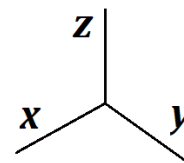


Trojný integrál

(reálné funkce 3 reálných proměnných)

Studijní materiály

Následující obrázky jsou kresleny v kolmé axonometrii a souřadné osy (pokud nejsou zakresleny) jsou voleny takto:



1. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí:}$$

$$\begin{aligned} x &\geq -1 \\ x &\leq 2 \\ z &\geq 2 + y^2 \\ z &\leq 4 - y^2 \end{aligned}$$

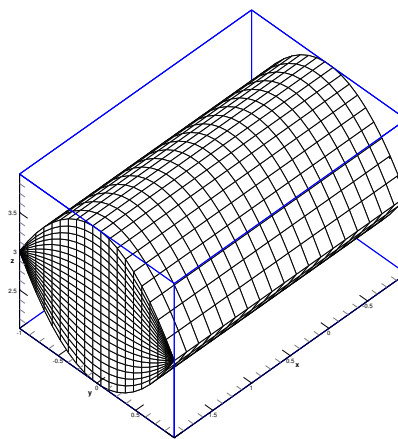
$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$

OBJEM tělesa

Určíme mezní plochy

$$\begin{aligned} x = -1 & \quad \text{rovina} \\ x = 2 & \quad \text{rovina} \\ z = 2 + y^2 & \quad \text{parabolická válcová plocha} \\ z = 4 - y^2 & \quad \text{parabolická válcová plocha} \end{aligned}$$

tedy



Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Meze proměnných x a z jsou zadány a proměnnou y určíme z půdorysu tělesa. Z obrázku je zřejmé, že půdorysem bude obdélník, jehož strany rovnoběžné s osou x tvoří průsečnice obou parabolických válcových ploch. Tedy $y^2 + 2 = 4 - y^2 \Rightarrow y = \pm 1$.

$$-1 \leq x \leq 2$$

A když to shrneme $-1 \leq y \leq 1$ na pořadí x a y při sestavování integrálu nezáleží.

$$2 + y^2 \leq z \leq 4 - y^2$$

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_{-1}^2 \left[\int_{-1}^1 \left(\int_{2+y^2}^{4-y^2} dz \right) dy \right] dx = \int_{-1}^2 \left\{ \int_{-1}^1 [z]_{2+y^2}^{4-y^2} dy \right\} dx =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in (2 + y^2; 4 - y^2)$, proto

$$= \int_{-1}^2 \left\{ \int_{-1}^1 [(4 - y^2) - (2 + y^2)] dy \right\} dx = \int_{-1}^2 \left[\int_{-1}^1 (2 - 2y^2) dy \right] dx = \int_{-1}^2 2 \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 dx =$$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in (-1; 1)$, proto

$$= \int_{-1}^2 2 \left\{ \left[1 - \frac{1^3}{3} \right] - \left[(-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right] \right\} dx = \int_{-1}^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3} \right) dx = \frac{8}{3} \int_{-1}^2 dx = \frac{8}{3} [x]_{-1}^2 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in (-1; 2)$, proto $= \frac{8}{3} \cdot [2 - (-1)] = \underline{\underline{8}}$

2. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí:}$$

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\leq 1 \\ z &\geq 0 \\ y &\geq x^2 (\geq 0) \\ z &\leq x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$$

Mezní plochy jsou tři roviny ($x = 0$; $y = 1$; $z = 0$), parabolická válcová plocha ($y = x^2$) a rotační parabolická plocha ($z = x^2 + y^2$)

Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Meze všech proměnných jsou vlastně zadány. A když to shrneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \sqrt{y} \\ 0 &\leq y \leq 1 \\ 0 &\leq z \leq x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Ale to by se potom v integrálu vyskytovala odmocnina a to je většinou nevhodné.

