VYSOKÁ ŠKOLA KARLA ENGLIŠE a.s.

MAT 2 — **DERIVACE**

aplikace, vlastnosti, vzorce;   neurčité výrazy

Studijní materiály

Brno 2013   RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Protože (vlastní) derivace f' funkce $f(x)$ v x_0 je **vlastní** limita[1] $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, pak tečna a normála ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_0; y_0]$ mají následující rovnice:

Tečna $$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Normála $$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \qquad \text{pro } f'(x_0) \neq 0 \ .$$

Dále pro první a druhou derivaci a původní funkci platí:

Když $f'(x_0) > 0$ funkce $f(x)$ v okolí bodu $[x_0; y_0]$ **roste** $\nearrow$

Když $f'(x_0) < 0$ funkce $f(x)$ v okolí bodu $[x_0; y_0]$ **klesá** $\searrow$

Když $f''(x_0) > 0$ funkce $f(x)$ je v okolí bodu $[x_0; y_0]$ **konVexní** $\smile$ (graf je NAD tečnou)

Když $f''(x_0) < 0$ funkce $f(x)$ je v okolí bodu $[x_0; y_0]$ **konkÁvní** $\frown$ (graf je POD tečnou)

---

[1] Graficky viz: KUBEN, J., ŠARMANOVÁ, P. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Ostrava : Vysoká škola báňská – – Technická univerzita Ostrava, 2006, 351 s. ISBN 80–248–1192–8. ⟨http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/dp/animace/kap07/kap7_anim1.swf⟩

Další vlastnosti (prvních) derivací

- Pokud má funkce $f(x)$ derivaci $f'(x_0)$ ve vlastním bodě x_0, musí být definovaná v tomto bodě x_0 a nějakém jeho okolí.
- Pokud má funkce $f(x)$ **vlastní** derivaci $f'(x_0)$ ve **vlastním** bodě x_0, musí být v tomto bodě **spojitá**.

  Analogické tvrzení platí pro jednostranné derivace a jednostranné spojitosti.

  Opačné tvrzení nemusí platit!
  Funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0 nemusí mít v tomto bodě derivaci $f'(x_0)$.
- Pokud má funkce $f(x)$ **nevlastní** derivaci $f'(x_0) = \pm\infty$ v nějakém bodě x_0, pak může být v tomto bodě spojitá, ale nemusí.
- Pokud funkce $f(x)$ v nějakém bodě x_0 nemá derivaci $/f'(x_0)$ neexistuje/, pak může, ale nemusí být v tomto bodě spojitá.

$(\text{konst.})' = 0$ Pokud jsou funkce **definovány** a derivace jsou **vlastní**, pak:

$[k \cdot f(x)]' = k \cdot [f(x)]'$ kde k je *libovolné konečné* číslo (konstanta)

$$[f(x) + g(x)]' = [f(x)]' + [g(x)]'$$

$$[f(x) - g(x)]' = [f(x)]' - [g(x)]'$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = [f(x)]' \cdot g(x) + f(x) \cdot [g(x)]'$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{[f(x)]' \cdot g(x) - f(x) \cdot [g(x)]'}{[g(x)]^2} \qquad \text{kde } g(x) \neq 0$$

$x' = 1$ $\qquad [\,(\;)^n]' = n \cdot (\;)^{n-1} \cdot (\;)'$: když

- n je reálné čís., pak musí být $(\;) > 0$
- n je celé číslo, pak musí být $(\;) \neq 0$
- n je přirozené č., pak musí být $(\;)$ reálné č.

$$\left[\mathrm{e}^{(\;)}\right]' = \mathrm{e}^{(\;)} \cdot (\;)'$$

$$\left[k^{(\;)}\right]' = k^{(\;)} \cdot \ln k \cdot (\;)'$$

$$[\ln (\;)]' = \frac{1}{(\;)} \cdot (\;)'$$

$$\underset{0<a\neq 1}{[\log_a (\;)]'} = \frac{1}{(\;) \cdot \ln a} \cdot (\;)'$$

$$[\sin (\;)]' = \cos (\;) \cdot (\;)'$$

$$[\cos (\;)]' = -\sin (\;) \cdot (\;)'$$

$$[\mathrm{tg} (\;)]' = \frac{1}{[\cos (\;)]^2} \cdot (\;)'$$

$$[\mathrm{cotg} (\;)]' = \frac{-1}{[\sin (\;)]^2} \cdot (\;)'$$

$$[\arcsin (\;)]' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\;)^2}} \cdot (\;)'$$

$$[\arccos (\;)]' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\;)^2}} \cdot (\;)'$$

$$[\mathrm{arctg} (\;)]' = \frac{1}{1 + (\;)^2} \cdot (\;)'$$

$$[\mathrm{arccotg} (\;)]' = \frac{-1}{1 + (\;)^2} \cdot (\;)'$$

L'Hospitalovo pravidlo

Pokud je splněna jedna z podmínek

buď $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

nebo $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ / $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ je libovolná, nebo nemusí existovat /

a navíc existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ pak také existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

L'Hospitalovo pravidlo říká, že se limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ dá v případě, že se jedná o limitu typu $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ nebo typu $\left[\dfrac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}\right]$ nahradit limitou $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ za předpokladu, že tato druhá limita existuje (může být i nevlastní).

U l'Hospitalova pravidla je obvyklé vícenásobné použití. Dostaneme-li po derivování opět limitu podílu a jsou-li splněny výše uvedené podmínky, můžeme znovu zderivovat čitatele a jmenovatele atd.

Neurčité výrazy

$\{\boldsymbol{x}\}$ má význam, že se přibližujeme libovolně blízko (těsně) k výrazu $\boldsymbol{x}$.

kkc je **konečné** (vlastní) **kladné číslo** ($kkc > 0$)

			NEURČITÉ VÝRAZY
$\{0\} + \{0\} = \{0\}$	$\{\infty\} + \{\infty\} = \{\infty\}$	$\{0\} + \{\infty\} = \{\infty\}$	$\{\infty\} - \{\infty\}$
$\{0\} + kkc = \{kkc\}$	$\{\infty\} + kkc = \{\infty\}$	$\dfrac{\{0\}}{\{\infty\}} = \{0\}$	
$\{0\} \cdot \{0\} = \{0\}$	$\{\infty\} \cdot \{\infty\} = \{\infty\}$	$\dfrac{\{\infty\}}{\{0^+\}} = \{\infty\}$	$\{0\} \cdot \{\infty\}$
$\{0\} \cdot kkc = \{0\}$	$\{\infty\} \cdot kkc = \{\infty\}$	$\dfrac{\{\infty\}}{\{0^-\}} = \{-\infty\}$	$\{1\}^{\{\infty\}}$
$\{0\}^{kkc} = \{0\}$	$\{\infty\}^{kkc} = \{\infty\}$	$\{0\}^{\{\infty\}} = \{0\}$	$\{\infty\}^{\{0\}}$
$(kkc)^{\{0\}} = \{1\}$	$(kkc > 1)^{\{\infty\}} = \{\infty\}$	$(kkc < 1)^{\{\infty\}} = \{0\}$	$\{0\}^{\{0\}}$
$\dfrac{\{0\}}{kkc} = \{0\}$	$\dfrac{\{\infty\}}{kkc} = \{\infty\}$	$\dfrac{kkc}{\{\infty\}} = \{0\}$	$\dfrac{\{0\}}{\{0\}}$
	$\dfrac{kkc}{\{0^+\}} = \{\infty\}$	$\dfrac{kkc}{\{0^-\}} = \{-\infty\}$	$\dfrac{\{\infty\}}{\{\infty\}}$