Dynamika hmotného bodu — řešené příklady

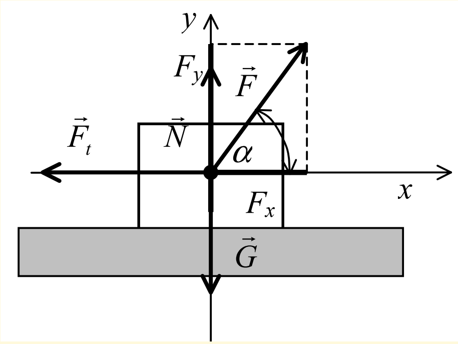
Příklad 1. Na těleso o hmotnosti 1 kg, které se pohybuje po vodorovné rovině, působí síla 10 N. Síla svírá s vodorovnou rovinou úhel 60°. S jakým zrychlením se těleso pohybuje, je-li velikost součinitele smykového tření tělesa s rovinou 0,579?

Řešení:

$m = 1$ kg
$F = 50$ N
$k = 0{,}579$
$\alpha = 60°$
$a = ?$

Dle situace na obrázku lze psát pohybovou rovnici tělesa:

$$\vec{F}_t + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$



Pravoúhlé průměty sil do osy

x: $\quad -F_t + F_x = m \cdot a$
y: $\quad N - G + F_y = 0$

Řešíme tuto soustavu dvou rovnic.

Dosadíme: $G = m \cdot g, \quad F_t = k \cdot N, \quad F_x = F \cdot \cos\alpha, \quad F_y = F \cdot \sin\alpha.$

Dostáváme: x: $\quad -k \cdot N + F \cdot \cos\alpha = m \cdot a$
y: $\quad N - m \cdot g + F \cdot \sin\alpha = 0 \implies N = m \cdot g - F \cdot \sin\alpha$

Dosadíme do první rovnice

$$-k\cdot(m\cdot g - F\cdot\sin\alpha) + F\cdot\cos\alpha = m\cdot a \implies a = \frac{-k\cdot(m\cdot g - F\cdot\sin\alpha) + F\cdot\cos\alpha}{m}$$

Numerické řešení:

$$a = \frac{-0,579\cdot(1\cdot 9,81 - 10\cdot\sin 60°) + 10\cdot\cos 60°}{1} = 4,33 \ \ \mathrm{m.s^{-2}}$$

Těleso se pohybuje se zrychlením 4,33 m.s^{-2}.

KONEC 1. příkladu.

FYZIKA
Dynamika hmotného bodu
Řešené příklady
s využitím programu LaTeX a pdfscreen

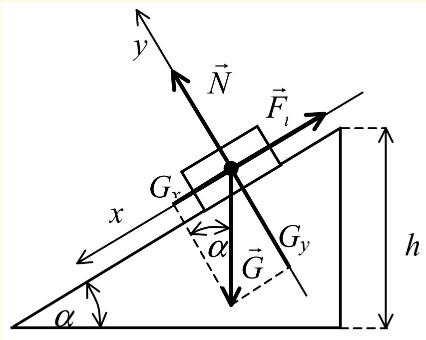
Miroslav KOMÁREK
Rudolf SCHWARZ
Brno 2004

Příklad 2. Po nakloněné rovině délky 4 m, která s vodorovnou rovinou svírá úhel 30°, klouže bedna o hmotnosti 5 kg. Celou dráhu urazí za 4,5 s. Určete, jakou potenciální energii měla bedna v nejvyšším bodě nakloněné roviny a jakou kinetickou energii má po sesunutí na vodorovnou rovinu. Určete součinitel smykového tření mezi bednou a nakloněnou rovinou.

Řešení:

$$\begin{aligned} s &= 4\ \text{m} \\ \alpha &= 30^\circ \\ m &= 5\ \text{kg} \\ t &= 4{,}5\ \text{s} \\ E_p &= ? \\ E_k &= ? \\ k &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_p &= m \cdot g \cdot h \\ \frac{h}{s} &= \sin\alpha \\ E_p &= m \cdot g \cdot h \cdot \sin\alpha \\ E_p &= 5 \cdot 9,81 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 98,1\ \text{J} \end{aligned}$$



Pohyb tělesa po nakloněné rovině je rovnoměrně zrychlený, platí:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (\text{protože } s_0 = 0 \text{ a } v_0 = 0). \text{ Tedy} \quad a = \frac{2 \cdot s}{t^2}, \quad v = a \cdot t = \frac{2 \cdot s}{t}$$

Pak

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{2 \cdot m \cdot s^2}{t^2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 4^2}{4,5^2} = 7,9\ \text{J}$$

Pohybová rovnice pro těleso na nakloněné rovině má tvar

$$\begin{aligned} & \vec{N} + \vec{F}_t + \vec{G} = m \cdot \vec{a} \\ x: \quad & -F_t + G_x = m \cdot a \\ y: \quad & N - G_y = 0 \end{aligned}$$

Řešíme tuto soustavu dvou rovnic. Dosadíme (viz obr.):

$F_t = k \cdot N, \quad G_x = G \cdot \sin\alpha, \quad G_y = G \cdot \cos\alpha$

