Funkce více proměnných

Spojitá reálná funkce dvou reálných proměnných nabývá svých absolutních extrémů na **uzavřené** (obsahuje všechny své hraniční body – podobně jako uzavřený interval obsahuje oba hraniční body) a **ohraničené** (dá se jí opsat $n-$úhelník) rovinné oblasti (kompaktní množině) $\mathcal{M}$ (viz strana 53 skript – Tryhuk, V., Dlouhý, O. *Matematika I – Diferenciální počet funkcí více reálných proměnných.* 1. vydání. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s. r. o., 2004. 85 s. ISBN 80–214–2776–0)

buď

- v bodech lokálního extrému ležících uvnitř $\mathcal{M}$

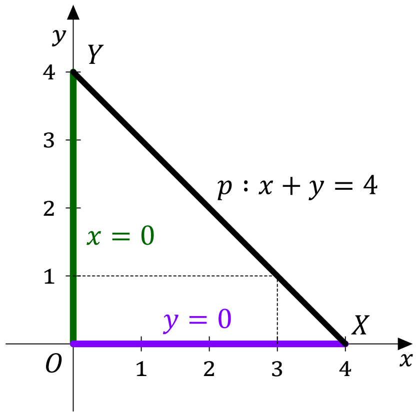
nebo

- v některém bodě na hranici $\mathcal{M}$.

1. Určete globální (absolutní) extrémy, tedy ***největší a nejmenší hodnotu*** funkce:

$$f(x,y) : z = xy - x^2 - y^2 + x + y$$

v trojúhelníku tvořeném souřadnými osami a přímkou $p : x + y = 4$.



1. Definiční obor funkce $\mathcal{D}(z)$**:** $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$

Výše zmíněná množina $\mathcal{M}$ (uzavřená ohraničená rovinná oblast) je trojúhelník ΔOXY, kde $O = [0\,;0]$ je počátek soustavy souřadnic. Tedy

$$\mathcal{M} = \{[x\,;y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x + y \leq 4\}$$

2. Určíme první parciální derivace funkce z **a položíme je rovny nule,** protože lokální extrém může nastat pouze v bodech,

- kde se 1. parciální derivace rovnají nule

nebo

- kde 1. parciální derivace neexistují.

$$\begin{array}{rrl} z_x = & y - 2x + 1 = 0 & \quad |\cdot 2 \\ z_y = & x - 2y + 1 = 0 & \\ \hline & -3x + 3 = 0 & \\ & x = 1 & \quad y = 1 \end{array}$$

A protože $\mathcal{D}(z_x) = \mathbb{R}^2$ a $\mathcal{D}(z_y) = \mathbb{R}^2$, našli jsme jediný bod $A = [1\,;1] \in \mathcal{M}$ (ležící uvnitř zadaného trojúhelníka), ve kterém by mohl nastat lokální extrém. A tedy i případně globální extrém.

3. Vyšetříme situaci na hranici. Nejdříve na úsečce $y = 0; \quad x \in \langle 0\,;4 \rangle$. Ta je ohraničena body O a X. Po dosazení dostáváme funkci jedné proměnné, jejíž extrémy jsme studovali v prvním semestru.

$$f(x, y = 0) : z = x \cdot 0 - x^2 - 0^2 + x + 0$$
$$z = -x^2 + x$$
$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R}; \quad z' = -2x + 1 \quad = 0$$
$$x = \frac{1}{2}$$

A máme další bod $B = \left[\frac{1}{2}\,;0\right] \in \mathcal{M}$ (ležící na vodorovné odvěsně zadaného trojúhelníka), ve kterém by mohl nastat lokální extrém. A tedy i případně globální extrém.

4. Hraniční úsečka $x + y - 4 = 0$ je ohraničena body X a Y.

$$f(x, y = 4 - x) : z = x \cdot (4 - x) - x^2 - (4 - x)^2 + x + (4 - x)$$
$$z = 4x - x^2 - x^2 - (16 - 8x + x^2) + x + 4 - x$$
$$z = -3x^2 + 12x - 12$$
$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R}; \quad z' = -6x + 12 \quad = 0$$
$$x = 2$$

A máme další bod $C = [2\,;2] \in \mathcal{M}$ (ležící na přeponě zadaného trojúhelníka), ve kterém by mohl nastat lokální extrém. A tedy i případně globální extrém.