Proto budeme raději volit

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1 \\ x^2 &\leq y \leq 1 \\ 0 &\leq z \leq x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) dy \right] dx = \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^1 [z]_0^{x^2+y^2} dy \right\} dx =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0; x^2 + y^2 \rangle$, proto

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^1 [(x^2 + y^2) - (0)] dy \right\} dx = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy \right] dx = \\ &= \int_0^1 \left[x^2 \int_{x^2}^1 dy \right] dx + \int_0^1 \left[\int_{x^2}^1 y^2 dy \right] dx = \int_0^1 x^2 [y]_{x^2}^1 dx + \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^1 dx = \end{aligned}$$

primitivní funkce jsou spojité pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle x^2; 1 \rangle$, proto

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left\{ x^2 [(1) - (x^2)] + \frac{1}{3} [(1^3) - (x^2)^3] \right\} dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^4 dx + \frac{1}{3} \int_0^1 dx - \frac{1}{3} \int_0^1 x^6 dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 + \frac{1}{3} [x]_0^1 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \end{aligned}$$

primitivní funkce jsou spojité pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle 0; 1 \rangle$, proto

$$= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) - \left(\frac{1^5}{5} - 0 \right) + \frac{1}{3} (1 - 0) - \frac{1}{3} \left(\frac{1^7}{7} - 0 \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{21} = \frac{35 - 21 + 35 - 5}{105} = \underline{\underline{\frac{44}{105}}}$$

3. Vypočítejte trojný integrál

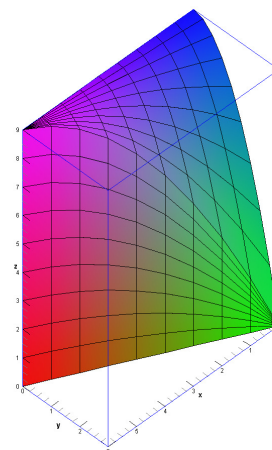
$$\iiint_{\Omega} dx dy dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí:}$$

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \\ x + 2y &\leq 6 \\ z &\leq 9 - y^2 \end{aligned}$$

$$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$$

Mezní plochy

$x = 0$	rovina	
$y = 0$	rovina	
$z = 0$	rovina	
$x + 2y = 6$	rovina	
$z = 9 - y^2$	parabolická válcová plocha	tedy



Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Meze všech proměnných jsou vlastně zadány. A když to shrneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 6 - 2y \\ 0 &\leq y \leq 3 \\ 0 &\leq z \leq 9 - y^2 \end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^3 \left[\int_0^{6-2y} \left(\int_0^{9-y^2} dz \right) dx \right] dy = \int_0^3 \left\{ \int_0^{6-2y} [z]_0^{9-y^2} dx \right\} dy =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0; 9 - y^2 \rangle$, proto

$$= \int_0^3 \left\{ \int_0^{6-2y} [(9 - y^2) - (0)] dx \right\} dy = \int_0^3 \left[\int_0^{6-2y} (9 - y^2) dx \right] dy = \int_0^3 [9x - xy^2]_0^{6-2y} dy =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle 0; 6 - 2y \rangle$, proto

$$= \int_0^3 \{ [9(6 - 2y) - (6 - 2y)y^2] - [0] \} dy = \int_0^3 (2y^3 - 6y^2 - 18y + 54) dy =$$

$$= \left[2 \cdot \frac{y^4}{4} - 6 \cdot \frac{y^3}{3} - 18 \cdot \frac{y^2}{2} + 54 \cdot y \right]_0^3 = \left[\frac{y^4}{2} - 2y^3 - 9y^2 + 54y \right]_0^3 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle 0; 3 \rangle$, proto

$$= \left(\frac{3^4}{2} - 2 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 54 \cdot 3 \right) - (0) = \frac{81 - 108 - 162 + 324}{2} = \underline{\underline{\frac{135}{2}}}$$

4. Vypočítejte trojný integrál

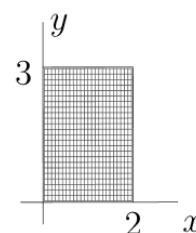
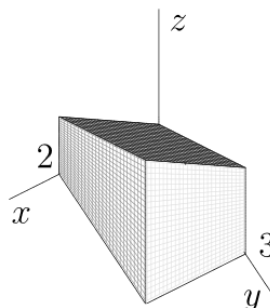
$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí:}$$

