Příklad. Je dána funkce předpisem

$$f\;:\;\;y=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Určete definiční obor funkce D_f, předpis derivace f' a definiční obor derivace $D_{f'}$.

Příklad. Je dána funkce předpisem

$$f\ :\ \ y = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Určete definiční obor funkce D_f, předpis derivace f' a definiční obor derivace $D_{f'}$.

Řešení. Z vlastností logaritmické funkce plyne:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R};\ \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \right\},$$

Příklad. Je dána funkce předpisem

$$f\,:\;\; y = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Určete definiční obor funkce D_f, předpis derivace f' a definiční obor derivace $D_{f'}$.

Řešení. Z vlastností logaritmické funkce plyne:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R};\; \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \right\},$$

tedy množinu D_f budeme hledat jako řešení nerovnice $1 - x^2 > 0 \Rightarrow D_f =$

Příklad. Je dána funkce předpisem

$$f\,:\;\; y = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Určete definiční obor funkce D_f, předpis derivace f' a definiční obor derivace $D_{f'}$.

Řešení. Z vlastností logaritmické funkce plyne:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R};\ \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \right\},$$

tedy množinu D_f budeme hledat jako řešení nerovnice $1-x^2 > 0 \Rightarrow D_f = (-1; 1)$.

Příklad. Je dána funkce předpisem

$$f\ :\ \ y = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Určete definiční obor funkce D_f, předpis derivace f' a definiční obor derivace $D_{f'}$.

Řešení. Z vlastností logaritmické funkce plyne:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R};\ \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \right\},$$

tedy množinu D_f budeme hledat jako řešení nerovnice $1 - x^2 > 0 \Rightarrow D_f = (-1; 1)$.

V dalším budeme derivovat funkci f.

Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$y' = \left(\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' \overset{(?)}{=}$$

Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$y' = \left(\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' \overset{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' =$$

$$\overset{(?)}{=}$$

Počítejme

$$y' = \left(\ln \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' \overset{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' =$$

$$\overset{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{\left(1-x^2\right)'\left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$\overset{(?)}{=}$$

Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\ln \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' \overset{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \\
&\overset{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{\left(1-x^2\right)'\left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \\
&\overset{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot \left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \\
&=
\end{aligned}
$$

Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\ln \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' \overset{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \\
&\overset{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{\left(1-x^2\right)'\left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \\
&\overset{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot \left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \\
&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot \left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)} = \\
&=
\end{aligned}
$$

Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$y' = \left(\ln \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' \overset{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' =$$

$$\overset{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{\left(1-x^2\right)'\left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$\overset{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot \left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot \left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{1+x^2} =$$

$$=$$

Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\ln \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' \overset{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \\
&\overset{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{\left(1-x^2\right)'\left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \\
&\overset{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot \left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \\
&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot \left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)} = \\
&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{1+x^2} = \\
&= \frac{-4x}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{4x}{x^4-1}.
\end{aligned}
$$

Počítejme

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\ln \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' \overset{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \\
&\overset{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{\left(1-x^2\right)'\left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \\
&\overset{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot \left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \\
&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot \left(1+x^2\right) - \left(1-x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)} = \\
&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{1+x^2} = \\
&= \frac{-4x}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{4x}{x^4-1}.
\end{aligned}
$$

Je vidět, že $D_{f'} =$

Počítejme

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' \overset{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \\
&\overset{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{\left(1-x^2\right)'\left(1+x^2\right)-\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \\
&\overset{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{-2x\cdot\left(1+x^2\right)-\left(1-x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \\
&= \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{-2x\cdot\left(1+x^2\right)-\left(1-x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)} = \\
&= \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{1+x^2} = \\
&= \frac{-4x}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{4x}{x^4-1}.
\end{aligned}
$$

Je vidět, že $D_{f'} = D_f$, tj. funkce f má derivaci v každém bodě svého definičního oboru.

Variantní postup. *Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce f. Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí*

$$\ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2} =$$

Variantní postup. *Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce f. Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí*

$$\ln\frac{1-x^2}{1+x^2} = \ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \left(\ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right)\right)' = \\ &\overset{(?)}{=} \end{aligned}$$

Variantní postup. *Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce f. Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí*

$$\ln \frac{1-x^2}{1+x^2} = \ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \left(\ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right)\right)' = \\ &\overset{(?)}{=} \left(\ln\left(1-x^2\right)\right)' - \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)' \overset{(?)}{=} \end{aligned}$$

Variantní postup. *Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce f. Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí*

$$\ln \frac{1-x^2}{1+x^2} = \ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \left(\ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right)\right)' = \\ &\overset{(?)}{=} \left(\ln\left(1-x^2\right)\right)' - \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)' \overset{(?)}{=} \frac{1}{1-x^2}\cdot\left(1-x^2\right)' - \frac{1}{1+x^2}\cdot\left(1+x^2\right)' = \\ &= \end{aligned}$$

Variantní postup. *Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce f. Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí*

$$\ln \frac{1-x^2}{1+x^2} = \ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\ln \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \left(\ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right)\right)' = \\
&\overset{(?)}{=} \left(\ln\left(1-x^2\right)\right)' - \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)' \overset{(?)}{=} \frac{1}{1-x^2}\cdot\left(1-x^2\right)' - \frac{1}{1+x^2}\cdot\left(1+x^2\right)' = \\
&= -\frac{2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} =
\end{aligned}$$

