



VYSOKÁ ŠKOLA KARLA ENGLIŠE a.s.

MAT 2 — INTEGRÁLY

primitivní funkce, určitý integrál, vlastnosti, vzorce

Studijní materiály

Vlastnosti integrálů

K funkci **$f(x)$** , která je ***spojitá*** na intervalu $(a; b)$, ***existuje*** na tomto intervalu primitivní funkce **$F(x)$** a tedy neurčitý integrál: $\int f(x) dx$

Platí:

$$\int [a \cdot f(x) + b \cdot g(x)] dx = a \cdot \int f(x) dx + b \cdot \int g(x) dx$$

Pokud **c** je konstanta (\Rightarrow libovolné reálné číslo), píšeme:

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ **spojitá** v $\langle a; b \rangle$, potom určitý integrál vypočítáme:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \stackrel{\text{spoj. v } (a; b)}{=} \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$$

$$a \leq c \leq b \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\int 0 \, dx = c, \quad \boxed{\text{kde } c \text{ je konstanta}}$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c, \quad \text{pro } x \neq 0$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c, \quad f(x) \neq 0$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c, \quad \sin x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c, \quad \cos x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c, \quad x \in (-1; 1)$$

Metoda „PER PARTES“

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v \qquad \int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx$$

Integrovaní parciálních zlomků

$$a, p, q, A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$$

Reálný (jednonásobný) kořen

$$\int \frac{A}{x - a} \, dx = A \cdot \ln |x - a| + c, \quad \text{pro } x \neq a$$

Reálný kořen s násobností $n > 1$

$$\int \frac{B}{(x - a)^n} \, dx = \frac{B}{(1 - n) \cdot (x - a)^{n-1}} + c, \quad \text{pro } x \neq a$$

Komplexně sdružené (jednonásobné) kořeny: $p^2 - 4q < 0$

$$\int \frac{C \cdot x + D}{x^2 + p \cdot x + q} dx = \frac{C}{2} \cdot \ln(x^2 + p \cdot x + q) + \frac{2D - Cp}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}$$

Komplexně sdružené kořeny ($p^2 - 4q < 0$) **s násobností** $n > 1$

$$\begin{aligned} \int \frac{E \cdot x + F}{(x^2 + p \cdot x + q)^n} dx &= \frac{(2F - Ep) \cdot x + Fp - 2Eq}{(n - 1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{n-1}} + \\ &+ \frac{(2n - 3)(2F - Ep)}{(n - 1)(4q - p^2)} \cdot \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} dx + c \end{aligned}$$