Příklad. Integrujte

$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_{0}^{x} xy\sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Příklad. Integrujte

$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_{0}^{x} xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \displaystyle\int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$

Příklad. Integrujte
$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Potom použitím substituční metody dostáváme (barvy ukazují vazby mezi jednotlivými výrazy)

$$F(x) \quad = \quad x\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,y\mathrm{d}y =$$

Příklad. Integrujte
$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Potom použitím substituční metody dostáváme (barvy ukazují vazby mezi jednotlivými výrazy)

$$F(x) \quad = \quad x\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, y\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{rcl} t & = & x^2+y^2 \\ & & \\ & & \end{array} \right.$$

Příklad. Integrujte
$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Potom použitím substituční metody dostáváme (barvy ukazují vazby mezi jednotlivými výrazy)

$$F(x) = x\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,y\mathrm{d}y = \quad \left| \begin{array}{rcl} t &=& x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t &=& 2y\,\mathrm{d}y \end{array} \right.$$

Příklad. Integrujte

$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Potom použitím substituční metody dostáváme (barvy ukazují vazby mezi jednotlivými výrazy)

$$F(x) = x\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, y\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{rcl} t &=& x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t &=& 2y\,\mathrm{d}y \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}t &=& y\mathrm{d}y \end{array} \right.$$

Příklad. Integrujte

$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \displaystyle\int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Potom použitím substituční metody dostáváme (barvy ukazují vazby mezi jednotlivými výrazy)

$$F(x) \quad = \quad x\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, y\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{rcl} t & = & x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t & = & 2y\ \mathrm{d}y \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}t & = & y\mathrm{d}y \\ y \to 0 & \Rightarrow & t \to x^2 \\ & & \end{array} \right.$$

Příklad. Integrujte

$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \displaystyle\int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Potom použitím substituční metody dostáváme (barvy ukazují vazby mezi jednotlivými výrazy)

$$F(x) \quad = \quad x\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, y\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{rcl} t & = & x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t & = & 2y\,\mathrm{d}y \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}t & = & y\mathrm{d}y \\ y \to 0 & \Rightarrow & t \to x^2 \\ y \to x & \Rightarrow & t \to 2x^2 \end{array} \right| =$$

Příklad. Integrujte

$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_{0}^{x} xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \displaystyle\int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Potom použitím substituční metody dostáváme (barvy ukazují vazby mezi jednotlivými výrazy)

$$F(x) = x\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,y\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{rcl} t & = & x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t & = & 2y\,\mathrm{d}y \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}t & = & y\mathrm{d}y \\ y \to 0 & \Rightarrow & t \to x^2 \\ y \to x & \Rightarrow & t \to 2x^2 \end{array} \right| = x\int_{x^2}^{2x^2} \sqrt{t}\,\frac{\mathrm{d}y}{2}$$

$$=$$

Příklad. Integrujte

$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Potom použitím substituční metody dostáváme (barvy ukazují vazby mezi jednotlivými výrazy)

$$F(x) = x\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,y\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{rcl} t & = & x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t & = & 2y\,\mathrm{d}y \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}t & = & y\mathrm{d}y \\ y \to 0 & \Rightarrow & t \to x^2 \\ y \to x & \Rightarrow & t \to 2x^2 \end{array} \right| = x\int_{x^2}^{2x^2} \sqrt{t}\,\frac{\mathrm{d}y}{2}$$

$$= \frac{x}{2}\int_{x^2}^{2x^2} t^{1/2}\mathrm{d}t =$$

Příklad. Integrujte
$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Potom použitím substituční metody dostáváme (barvy ukazují vazby mezi jednotlivými výrazy)

$$F(x) = x\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,y\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{rcl} t & = & x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t & = & 2y\,\mathrm{d}y \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}t & = & y\mathrm{d}y \\ y\to 0 & \Rightarrow & t\to x^2 \\ y\to x & \Rightarrow & t\to 2x^2 \end{array} \right| = x\int_{x^2}^{2x^2} \sqrt{t}\,\frac{\mathrm{d}y}{2}$$

$$= \frac{x}{2}\int_{x^2}^{2x^2} t^{1/2}\mathrm{d}t = \frac{x}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{2x^2} =$$

