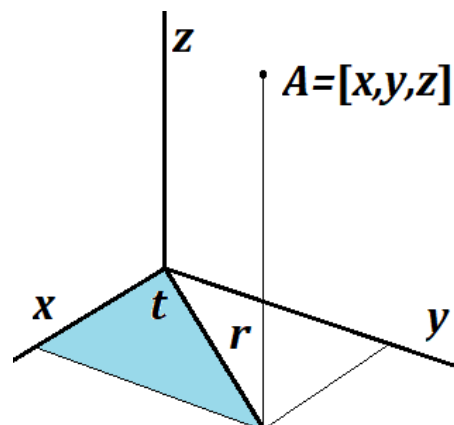
$$|J| = r$$

Tuto transformaci využíváme zejména, kde integrační oblast je válec nebo jeho část, nebo v případech, kdy pravouhlým průmětem integrační oblasti do půdorysny (rovina $z = 0$) je kruh či jeho část.

Z obrázku je zřejmé,

- souřadnice r znamená vzdálenost bodu $A = [x, y, 0]$ (půdorysu bodu A) od počátku, tedy délku průvodiče bodu $[x, y, 0]$;
- souřadnice t označuje orientovaný úhel měřený v půdorysně od kladného směru osy x po průvodič bodu $[x, y, 0]$;
- souřadnice z je z -tová souřadnice bodu $A = [x, y, z]$;

tedy význam válcových souřadnic r , t je stejný jako v případě polárních souřadnic u dvojrozměrných integrálů. Třetí souřadnice z se nemění.



¹ Strana 40 ve skriptech: DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Dvojný a trojný integrál*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80-7204-453-2.

1. Vypočítejte trojný integrál

$\iiint_{\Omega} dx dy dz$, kde pro souřadnice bodů oblasti Ω platí:
 / $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}$ /

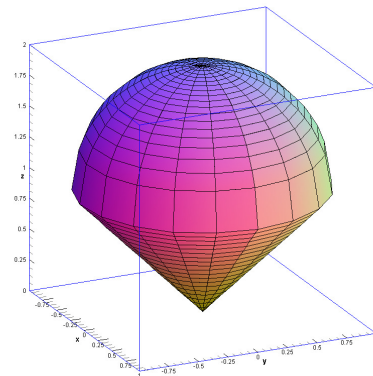
$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &\leq z \\ x^2 + y^2 + z^2 &\leq 2z \end{aligned}$$

Určíme mezní plochy

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= z && \text{rotační kuželová plocha} \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2z && \text{kulová plocha} \end{aligned}$$

Transformujeme do **válcových souřadnic**:

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \\ z &= z \\ |J| &= r \end{aligned}$$



Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Transformační rovnice dosadíme do mezních ploch:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= z && x^2 + y^2 + z^2 = 2z && x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z \\ \sqrt{(r \cos t)^2 + (r \sin t)^2} &= z && (r \cos t)^2 + (r \sin t)^2 + r^2 = 2r && \underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} + z^2 \leq 2z \\ \sqrt{r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} &= z && r^2(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1) + r^2 = 2r && z^2 - 2z \leq -r^2 \\ |r| &= z && 2r^2 - 2r = 0 && z^2 - 2z + 1 \leq 1 - r^2 \\ (0 \leq r \leq z) &&& r(r - 1) = 0 && (z - 1)^2 \leq 1 - r^2 \\ &&& (r_1 = 0; r_2 = 1) && z - 1 \leq \sqrt{1 - r^2} \\ &&& && z \leq 1 + \sqrt{1 - r^2} \end{aligned}$$

A když to shrneme:

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq t \leq 2\pi \\ r &\leq z \leq 1 + \sqrt{1 - r^2} \end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(\int_r^{1+\sqrt{1-r^2}} \underbrace{r}_{|J|} dz \right) dr \right] dt = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 r [z]_r^{1+\sqrt{1-r^2}} dr \right\} dt =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle r; 1 + \sqrt{1 - r^2} \rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 r \left[(1 + \sqrt{1 - r^2}) - (r) \right] dr \right\} dt = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (r - r^2) dr \right] dt + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \cdot \sqrt{1 - r^2} dr \right) dt =$$

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{1-r^2} = s \\ 1-r^2 = s^2 \\ -2r dr = 2s ds \\ dr = \frac{-s}{r} ds \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r dr \right) dt - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^2 dr \right) dt + \int_0^{2\pi} \left[\int_{r=0}^{r=1} rs \frac{-s}{r} ds \right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 dt - \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 dt - \int_0^{2\pi} \left[\frac{s^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} dt = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 dt - \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 dt - \int_0^{2\pi} \left[\frac{(\sqrt{1-r^2})^3}{3} \right]_0^1 dt =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $r \in \langle -1; 1 \rangle$, tedy i pro $r \in \langle 0; 1 \rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) dt - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} - 0 \right) dt - \int_0^{2\pi} \left(0 - \frac{1}{3} \right) dt = \frac{1}{2} [t]_0^{2\pi} - \frac{1}{3} [t]_0^{2\pi} + \frac{1}{3} [t]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, proto

$$= \frac{1}{2} (2\pi - 0) - \frac{1}{3} (2\pi - 0) + \frac{1}{3} (2\pi - 0) = \underline{\underline{\pi}}$$

2. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí:}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 9 \\ 0 &\leq x \\ 0 &\leq z \leq 3x \end{aligned}$$

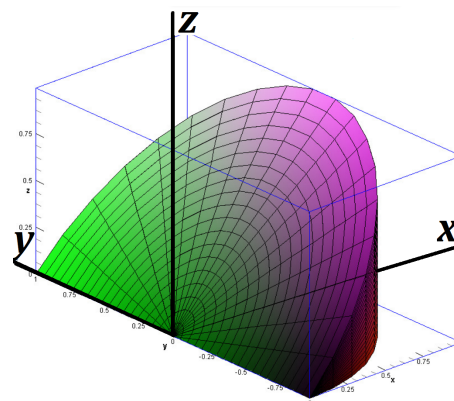
$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$

Určíme mezní plochy

$$\begin{aligned} 0 = x & \quad \text{rovina} \\ 0 = z & \quad \text{rovina} \\ z = 3x & \quad \text{rovina} \\ x^2 + y^2 = 9 & \quad \text{rotační válcová plocha (poloměr 3)} \end{aligned}$$

Transformujeme do **válcových souřadnic**:

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \\ z &= z \\ |J| &= r \end{aligned}$$



Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Transformační rovnice dosadíme do mezních ploch:

$$\begin{aligned} 0 = r \cos t & & x^2 + y^2 = 9 \\ \Downarrow & & (r \cos t)^2 + (r \sin t)^2 = 9 \\ r = 0 \vee t = -\frac{\pi}{2} \vee t = \frac{\pi}{2} & & r^2 (\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1) = 9 & 0 \leq r \leq 3 \\ \text{nebo přímo z obrázku} & & |r| = 3 & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ & & (0 \leq r \leq 3) & 0 \leq z \leq 3r \cos t \end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^3 \left(\int_0^{3r \cos t} \underbrace{r}_{|J|} dz \right) dr \right] dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^3 r [z]_0^{3r \cos t} dr \right\} dt =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0; 3r \cos t \rangle$, proto

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^3 r [(3r \cos t) - (0)] dr \right\} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[3 \cos t \int_0^3 r^2 dr \right] dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^3 dt =$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0; 3 \rangle$, proto

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \left(\frac{3^3}{3} - 0 \right) dt = 27 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 27 \left[\sin t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$, proto

$$= 27 \left[\underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 - \underbrace{\sin \left(-\frac{\pi}{2} \right)}_{-1} \right] = \underline{\underline{54}}$$

3. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí:}$$

$$x^2 + y^2 - y \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \geq z$$

$$0 \leq z$$

$$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$$

Určíme mezní plochy

$$x^2 + y^2 - y = 0 \quad \text{rotační válcová plocha}$$

$$x^2 + y^2 = z \quad \begin{array}{l} \text{rotační paraboloid} \\ \text{horní podstava válce} \end{array}$$

$$z = 0 \quad \text{rovina - dolní podstava válce}$$

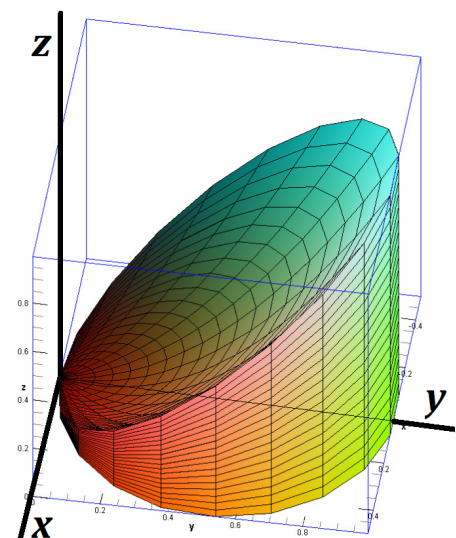
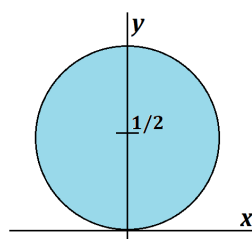
A) Transformujeme do **válcových souřadnic**:

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t$$

$$z = z$$

$$|J| = r$$



Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Transformační rovnice dosadíme do mezních ploch:

$$\begin{array}{lll}
 x^2 + y^2 - z = 0 & x^2 + y^2 = z & \\
 (r \cos t)^2 + (r \sin t)^2 - r \sin t = 0 & (r \cos t)^2 + (r \sin t)^2 = z & 0 \leq r \leq \sin t \\
 r^2 \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_1 - r \sin t = 0 & r^2 \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_1 = z & 0 \leq t \leq \pi \\
 r(r - \sin t) = 0 & r^2 = z & 0 \leq z \leq r^2 \\
 \downarrow & & \\
 (0 \leq r) \quad r = 0 \vee r = \sin t & &
 \end{array}$$