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ x &\leq 2 \\ y &\geq 0 \\ y &\leq 3 \\ z &\geq 0 \\ z &\leq x + y \end{aligned}$$

$$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$$

Mezní plochy jsou roviny

tedy



Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Meze všech proměnných jsou vlastně zadány. A když to shrneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 2 \\ 0 &\leq y \leq 3 \\ 0 &\leq z \leq x + y \end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^3 \left[\int_0^2 \left(\int_0^{x+y} (x^2 + y^2) dz \right) dx \right] dy = \int_0^3 \left\{ \int_0^2 (x^2 + y^2) [z]_0^{x+y} dx \right\} dy =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0; x + y \rangle$, proto

$$= \int_0^3 \left\{ \int_0^2 (x^2 + y^2) [(x + y) - (0)] dx \right\} dy = \int_0^3 \left[\int_0^2 (x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3) dx \right] dy =$$

$$= \int_0^3 \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} y + \frac{x^2}{2} y^2 + x y^3 \right]_0^2 dy =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle 0; 2 \rangle$, proto

$$= \int_0^3 \left[\left(\frac{2^4}{4} + \frac{2^3}{3} y + \frac{2^2}{2} y^2 + 2 y^3 \right) - 0 \right] dy = \int_0^3 \left(4 + \frac{8}{3} y + 2 y^2 + 2 y^3 \right) dy =$$

$$= \left[4y + \frac{8}{3} \cdot \frac{y^2}{2} + 2 \frac{y^3}{3} + 2 \frac{y^4}{4} \right]_0^3 = \left[4y + \frac{4}{3} y^2 + \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{2} y^4 \right]_0^3 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle 0; 3 \rangle$, proto

$$= \left(4 \cdot 3 + \frac{4}{3} \cdot 3^2 + \frac{2}{3} \cdot 3^3 + \frac{1}{2} \cdot 3^4 \right) - (0) = \frac{24 + 24 + 36 + 81}{2} = \underline{\underline{\frac{165}{2}}}$$

5. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí:}$$

$$\begin{aligned} x &\geq 1 \\ y &\geq 2 \\ z &\geq 3 \end{aligned}$$

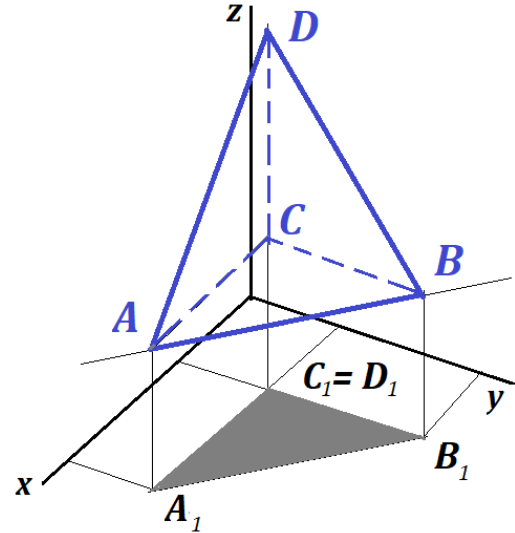
$$4x + 3y + 2z \leq 28$$

$x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}$ / **HMOTNOST** tělesa – trojný integrál z měrné hustoty materiálu

Mezní plochy jsou čtyři roviny, které vymezují čtyřstěn (trojboký jehlan) $ABCD$, přičemž souřadnice jednotlivých bodů získáme vždy jako průsečíky tří rovin.