Příklad. Integrujte

$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_{0}^{x} xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Potom použitím substituční metody dostáváme (barvy ukazují vazby mezi jednotlivými výrazy)

$$F(x) = x\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,y\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{rcl} t & = & x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t & = & 2y\,\mathrm{d}y \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}t & = & y\mathrm{d}y \\ y \to 0 & \Rightarrow & t \to x^2 \\ y \to x & \Rightarrow & t \to 2x^2 \end{array} \right| = x\int_{x^2}^{2x^2} \sqrt{t}\,\frac{\mathrm{d}y}{2}$$

$$= \frac{x}{2}\int_{x^2}^{2x^2} t^{1/2}\mathrm{d}t = \frac{x}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{2x^2} = \frac{x}{3}\left(\left(2x^2\right)^{\frac{3}{2}} - x^3\right) =$$

Příklad. Integrujte

$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_{0}^{x} xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Potom použitím substituční metody dostáváme (barvy ukazují vazby mezi jednotlivými výrazy)

$$F(x) = x\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,y\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{rcl} t & = & x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t & = & 2y\,\mathrm{d}y \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}t & = & y\mathrm{d}y \\ y \to 0 & \Rightarrow & t \to x^2 \\ y \to x & \Rightarrow & t \to 2x^2 \end{array} \right| = x\int_{x^2}^{2x^2} \sqrt{t}\,\frac{\mathrm{d}y}{2}$$

$$= \frac{x}{2}\int_{x^2}^{2x^2} t^{1/2}\mathrm{d}t = \frac{x}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{2x^2} = \frac{x}{3}\left(\left(2x^2\right)^{\frac{3}{2}} - x^3\right) = \frac{x^4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

S použitím předchozího výpočtu dostáváme

$$I =$$

Příklad. Integrujte

$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_{0}^{x} xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Potom použitím substituční metody dostáváme (barvy ukazují vazby mezi jednotlivými výrazy)

$$F(x) = x\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,y\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{rcl} t & = & x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t & = & 2y\,\mathrm{d}y \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}t & = & y\mathrm{d}y \\ y\to 0 & \Rightarrow & t\to x^2 \\ y\to x & \Rightarrow & t\to 2x^2 \end{array} \right| = x\int_{x^2}^{2x^2} \sqrt{t}\,\frac{\mathrm{d}y}{2}$$

$$= \frac{x}{2}\int_{x^2}^{2x^2} t^{1/2}\mathrm{d}t = \frac{x}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{2x^2} = \frac{x}{3}\left(\left(2x^2\right)^{\frac{3}{2}} - x^3\right) = \frac{x^4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

S použitím předchozího výpočtu dostáváme

$$I = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\int_{-1}^{0} x^4\,\mathrm{d}x =$$

Příklad. Integrujte

$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_{0}^{x} xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \displaystyle\int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Potom použitím substituční metody dostáváme (barvy ukazují vazby mezi jednotlivými výrazy)

$$F(x) = x\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,y\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{rcl} t & = & x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t & = & 2y\,\mathrm{d}y \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}t & = & y\mathrm{d}y \\ y \to 0 & \Rightarrow & t \to x^2 \\ y \to x & \Rightarrow & t \to 2x^2 \end{array} \right| = x\int_{x^2}^{2x^2} \sqrt{t}\,\frac{\mathrm{d}y}{2}$$

$$= \frac{x}{2}\int_{x^2}^{2x^2} t^{1/2}\mathrm{d}t = \frac{x}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{2x^2} = \frac{x}{3}\left(\left(2x^2\right)^{\frac{3}{2}} - x^3\right) = \frac{x^4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

S použitím předchozího výpočtu dostáváme

$$I = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\int_{-1}^{0} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{2}-1}{15}\left[x^5\right]_{-1}^{0} =$$

Příklad. Integrujte

$$I = \int_{-1}^{0} \left[\int_{0}^{x} xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Řešení. Označme vnitřní integrál $F(x) := \int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Potom použitím substituční metody dostáváme (barvy ukazují vazby mezi jednotlivými výrazy)

$$F(x) = x\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,y\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{rcl} t & = & x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t & = & 2y\,\mathrm{d}y \\ \frac{1}{2}\mathrm{d}t & = & y\mathrm{d}y \\ y \to 0 & \Rightarrow & t \to x^2 \\ y \to x & \Rightarrow & t \to 2x^2 \end{array} \right| = x\int_{x^2}^{2x^2} \sqrt{t}\,\frac{\mathrm{d}y}{2}$$

$$= \frac{x}{2}\int_{x^2}^{2x^2} t^{1/2}\mathrm{d}t = \frac{x}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{2x^2} = \frac{x}{3}\left(\left(2x^2\right)^{\frac{3}{2}} - x^3\right) = \frac{x^4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

S použitím předchozího výpočtu dostáváme

$$I = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\int_{-1}^{0} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{2}-1}{15}\left[x^5\right]_{-1}^{0} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}-1}{15}}}.$$