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^{\pi} \left[\int_0^{\sin t} \left(\int_0^{r^2} \frac{r}{|J|} dz \right) dr \right] dt = \int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{\sin t} r [z]_0^{r^2} dr \right\} dt =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0; r^2 \rangle$, proto

$$= \int_0^{\pi} \left[\int_0^{\sin t} r(r^2 - 0) dr \right] dt = \int_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sin t} dt =$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0; \sin t \rangle$, proto

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin^4 t}{4} - 0 \right) dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (\sin^2 t)^2 dt = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}{\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \quad | \cdot (-1)} \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t)^2 dt = \frac{1}{16} \int_0^{\pi} dt - \frac{1}{16} \int_0^{\pi} 2 \cos \underbrace{2t}_{=s} dt + \frac{1}{16} \int_0^{\pi} \cos^2 2t dt =$$

$$\frac{\cos^2 2t + \sin^2 2t = 1}{\cos^2 2t - \sin^2 2t = \cos[2(2t)]} \cos^2 2t = \frac{1 + \cos 4t}{2}$$

$$= \frac{1}{16} [t]_0^{\pi} - \frac{1}{16} \int_{t=0}^{t=\pi} 2 \cos s \cdot \frac{ds}{2} + \frac{1}{16} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 4t}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{16} [t]_0^{\pi} - \frac{1}{16} [\sin s]_{t=0}^{t=\pi} + \frac{1}{32} \int_0^{\pi} dt + \frac{1}{32} \int_0^{\pi} \cos \underbrace{4t}_{=u} dt =$$

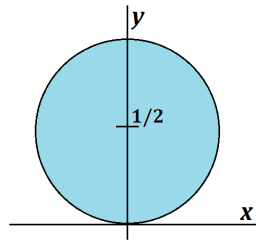
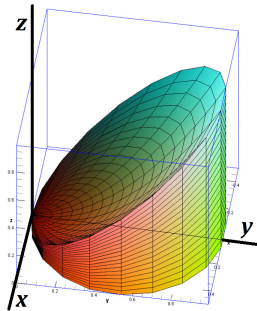
$$= \frac{1}{16} [t]_0^{\pi} - \frac{1}{16} [\sin 2t]_0^{\pi} + \frac{1}{32} [t]_0^{\pi} + \frac{1}{32} \int_0^{\pi} \cos u \frac{du}{4} = \frac{3}{32} [t]_0^{\pi} - \frac{1}{16} [\sin 2t]_0^{\pi} + \frac{1}{128} [\sin u]_{t=0}^{t=\pi} =$$

$$= \frac{3}{32} [t]_0^{\pi} - \frac{1}{16} [\sin 2t]_0^{\pi} + \frac{1}{128} [\sin 4t]_0^{\pi}$$

primitivní funkce jsou spojité pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; \pi \rangle$, proto

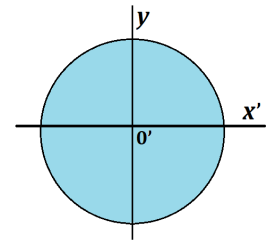
$$= \frac{3}{32} \cdot (\pi - 0) - \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{\sin 2\pi}{0} - \frac{\sin 0}{0} \right) + \frac{1}{128} \cdot \left(\frac{\sin 4\pi}{0} - \frac{\sin 0}{0} \right) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{32}}}$$

B) Transformujeme do **POSUNUTÝCH válcových souřadnic**:



$$\begin{aligned}x &= r \cos t \\y &= \frac{1}{2} + r \sin t \\z &= z\end{aligned}$$

$$|J| = r$$



Nejprve určíme *jakobián*. Protože víme, že do determinantu dosazujeme parciální derivace jednotlivých proměnných a **derivace konstanty je nula**, tak ať ke kterékoliv proměnné přičteme jakékoliv číslo, na hodnotu derivace (a tím také determinantu) to nebude mít vliv.

Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Transformační rovnice dosadíme do mezních ploch:

$$x^2 + y^2 - y = 0$$

$$x^2 + y^2 = z$$

$$(r \cos t)^2 + \left(\frac{1}{2} + r \sin t\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + r \sin t\right) = 0$$

$$(r \cos t)^2 + \left(\frac{1}{2} + r \sin t\right)^2 = z$$

$$r^2 \cos^2 t + \frac{1}{4} + r \sin t + r^2 \sin^2 t - \frac{1}{2} - r \sin t = 0$$

$$r^2 \cos^2 t + \frac{1}{4} + r \sin t + r^2 \sin^2 t = z$$

$$r^2 (\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1) - \frac{1}{4} = 0$$

$$r^2 (\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1) + \frac{1}{4} + r \sin t = z$$

$$r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$r^2 + r \sin t + \frac{1}{4} = z$$

vzdálenost r ($0 \leq r$) nezávisí na úhlu t : $r = \pm \frac{1}{2}$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{2}$$