Pohyb tělesa po vodorovné rovině
Pohyb tělesa po nakloněné rovině
Zavěšené těleso
Konec
Acrobat Reader
zobrazení jediné stránky
zobrazení ikon [F8]
nabídka [F9]
celá obrazovka [Ctrl]+[L]

Dostáváme: x: $-k \cdot N + G \cdot \sin\alpha = m \cdot a$

y: $\underline{N - G \cdot \cos\alpha = 0}$ $\Longrightarrow$ $N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$

Dosadíme do první rovnice

$$-k \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha + m \cdot g \cdot \sin\alpha = m \cdot a \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{g \cdot \sin\alpha - a}{g \cdot \cos\alpha} = \frac{g \cdot \sin\alpha - \frac{2 \cdot s}{t^2}}{g \cdot \cos\alpha}$$

Po numerickém dosazení: $k = 0{,}53$

Bedna v nejvyšším bodě nakloněné roviny měla potenciální energii 98,1 J.

Po sesunutí na vodorovnou rovinu měla kinetickou energii 7,9 J.

Součinitel smykového tření tělesa s nakloněnou rovinou je 0,53.

KONEC 2. příkladu.

Miroslav KOMÁREK
Rudolf SCHWARZ
Brno 2004

Příklad 3. Těleso o hmotnosti 6,3 kg, které je zavěšeno na niti délky 1 m, vykonává kruhový pohyb v horizontální rovině. Určete tah niti a úhel, který svírá nit s vertikální přímkou, jestliže pohyb bodu po kružnici je popsán rovnicí $s = 3,134 \cdot t$ ($g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$).

Řešení:

$m = 6{,}3$ kg
$l = 1$ m
$s = 3{,}134 \cdot t$
$T = ?$
$\alpha = ?$

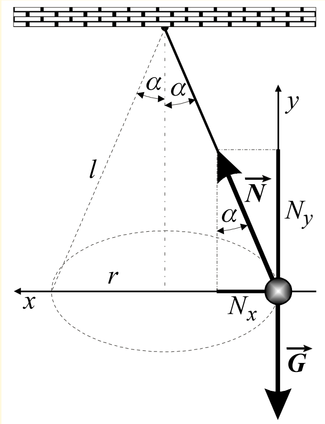
Těleso koná rovnoměrný pohyb po kružnici, neboť rychlost pohybu tělesa je

$$v = \frac{ds}{dt} = 3,134\ \mathrm{ms^{-1}}$$

a to je konstanta ($\vec{a} = \vec{a}_n = \overrightarrow{\text{konst}}$.).

Pohybová rovnice tělesa je

$$\vec{N} + \vec{G} = m \cdot \vec{a}$$



Určíme pravoúhlé průměty vektorů $\vec{N}$, $\vec{G}$ a $\vec{a}$ do os x a y.

($\vec{a}_n$ je vektor normálového resp. dostředivého zrychlení, který leží ve směru osy x)

$$\begin{aligned} x:&\quad N_x = m \cdot a_n \\ y:&\quad N_y - G = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Řešíme tuto soustavu dvou rovnic.

Protože
$$\frac{N_x}{N} = \sin\alpha \implies N_x = N \cdot \sin\alpha$$
$$\frac{N_y}{N} = \cos\alpha \implies N_y = N \cdot \cos\alpha$$
$$G = m \cdot g \quad , \quad a_n = \frac{v^2}{r}$$

můžeme soustavu rovnic (1) přepsat v následujícím tvaru:

Miroslav KOMÁREK
Rudolf SCHWARZ
Brno 2004

$$\begin{aligned} N \cdot \sin\alpha &= m \cdot \frac{v^2}{r} \\ N \cdot \cos\alpha &= m \cdot g \end{aligned} \tag{2}$$

Vydělíme levé a pravé strany rovnice a obdržíme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{r \cdot g} \tag{3}$$

Z pravoúhlého trojúhelníka: $r = l \cdot \sin\alpha$

Po dosazení do (3): $$\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{l \cdot g} = \frac{3,134^2}{1 \cdot 9,81} = 1,001 \doteq 1 \tag{4}$$

Dále platí: $$\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$$

Po dosazení do (4):
$$\begin{aligned} \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} &= 1 \qquad \Big| \cdot \cos\alpha \\ 1-\cos^2\alpha &= \cos\alpha \\ \cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 &= 0 \end{aligned}$$
což je kvadratická rovnice.

Tedy: $$\cos\alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Což vede na jediné řešení: $\cos\alpha_1 = 0,618 \Longrightarrow \alpha = 51,827^\circ = 51^\circ 50'$

Tah niti je stejně velký jako velikost síly N (zákon akce a reakce).

Takže z druhé rovnice (2): $$T = N = \frac{m \cdot g}{\cos\alpha} = \frac{6,3 \cdot 9,81}{51,827} = 99,999 \doteq 100\ \mathrm{N}$$

Nit svírá s vertikální přímkou úhel $51^\circ 50'$ a tah v niti je 100 N.

KONEC 3. příkladu.

Miroslav KOMÁREK
Rudolf SCHWARZ
Brno 2004