5. Hraniční úsečka $x = 0; \quad y \in \langle 0\,;4 \rangle$ je ohraničena body O a Y.

$$f(x = 0, y) : z = 0 \cdot y - 0^2 - y^2 + 0 + y$$
$$z = -y^2 + y$$
$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R}; \quad z' = -2y + 1 \quad = 0$$
$$y = \frac{1}{2}$$

A máme další bod $D = \left[0\,;\frac{1}{2}\right] \in \mathcal{M}$ (ležící na svislé odvěsně zadaného trojúhelníka), ve kterém by mohl nastat lokální extrém. A tedy i případně globální extrém.

6. V každém bodě podezřelém z extrému (jsou značeny červeně) určíme funkční hodnotu a najdeme extrémní z nich.

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$$

$A = [1\,;1]$	$f(A) = 1 - 1 - 1 + 1 + 1 = \underline{\underline{1}}$	globální maximum v A
$B = \left[\frac{1}{2}\,;0\right]$	$f(B) = 0 - \frac{1}{4} - 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{4}$	
$C = [2\,;2]$	$f(C) = 4 - 4 - 4 + 2 + 2 = 0$	
$D = \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$	$f(D) = 0 - 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	
$O = [0\,;0]$	$f(O) = 0 - 0 - 0 + 0 + 0 = 0$	
$X = [4\,;0]$	$f(X) = 0 - 16 - 0 + 4 + 0 = \underline{\underline{-12}}$	globální minimum v X
$Y = [0\,;4]$	$f(Y) = 0 - 0 - 16 + 0 + 4 = \underline{\underline{-12}}$	globální minimum v Y

2. Určete globální extrémy funkce: $f(x,y) : z = \left(2x^2 + 3y^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

na množině $\mathcal{M} = \{[x\,;y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\}$

1. Definiční obor funkce $\mathcal{D}(z)$**:** $x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$ což také píšeme $\mathcal{D}(z) = \mathbb{R}^2$.

Výše zmíněná množina $\mathcal{M}$ (uzavřená ohraničená rovinná oblast) je kruh se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem 2.

2. Určíme první parciální derivace funkce z **a položíme je rovny nule,** abychom našli stacionární body a tím i případné lokální extrémy.

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{D}(z_x) = \mathbb{R}^2 & z_x = & 4x \cdot \mathrm{e}^{-x^2-y^2} + (2x^2+3y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \cdot (-2x) = 0 \\
\mathcal{D}(z_y) = \mathbb{R}^2 & z_y = & 6y \cdot \mathrm{e}^{-x^2-y^2} + (2x^2+3y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) = 0 \\ \hline
 & & 2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \cdot (2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \qquad |:\mathrm{e}^{-x^2-y^2} (\neq 0) \\
 & & 2y \cdot \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \cdot (3 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \qquad |:\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ \hline
 & & 2x \cdot (2 - 2x^2 - 3y^2) = 0 \\
 & & 2y \cdot (3 - 2x^2 - 3y^2) = 0
\end{array}$$

Součin činitelů se rovná nule, ... Tím se řešení poslední soustavy rozpadne na čtyři části:

2.1. $2x = 0 \ \wedge\ 2y = 0 \quad \Rightarrow$ Našli jsme první bod $A = [0\,;0] \in \mathcal{M}$ (ležící uvnitř zadaného kruhu), ve kterém by mohl nastat lokální extrém. A tedy i případně globální extrém.

2.2. $2x = 0 \ \wedge\ 3 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 - 2\cdot 0^2 - 3y^2 = 0$

$$y^2 = 1$$
$$y_{1;2} = \pm 1$$

Našli jsme další body $B = [0\,;1] \in \mathcal{M}$ a $C = [0\,;-1] \in \mathcal{M}$ ...