Tedy střed kružnice je v **POČÁTKU**

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$0 \leq z \leq r^2 + r \sin t + \frac{1}{4}$$

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{r^2 + r \sin t + \frac{1}{4}} \frac{r}{|J|} dz \right) dr \right] dt = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} r [z]_0^{r^2 + r \sin t + \frac{1}{4}} dr \right\} dt =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \left(0; r^2 + r \sin t + \frac{1}{4}\right)$, proto

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} r \left[\left(r^2 + r \sin t + \frac{1}{4} \right) - 0 \right] dr \right\} dt = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \left[r^3 + r^2 \sin t + \frac{r}{4} \right] dr \right\} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} r^3 dr \right) dt + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} r^2 \sin t dr \right) dt + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r}{4} dr \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\frac{1}{2}} dt + \int_0^{2\pi} \sin t \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} dt + \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} dt =$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} - 0 \right] dt + \int_0^{2\pi} \sin t \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - 0 \right] dt + \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - 0 \right] dt =$$

$$= \frac{1}{64} \int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} \sin t dt + \frac{1}{32} \int_0^{2\pi} dt = \frac{3}{64} [t]_0^{2\pi} + \frac{1}{24} [-\cos t]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce jsou spojitě pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, proto

$$= \frac{3}{64} (2\pi - 0) - \frac{1}{24} \left(\frac{\cos 2\pi}{1} - \frac{\cos 0}{1} \right) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{32}}}$$

4. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

kde pro souřadnice bodů oblasti Ω platí:

$$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2$$

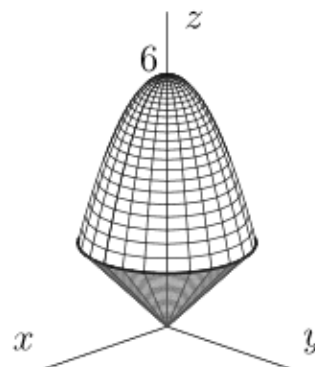
Určíme mezní plochy

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z \quad (z \geq 0)$$

rotační kuželová plocha
(s vrcholem v počátku)

$$z = 6 - x^2 - y^2$$

rotační paraboloid (se stejnou
osou rotace z jako kužel)
a vrcholem v bodě $[0; 0; 6]$



půdorysná kružnice:

$$\begin{aligned} z &= z \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= 6 - x^2 - y^2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= 6 - (x^2 + y^2) \\ z &= 6 - z^2 \end{aligned}$$

Transformujeme do **válcových souřadnic**:

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \\ z &= z \end{aligned}$$

$$|J| = r$$

$$\begin{aligned} z^2 + z - 6 &= 0 \\ (z + 3)(z - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 &= 6 - x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

má poloměr 2

Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Transformační rovnice dosadíme do mezních ploch:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= z & z &= 6 - x^2 - y^2 \\ \sqrt{(r \cos t)^2 + (r \sin t)^2} &= z & z &= 6 - (r \cos t)^2 - (r \sin t)^2 & 0 \leq r \leq 2 \\ \sqrt{r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} &= z & z &= 6 - r^2(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1) & 0 \leq t \leq 2\pi \\ & & z &= 6 - r^2 & r \leq z \leq 6 - r^2 \\ (0 \leq r) & |r| &= z & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \left(\int_r^{6-r^2} \frac{\sqrt{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}}{r} r \, dz \right) dr \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \left(r^2 \int_r^{6-r^2} dz \right) dr \right] dt = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^2 r^2 [z]_r^{6-r^2} dr \right\} dt = \end{aligned}$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle r; 6 - r^2 \rangle$, proto

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^2 r^2 [(6 - r^2) - (r)] dr \right\} dt = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 6r^2 dr \right) dt - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r^4 dr \right) dt - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r^3 dr \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 6 \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 dt - \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^2 dt - \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 dt = \end{aligned}$$

primitivní funkce jsou spojité pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0; 2 \rangle$, proto

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} 6 \left(\frac{2^3}{3} - 0 \right) dt - \int_0^{2\pi} \left(\frac{2^5}{5} - 0 \right) dt - \int_0^{2\pi} \left(\frac{2^4}{4} - 0 \right) dt = 16 \int_0^{2\pi} dt - \frac{32}{5} \int_0^{2\pi} dt - 4 \int_0^{2\pi} dt = \\ &= \frac{80 - 32 - 20}{5} \int_0^{2\pi} dt = \frac{28}{5} \int_0^{2\pi} dt = \frac{28}{5} [t]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, proto

$$= \frac{28}{5} (2\pi - 0) = \frac{56}{5} \pi$$

5. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí: } \begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq z \\ z &\leq 1 \end{aligned}$$

$$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$$

Určíme mezní plochy

$$x^2 + y^2 = z \quad \text{rotační paraboloid}$$

$$z = 1 \quad \text{rovina}$$

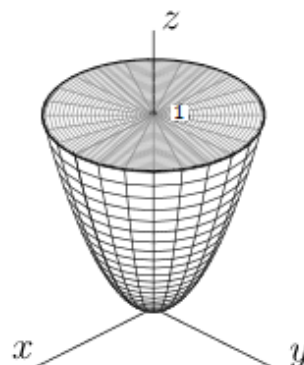
Transformujeme do **válcových souřadnic**:

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t$$

$$z = z$$

$$|J| = r$$



Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Transformační rovnice dosadíme do rotačního paraboloidu:

$$x^2 + y^2 = z$$

$$0 \leq r \leq \sqrt{z}$$

$$(r \cos t)^2 + (r \sin t)^2 = z$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$r^2 (\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1) = z$$

$$0 \leq z \leq 1$$

$$(0 \leq r) \quad |r| = \sqrt{z}$$

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{z}} \underbrace{(r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t)}_{r^2} \underbrace{r}_{|J|} dr \right] dz \right\} dt = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{z}} dz \right\} dt =$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0; \sqrt{z} \rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{(\sqrt{z})^4}{4} - 0 \right] dz \right\} dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} \int_0^1 z^2 dz \right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^1 dt =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0; 1 \rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - 0 \right) dt = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{12} [t]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, proto

$$= \frac{1}{12} (2\pi - 0) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$$

Sférické/kulové souřadnice

Transformační rovnice jsou:

$$x = r \cos t \cos s = \varphi(r, t, s)$$

$$y = r \sin t \cos s = \psi(r, t, s)$$

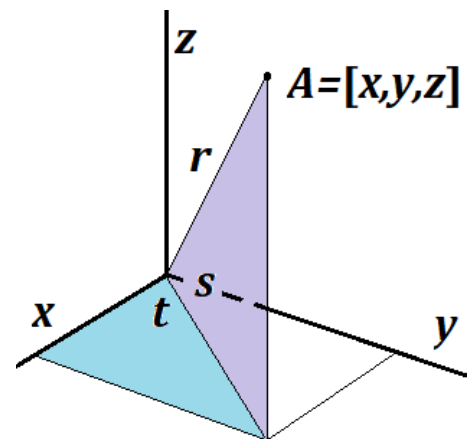
$$z = r \sin s = \chi(r, t, s)$$

$$|J| = r^2 \cos s$$

Tuto transformaci využíváme zejména, kde integrační oblast je koule nebo její část, nebo v případech, kdy pravouhlým průmětem integrační oblasti do půdorysny (rovina $z = 0$) je kruh či jeho část.

Z obrázku je zřejmé, že:

- souřadnice r znamená vzdálenost bodu $A = [x, y, z]$ od počátku;
- souřadnice t označuje orientovaný úhel měřený v půdorysně od kladného směru osy x po průvodič bodu $[x, y, 0]$ (= půdorys A_1 bodu A);
- souřadnice s označuje orientovaný úhel měřený od půdorysny po průvodič bodu $A = [x, y, z]$.



1. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí: } \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \end{array}$$

$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$

Určíme mezní plochy

$$x = 0 \quad \text{rovina}$$

$$y = 0 \quad \text{rovina}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \text{kulová plocha}$$

Transformujeme do **sférických souřadnic**:

$$x = r \cos t \cos s$$

$$y = r \sin t \cos s$$

$$z = r \sin s$$

$$|J| = r^2 \cos s$$

Z obrázku **stanovíme meze pro jednotlivé proměnné**

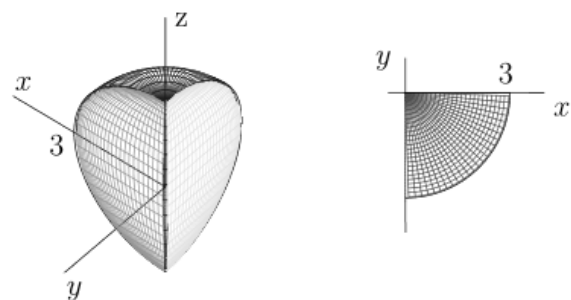
$$0 \leq r \leq 3$$

$$\frac{3}{2}\pi \leq t \leq 2\pi$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq s \leq 0\right)$$

Na pořadí jednotlivých proměnných při sestavování integrálu nezáleží, všechny meze jsou konstantní,

$$-\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}$$



$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz = \\
& = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\int_0^3 \sqrt{(r \cos t \cos s)^2 + (r \sin t \cos s)^2 + (r \sin s)^2} \cdot \underbrace{r^2 \cos s}_{|J|} \, dr \right) dt \right] ds = \\
& = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\int_0^3 \sqrt{r^2 \cos^2 s \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_1 + r^2 \sin^2 s} \cdot r^2 \cos s \, dr \right) dt \right] ds = \\
& = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\int_0^3 \sqrt{\underbrace{(\cos^2 s + \sin^2 s)}_1} r^2 \cos s \, dr \right) dt \right] ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\int_0^3 r^3 \cos s \, dr \right) dt \right] ds = \\
& = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos s \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^3 dt \right\} ds =
\end{aligned}$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0; 3 \rangle$, proto