Například bod A je průsečíkem rovin $y = 2 \cap z = 3 \cap 4x + 3y + 2z = 28$

Souřadnice vrcholů: $A = [4; 2; 3]$
 $B = [1; 6; 3]$
 $C = [1; 2; 3]$
 $D = [1; 2; 9]$



Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Symbolicky: x -ová souřadnice $C_1 \leq x \leq x$ -ová souřadnice $A_1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 4$

úsečka $A_1C_1 \leq y \leq$ úsečka A_1B_1 ($z = 3$) $2 \leq y \leq \frac{1}{3}(22 - 4x)$

$\Delta ABC \leq z \leq \Delta ABD$ $3 \leq z \leq \frac{1}{2}(28 - 4x - 3y)$

$$\iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz = \int_1^4 \left\{ \int_2^{\frac{1}{3}(22-4x)} \left[\int_3^{14-2x-\frac{3y}{2}} x \, dz \right] dy \right\} dx = \int_1^4 \left\{ \int_2^{\frac{1}{3}(22-4x)} x [z]_3^{14-2x-\frac{3y}{2}} dy \right\} dx =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 3; 14 - 2x - \frac{3y}{2} \rangle$, proto

$$\begin{aligned} &= \int_1^4 \left\{ \int_2^{\frac{1}{3}(22-4x)} x \left[\left(14 - 2x - \frac{3y}{2} \right) - (3) \right] dy \right\} dx = \int_1^4 \left[\int_2^{\frac{1}{3}(22-4x)} \left(11x - 2x^2 - \frac{3x}{2}y \right) dy \right] dx = \\ &= \int_1^4 \left\{ 11x [y]_2^{\frac{1}{3}(22-4x)} - 2x^2 [y]_2^{\frac{1}{3}(22-4x)} - \frac{3x}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_2^{\frac{1}{3}(22-4x)} \right\} dx = \end{aligned}$$

primitivní funkce jsou spojitě pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle 2; \frac{1}{3}(22 - 4x) \rangle$, proto

$$= \int_1^4 \left\{ 11x \left[\frac{1}{3}(22 - 4x) - 2 \right] - 2x^2 \left[\frac{1}{3}(22 - 4x) - 2 \right] - \frac{3x}{4} \left[\left(\frac{22 - 4x}{3} \right)^2 - 2^2 \right] \right\} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^4 \left[\frac{242x}{3} - \frac{44x^2}{3} - 22x - \frac{44x^2}{3} + \frac{8x^3}{3} + 4x^2 - \frac{x}{12} \cdot (484 - 176x + 16x^2) + 3x \right] dx = \\
&= \int_1^4 \left(\frac{8-4}{3} \cdot x^3 + \frac{-44-44+12+44}{3} \cdot x^2 + \frac{242-66-121+9}{3} \cdot x \right) dx = \\
&= \int_1^4 \left(\frac{4}{3} \cdot x^3 - \frac{32}{3} \cdot x^2 + \frac{64}{3} \cdot x \right) dx = \frac{4}{3} \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^4 - \frac{32}{3} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 + \frac{64}{3} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^4 =
\end{aligned}$$

primitivní funkce jsou spojité pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle 1; 4 \rangle$, proto

$$= \frac{1}{3} \cdot (256 - 1) - \frac{32}{9} \cdot (64 - 1) + \frac{32}{3} \cdot (16 - 1) = \frac{255 - 32 \cdot 21 + 32 \cdot 15}{3} = \underline{\underline{21}}$$

6. Vypočítejte trojný integrál

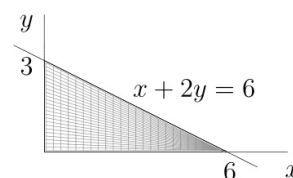
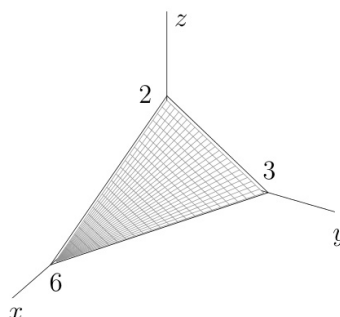
$$\iiint_{\Omega} dx dy dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí:}$$

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \\ x + 2y + 3z &\leq 6 \end{aligned}$$

$$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$$

Mezní plochy

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad \text{rovina} \\ y = 0 & \quad \text{rovina} \\ z = 0 & \quad \text{rovina} \\ x + 2y + 3z = 6 & \quad \text{rovina} \end{aligned} \quad \text{tedy}$$



Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

$$0 \leq x \leq 6 - 2y$$

Meze všech proměnných jsou vlastně zadány. A když to shrneme

$$0 \leq y \leq 3$$

$$0 \leq z \leq 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y$$

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^3 \left[\int_0^{6-2y} \left(\int_0^{2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y} dz \right) dx \right] dy = \int_0^3 \left\{ \int_0^{6-2y} [z]_0^{2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y} dx \right\} dy =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0; 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \rangle$, proto

$$= \int_0^3 \left\{ \int_0^{6-2y} \left[\left(2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right) - (0) \right] dx \right\} dy = \int_0^3 \left[\int_0^{6-2y} \frac{6-x-2y}{3} dx \right] dy = \int_0^3 \left[\frac{6x - \frac{1}{2}x^2 - 2xy}{3} \right]_0^{6-2y} dy =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle 0; 6 - 2y \rangle$, proto

$$= \int_0^3 \frac{6 \cdot (6-2y) - \frac{1}{2} \cdot (6-2y)^2 - 2 \cdot (6-2y) \cdot y}{3} dy = \frac{1}{3} \int_0^3 (2y^2 - 12y + 18) dy =$$

$$= \frac{1}{3} \left[2 \cdot \frac{y^3}{3} - 12 \cdot \frac{y^2}{2} + 18 \cdot y \right]_0^3 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle 0; 3 \rangle$, proto

$$= \frac{1}{3} \left[\left(2 \cdot \frac{3^3}{3} - 12 \cdot \frac{3^2}{2} + 18 \cdot 3 \right) - (0) \right] = \frac{18 - 54 + 54}{3} = \underline{\underline{6}}$$

7. Vypočítejte trojný integrál

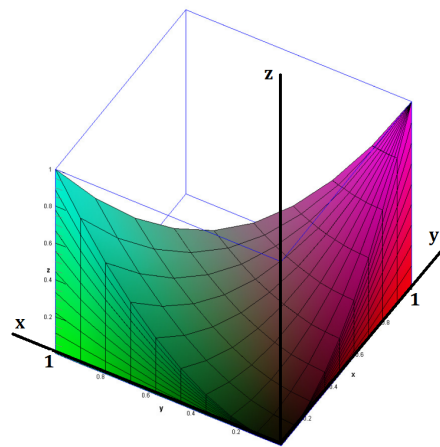
$$\iiint_{\Omega} dx dy dz, \quad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí:}$$

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \\ x + y &\leq 1 \\ z &\leq x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$$

Mezní plochy

$x = 0$	rovina	
$y = 0$	rovina	
$z = 0$	rovina	
$x + y = 1$	rovina	
$z = x^2 + y^2$	rotační paraboloid	tedy



Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Meze všech proměnných jsou vlastně zadány. A když to shrneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1 \\ 0 &\leq y \leq 1 - x \\ 0 &\leq z \leq x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) dy \right] dx = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} [z]_0^{x^2+y^2} dy \right\} dx =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0; x^2 + y^2 \rangle$, proto

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} [(x^2 + y^2) - (0)] dy \right\} dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy \right] dx = \int_0^1 \left\{ x^2 [y]_0^{1-x} + \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} \right\} dx =$$

primitivní funkce jsou spojitě pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle 0; 1 - x \rangle$, proto

$$= \int_0^1 \left\{ x^2 [(1-x) - (0)] + \frac{1}{3} [(1-x)^3 - (0)] \right\} dx = \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3} \right) dx = -\frac{4}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \frac{1}{3} [x]_0^1 =$$

primitivní funkce jsou spojitě pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle 0; 1 \rangle$, proto

$$= -\frac{4}{3} \left[\left(\frac{1}{4} \right) - (0) \right] + 2 \left[\left(\frac{1}{3} \right) - (0) \right] - \left[\left(\frac{1}{2} \right) - (0) \right] + \frac{1}{3} [(1) - (0)] = \frac{-2 + 4 - 3 + 2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$