2.3. $2 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \ \wedge\ 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - 2x^2 - 3\cdot 0^2 = 0$

$$x^2 = 1$$
$$x_{1;2} = \pm 1$$

Našli jsme další body $D = [1\,;0] \in \mathcal{M}$ a $E = [-1\,;0] \in \mathcal{M}$ ...

2.4. $2 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \ \wedge\ 3 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3y^2 = 2x^2 - 3$

$2 - 2x^2 + \underbrace{(2x^2 - 3)}_{-3y^2} = 0$ kterážto rovnice nemá řešení pro žádné x.

3. Vyšetříme situaci na hraniční kružnici $x^2 + y^2 = 4$, kterou si rozdělíme na 2 části (polokružnice), protože kružnice není grafem funkce.

3.1. Polokružnice $y = \sqrt{4-x^2} \ \wedge \ x \in \langle -2\,;2\rangle$ je ohraničena $F = [-2\,;0]$ a $G = [2\,;0]$

$$f\left(x, y = \sqrt{4-x^2}\right) : z = \left[2x^2 + 3\left(4-x^2\right)\right] \cdot \mathrm{e}^{-x^2-(4-x^2)}$$

$$z = \left(x^2 + 12\right) \cdot \mathrm{e}^{-4}$$

$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R} \qquad z' = 2x \cdot \mathrm{e}^{-4} \quad = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0$$

Našli jsme další bod $H = [0\,;2]$.

3.2. Polokružnice $y = -\sqrt{4-x^2} \ \wedge \ x \in \langle -2\,;2\rangle$ je také ohraničena body F a G .

$$f\left(x, y = -\sqrt{4-x^2}\right) : z = \left[2x^2 + 3\left(4-x^2\right)\right] \cdot \mathrm{e}^{-x^2-(4-x^2)}$$

$$z = \left(x^2 + 12\right) \cdot \mathrm{e}^{-4}$$

$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R} \qquad z' = 2x \cdot \mathrm{e}^{-4} \quad = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0$$

Našli jsme další bod $J = [0\,;-2]$.

Všechny červeně označené body jsou jediné, ve kterých může nastat globální extrém.

4. V každém bodě podezřelém z extrému určíme funkční hodnotu a najdeme extrémní z nich.

$$f(x,y) = \left(2x^2 + 3y^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

$A = [0\,;0]$ $\quad f(A) = \left[2\cdot(0)^2 + 3\cdot(0)^2\right] \cdot \mathrm{e}^{-(0)^2-(0)^2} = \underline{\underline{0}}$ globální minimum v A

$B = [0\,;1]$ $\quad f(B) = \left[2\cdot(0)^2 + 3\cdot(1)^2\right] \cdot \mathrm{e}^{-(0)^2-(1)^2} = 3\mathrm{e}^{-1} \doteq \underline{\underline{1,1}}$ globální maximum v B

$C = [0\,;-1]$ $\quad f(C) = \left[2\cdot(0)^2 + 3\cdot(-1)^2\right] \cdot \mathrm{e}^{-(0)^2-(-1)^2} = \underline{\underline{3\mathrm{e}^{-1}}}$ globální maximum v C

$D = [1\,;0]$ $\quad f(D) = \left[2\cdot(1)^2 + 3\cdot(0)^2\right] \cdot \mathrm{e}^{-(1)^2-(0)^2} = 2\mathrm{e}^{-1}$

$E = [-1\,;0]$ $\quad f(E) = \left[2\cdot(-1)^2 + 3\cdot(0)^2\right] \cdot \mathrm{e}^{-(-1)^2-(0)^2} = 2\mathrm{e}^{-1}$

$F = [-2\,;0]$ $\quad f(F) = \left[2\cdot(-2)^2 + 3\cdot(0)^2\right] \cdot \mathrm{e}^{-(-2)^2-(0)^2} = 8\mathrm{e}^{-4} \doteq 0,1$