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos s \left(\frac{3^4}{4} - 0 \right) dt \right] ds = \frac{81}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s \left(\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} dt \right) ds = \frac{81}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s \left[t \right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} ds =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle \frac{3}{2}\pi; \pi \rangle$, proto

$$= \frac{81}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s \left(2\pi - \frac{3}{2}\pi \right) ds = \frac{81}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s \, ds = \frac{81}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \left[\sin s \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $s \in \mathbb{R}$, tedy i pro $s \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$, proto

$$= \frac{81}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \left(\underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 - \underbrace{\sin \frac{-\pi}{2}}_{-1} \right) = \underline{\underline{\frac{81}{4} \pi}}$$

2. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí:}$$

$$y \geq 0$$

$$z \leq 0$$

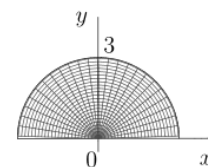
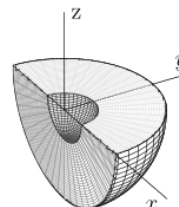
$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$$

$$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$$

Určíme mezní plochy

$y = 0$	rovina
$z = 0$	rovina
$1 = x^2 + y^2 + z^2$	kulová plocha (poloměr 1)
$x^2 + y^2 + z^2 = 9$	kulová plocha (poloměr 3)



Transformujeme do **sférických souřadnic**:

$$x = r \cos t \cos s$$

$$y = r \sin t \cos s$$

$$z = r \sin s$$

$$|J| = r^2 \cos s$$

Z obrázku **stanovíme meze pro jednotlivé proměnné**

$$1 \leq r \leq 3$$

$$0 \leq t \leq \pi$$

Na pořadí jednotlivých proměnných při sestavování integrálu nezáleží, všechny meze jsou konstantní,

$$-\frac{\pi}{2} \leq s \leq 0$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left\{ \int_0^{\pi} \left(\int_1^3 [(r \cos t \cos s)^2 + (r \sin t \cos s)^2] \cdot \underbrace{r^2 \cos s}_{|J|} dr \right) dt \right\} ds = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left[\int_0^{\pi} \left(\int_1^3 r^2 \cos^2 s \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_1 \cdot r^2 \cos s dr \right) dt \right] ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left[\int_0^{\pi} \left(\int_1^3 r^4 \cos^3 s dr \right) dt \right] ds = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left\{ \int_0^{\pi} \cos^3 s \left[\frac{r^5}{5} \right]_1^3 dt \right\} ds = \end{aligned}$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 1; 3 \rangle$, proto

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left[\int_0^{\pi} \cos^3 s \left(\frac{3^5}{5} - \frac{1}{5} \right) dt \right] ds = \frac{3^5 - 1}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3 s \left(\int_0^{\pi} dt \right) ds = \frac{242}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3 s [t]_0^{\pi} ds =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; \pi \rangle$, proto

$$= \frac{242}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3 s (\pi - 0) ds = \frac{242\pi}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 s \cdot \cos s ds = \frac{242\pi}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \sin^2 s) \cdot \cos s ds =$$

$\sin s = u$	
$\cos s ds = du$	
$ds = \frac{1}{\cos s} du$	
$\frac{s}{u}$	$\frac{u}{u}$
0	0
$-\frac{\pi}{2}$	-1

$$= \frac{242\pi}{5} \int_{-1}^0 (1 - u^2) \cdot \cos s \cdot \frac{1}{\cos s} du = \frac{242\pi}{5} \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^0 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $u \in \mathbb{R}$, tedy i pro $u \in \langle -1; 0 \rangle$, proto

$$= \frac{242\pi}{5} \left\{ (0) - \left[-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right] \right\} = \frac{242\pi}{5} \left[1 + \frac{-1}{3} \right] = \frac{242\pi}{5} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{484}{15} \pi}}$$

3. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí: } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

/x ∈ ℝ; y ∈ ℝ; z ∈ ℝ/

Určíme mezní plochu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{kulová plocha (poloměr 1)}$$

$$\text{vlastně počítáme objem koule} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi$$

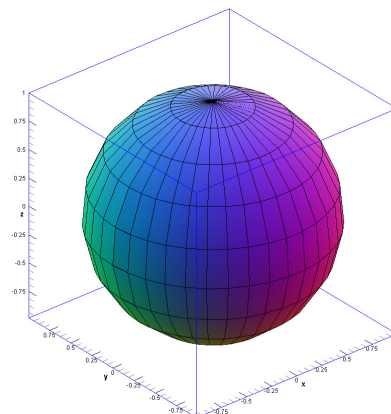
Transformujeme do sférických souřadnic

$$x = r \cos t \cos s \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$y = r \sin t \cos s \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z = r \sin s$$

$$|J| = r^2 \cos s \quad -\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}$$



a z obrázku stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{r^2 \cos s}{|J|} dr \right) dt \right\} ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos s \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 dt \right\} ds =$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0; 1 \rangle$, proto