Variantní postup. *Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce* f*. Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí*

$$\ln\frac{1-x^2}{1+x^2} = \ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \left(\ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right)\right)' = \\
&\overset{(?)}{=} \left(\ln\left(1-x^2\right)\right)' - \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)' \overset{(?)}{=} \frac{1}{1-x^2}\cdot\left(1-x^2\right)' - \frac{1}{1+x^2}\cdot\left(1+x^2\right)' = \\
&= -\frac{2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = -2x\cdot\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right) = \\
&=
\end{aligned}$$

Variantní postup. *Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce* f. *Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí*

$$\ln\frac{1-x^2}{1+x^2} = \ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \left(\ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right)\right)' = \\
&\overset{(?)}{=} \left(\ln\left(1-x^2\right)\right)' - \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)' \overset{(?)}{=} \frac{1}{1-x^2}\cdot\left(1-x^2\right)' - \frac{1}{1+x^2}\cdot\left(1+x^2\right)' = \\
&= -\frac{2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = -2x\cdot\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right) = \\
&= -2x\cdot\frac{1+x^2+1-x^2}{(1-x^2)\,(1+x^2)} =
\end{aligned}$$

Variantní postup. *Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce f. Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí*

$$\ln \frac{1-x^2}{1+x^2} = \ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\ln \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \left(\ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right)\right)' = \\
&\overset{(?)}{=} \left(\ln\left(1-x^2\right)\right)' - \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)' \overset{(?)}{=} \frac{1}{1-x^2}\cdot\left(1-x^2\right)' - \frac{1}{1+x^2}\cdot\left(1+x^2\right)' = \\
&= -\frac{2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = -2x\cdot\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right) = \\
&= -2x\cdot\frac{1+x^2+1-x^2}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)} = \frac{4x}{x^4-1},
\end{aligned}$$

Variantní postup. *Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce f. Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí*

$$\ln\frac{1-x^2}{1+x^2} = \ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \left(\ln\left(1-x^2\right) - \ln\left(1+x^2\right)\right)' = \\
&\overset{(?)}{=} \left(\ln\left(1-x^2\right)\right)' - \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)' \overset{(?)}{=} \frac{1}{1-x^2}\cdot\left(1-x^2\right)' - \frac{1}{1+x^2}\cdot\left(1+x^2\right)' = \\
&= -\frac{2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = -2x\cdot\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right) = \\
&= -2x\cdot\frac{1+x^2+1-x^2}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)} = \frac{4x}{x^4-1},
\end{aligned}$$

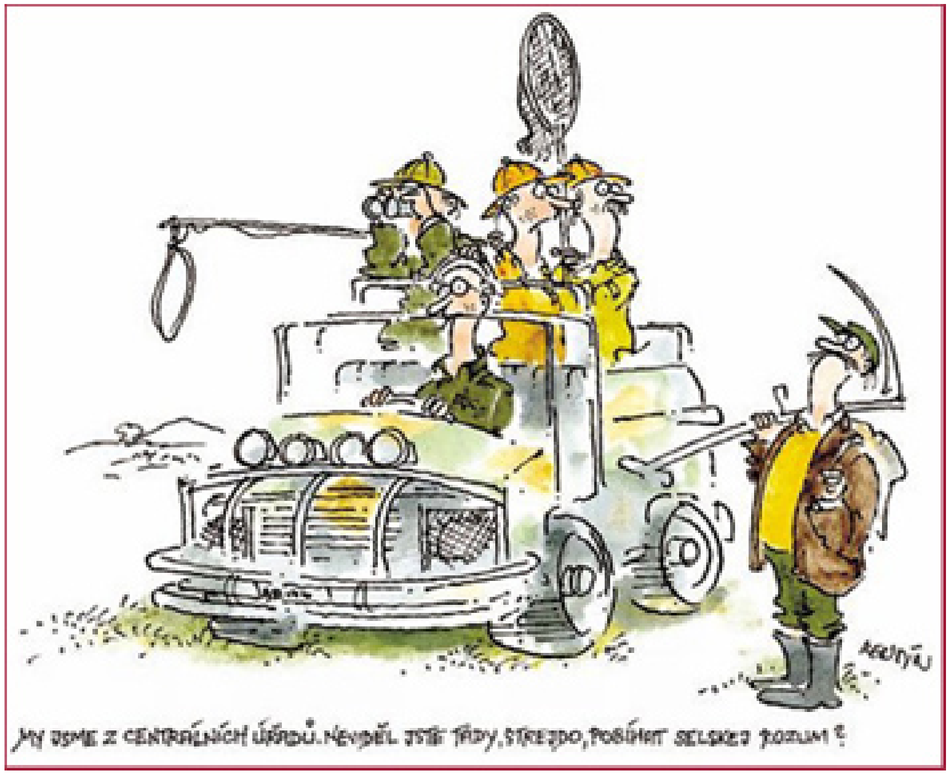
což je stejný výsledek.

Porovnejme oba předvedené způsoby řešení. Který z nich se Vám zdá náročnější? Dovolujeme si tvrdit, že první způsob bez zjednodušování předpisu funkce f.

(Opět se ukazuje, že znát zpaměti vzorce středoškolské matematiky a umět je chytře používat, se určitě vyplatí:-))

Porovnejme oba předvedené způsoby řešení. Který z nich se Vám zdá náročnější? Dovolujeme si tvrdit, že první způsob bez zjednodušování předpisu funkce f.

(Opět se ukazuje, že znát zpaměti vzorce středoškolské matematiky a umět je chytře používat, se určitě vyplatí:-))



[Konec]