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} \cos s \left(\frac{1}{3} - 0 \right) dt \right] ds = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s [t]_0^{2\pi} ds =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, proto

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s (2\pi - 0) ds = \frac{2\pi}{3} [\sin s]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $s \in \mathbb{R}$, tedy i pro $s \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, proto

$$= \frac{2\pi}{3} \left(\underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 - \underbrace{\sin \frac{-\pi}{2}}_{-1} \right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi}}$$

9. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí:} \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 4 \\ 0 &\leq z \leq x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$

Určíme mezní plochy

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 4 & \quad \text{rotační válcová plocha s osou v ose } z \text{ a poloměrem } 2 \\ 0 = z & \quad \text{rovina (spodní hranice pro } z) \\ x^2 + y^2 = z & \quad \text{rotační paraboloid (horní hranice pro } z) \end{aligned}$$

Transformujeme do **válcových souřadnic**:

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \\ z &= z \end{aligned}$$

$$|J| = r$$

Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Transformační rovnice dosadíme do rotačního paraboloidu:

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 & 0 \leq r \leq 2 \\ z &= (r \cos t)^2 + (r \sin t)^2 & 0 \leq t \leq 2\pi \\ z &= r^2 \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_1 & 0 \leq z \leq r^2 \end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^2 \left[\int_0^{r^2} z \frac{r}{|J|} \, dz \right] dr \right\} dt = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^2 r \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{r^2} dr \right\} dt =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0; r^2 \rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^2 r \left[\frac{(r^2)^2}{2} - 0 \right] dr \right\} dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \int_0^2 r^5 dr \right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^2 dt =$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0; 2 \rangle$, proto

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2^6}{6} - 0 \right) dt = \frac{16}{3} \int_0^{2\pi} dt = \frac{16}{3} [t]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, proto

$$= \frac{16}{3} (2\pi - 0) = \underline{\underline{\frac{32}{3}\pi}}$$

10. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} (x + y) \, dx \, dy \, dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí: } \begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 4 \\ 0 &\leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

/x ∈ ℝ; y ∈ ℝ; z ∈ ℝ/

Určíme mezní plochy

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 4 & \quad \text{rotační válcová plocha s osou v ose } z \text{ a poloměrem } 2 \\ 0 = z & \quad \text{rovina (spodní hranice pro } z) \\ \sqrt{x^2 + y^2} = z & \quad \text{rotační kuželová plocha (horní hranice pro } z) \end{aligned}$$

Transformujeme do **válcových souřadnic**:

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \\ z &= z \end{aligned}$$

$$|J| = r$$

Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Transformační rovnice dosadíme do rotační kuželové plochy:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 0 \leq r \leq 2$$

$$z = \sqrt{(r \cos t)^2 + (r \sin t)^2} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z = \sqrt{r^2(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1)} \quad 0 \leq z \leq r$$

$$z = |r|$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x + y) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^2 \left[\int_0^r (r \cos t + r \sin t) \underbrace{r}_{|J|} \, dz \right] dr \right\} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^2 r^2(\cos t + \sin t) [z]_0^r \, dr \right\} dt = \end{aligned}$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0; r \rangle$, proto

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^2 r^2(\cos t + \sin t) [r - 0] \, dr \right\} dt = \int_0^{2\pi} \left((\cos t + \sin t) \int_0^2 r^3 \, dr \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 dt = \end{aligned}$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0; 2 \rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t) \left(\frac{2^4}{4} - 0 \right) dt = 4 [\sin t - \cos t]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, proto

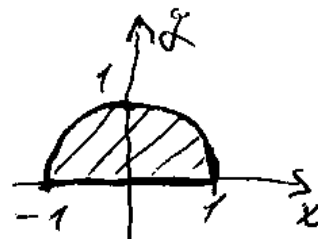
$$= 4 \left[\left(\frac{\sin 2\pi}{0} - \frac{\cos 2\pi}{1} \right) - \left(\frac{\sin 0}{0} - \frac{\cos 0}{1} \right) \right] = \underline{\underline{0}}$$

11. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} (x + y) dx dy dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí: } \begin{array}{l} y \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq y^2 \end{array}$$

$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$

$$\begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ \text{Bud': } 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq y^2 \end{array} \quad \text{nebo: } \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \\ 0 \leq z \leq y^2 \end{array}$$



NEBO: Určíme mezní plochy

$$\begin{array}{ll} 0 = y & \text{rovina} \\ x^2 + y^2 = 1 & \text{rotační válcová plocha s osou v ose } z \text{ a poloměrem } 1 \\ 0 = z & \text{rovina (spodní hranice pro } z) \\ z = y^2 & \text{parabolická válcová plocha (horní hranice pro } z) \end{array}$$

Transformujeme do **válcových souřadnic**:

$$\begin{array}{ll} x = r \cos t & 0 \leq r \leq 1 \\ y = r \sin t & 0 \leq t \leq \pi \\ z = z & 0 \leq z \leq r^2 \sin^2 t \\ |J| = r & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x + y) dx dy dz &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^{r^2 \sin^2 t} (r \cos t + r \sin t) \frac{r}{|J|} dz \right] dt \right\} dr = \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{\pi} r^2 (\cos t + \sin t) [z]_0^{r^2 \sin^2 t} dt \right\} dr = \end{aligned}$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in (0; r^2 \sin^2 t)$, proto

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{\pi} r^2 (\cos t + \sin t) (r^2 \sin^2 t - 0) dt \right\} dr = \\ &= \int_0^1 r^4 \left\{ \int_0^{\pi} \sin^2 t \cdot \overbrace{\cos t dt} + \int_0^{\pi} \underbrace{(1 - \cos^2 t)}_{\sin^2 t} \cdot \overbrace{\sin t dt} \right\} dr = \left| \begin{array}{ll} \sin t = v & \cos t = u \\ \cos t dt = dv & -\sin t dt = du \end{array} \right| \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 r^4 \left\{ \int_{t=0}^{t=\pi} v^2 dv - \int_{t=0}^{t=\pi} (1-u^2) du \right\} dr = \int_0^1 r^4 \left\{ \left[\frac{v^3}{3} \right]_{t=0}^{t=\pi} - \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{t=0}^{t=\pi} \right\} dr =$$

$$= \int_0^1 \frac{r^4}{3} \left\{ [\sin^3 t]_0^\pi - [3 \cos t - \cos^3 t]_0^\pi \right\} dr =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; \pi \rangle$, proto

$$= \int_0^1 \frac{r^4}{3} \left\{ \left[\frac{\sin^3 \pi}{0^3} - \frac{\sin^3 0}{0^3} \right] - \left[3 \frac{\cos \pi}{-1} - \frac{\cos^3 \pi}{(-1)^3} - (3 \frac{\cos 0}{1} - \frac{\cos^3 0}{1}) \right] \right\} dr = \frac{4}{3} \int_0^1 r^4 dr = \frac{4}{3} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 =$$

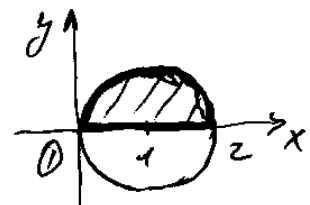
primitivní funkce jsou spojité pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; \pi \rangle$, proto ... $= \underline{\underline{\frac{4}{15}}}$

12. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí: } \begin{array}{l} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 2x \\ 0 \leq z \leq 3 \end{array}$$

$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$

$$\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ \text{Bud': } 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2} \\ 0 \leq z \leq 3 \end{array} \quad \text{nebo: } \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{2 - \sqrt{4 - 4y^2}}{2} \leq x \leq \frac{2 + \sqrt{4 - 4y^2}}{2} \\ 0 \leq z \leq 3 \end{array}$$



NEBO: Určíme mezní plochy

$$\begin{array}{ll} 0 = y & \text{rovina} \\ x^2 + y^2 = 2x & \text{rotační válcová plocha / půdorysná kružnice: } (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ 0 = z & \text{rovina (spodní hranice pro } z) \\ z = 3 & \text{rovina (horní hranice pro } z) \end{array}$$

Transformujeme do **válcových souřadnic** (nebo posunutých válcových souřadnic):

$$\begin{array}{ll} x = r \cos t & x = 1 + r \cos t \\ y = r \sin t & y = r \sin t \\ z = z & z = z \\ |J| = r & |J| = r \\ 0 \leq r \leq 2 \cos t & 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 \leq z \leq 3 & 0 \leq z \leq 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2 \cos t} z \underbrace{\sqrt{r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)}}_r \underbrace{r}_{|J|} \, dr \right] dt \right\} dz = \\ &= \int_0^3 z \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2 \cos t} r^2 \, dr \right] dt \right\} dz = \int_0^3 z \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2 \cos t} dt \right\} dz = \end{aligned}$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0; 2 \cos t \rangle$, proto

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \int_0^3 z \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2 \cos t)^3 - 0] dt \right\} dz = \frac{8}{3} \int_0^3 z \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot \cos t \, dt \right\} dz = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^3 z \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \cdot \underbrace{\cos t \, dt}_{dv} \right\} dz = \left| \begin{array}{c|c} \sin t = v & \\ \cos t \, dt = dv & \\ \hline t & v \\ \frac{\pi}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right| = \frac{8}{3} \int_0^3 z \left\{ \int_0^1 (1 - v^2) \, dv \right\} dz = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^3 z \left[1 - \frac{v^3}{3} \right]_0^1 dz = \end{aligned}$$

primitivní funkce je spojitá pro $v \in \mathbb{R}$, tedy i pro $v \in \langle 0; 1 \rangle$, proto

$$= \frac{8}{3} \int_0^3 z \left[1 - \frac{1}{3} - (0) \right] dz = \frac{16}{9} \int_0^3 z \, dz = \frac{16}{9} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^3 = \text{primitivní funkce ...} = \frac{16}{9} \left[\frac{3^2}{2} - 0 \right] = \underline{\underline{8}}$$