$G = [2\,;0]$ $\quad f(G) = \left[2\cdot(2)^2 + 3\cdot(0)^2\right] \cdot \mathrm{e}^{-(2)^2-(0)^2} = 8\mathrm{e}^{-4}$

$H = [0\,;2]$ $\quad f(H) = \left[2\cdot(0)^2 + 3\cdot(2)^2\right] \cdot \mathrm{e}^{-(0)^2-(2)^2} = 12\mathrm{e}^{-4} \doteq 0,2$

$J = [0\,;-2]$ $\quad f(J) = \left[2\cdot(0)^2 + 3\cdot(-2)^2\right] \cdot \mathrm{e}^{-(0)^2-(-2)^2} = 12\mathrm{e}^{-4}$

3. Určete globální extrémy funkce: $f(x,y) : z = x - y$

na množině $\mathcal{M} = \{[x\,;y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

1. Definiční obor funkce $\mathcal{D}(z) = \mathbb{R}^2$

Výše zmíněná množina $\mathcal{M}$ (uzavřená ohraničená rovinná oblast) je kruh se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem 1.

2. Určíme první parciální derivace funkce z **a** …

$$\mathcal{D}(z_x) = \mathbb{R}^2 \qquad z_x = \quad 1 \neq 0$$
$$\mathcal{D}(z_y) = \mathbb{R}^2 \qquad z_y = \ -1 \neq 0$$

3. Vyšetříme situaci na hraniční kružnici $x^2 + y^2 = 1$, kterou si rozdělíme.

3.1. Polokružnice $y = \sqrt{1 - x^2}\ \wedge\ x \in \langle -1\,;1\rangle$ je ohraničena $A = [-1\,;0]$ a $B = [1\,;0]$

$$f(x, y = \sqrt{1 - x^2}) : z = x - \sqrt{1 - x^2} = x - \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{D}(z') : x \in (-1\,;1) \qquad z' = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -1 \quad |^2$$

$$\frac{x^2}{1-x^2} = 1$$

$$x^2 = 1 - x^2$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Našli jsme další dva body $C = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a $D = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

3.2. Polokružnice $y = -\sqrt{1 - x^2}\ \wedge\ x \in \langle -1\,;1\rangle$ je také ohraničena body A a B .

$$f(x,y = -\sqrt{1-x^2}) : z = x - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) = x + \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{D}(z') : x \in (-1\,;1) \qquad z' = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \quad |^2$$

$$\frac{x^2}{1-x^2} = 1$$

$$x^2 = 1 - x^2$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Našli jsme další dva body $E = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a $F = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\,; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Všechny červeně označené body jsou jediné, ve kterých může nastat globální extrém.

4. V každém bodě podezřelém z extrému určíme funkční hodnotu a …

$$f(x,y) = x - y$$

$A = [-1\,;0]$ $\qquad f(A) = -1 - 0 = -1$

$B = [1\,;0]$ $\qquad f(B) = 1 - 0 = 1$

$C = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ $\qquad f(C) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

$D = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ $\qquad f(D) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{-\sqrt{2}}}$ globální minimum

$E = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ $\qquad f(E) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}} \doteq 1,4$ globální maximum

$F = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ $\qquad f(F) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

4. Určete globální extrémy funkce: $f(x,y) : z = x^2 - 4x + y^2 - 4y - 1$

na množině $\mathcal{M} = \{[x\,;y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

1. Definiční obor funkce $\mathcal{D}(z) = \mathbb{R}^2$

Množina $\mathcal{M}$, *tj. uzavřená ohraničená rovinná oblast*, je stejný kruh jako v předchozím příkladu (střed v počátku soustavy souřadnic a poloměr 1).

2. Určíme první parciální derivace funkce z **a** ...

$$\begin{array}{lll} \mathcal{D}(z_x) = \mathbb{R}^2 & z_x = 2x - 4 = 0 & \Rightarrow \quad x = 2 \\ \mathcal{D}(z_y) = \mathbb{R}^2 & z_y = 2y - 4 = 0 & \Rightarrow \quad y = 2 \end{array}$$

$$Q = [2\,;2] \notin \mathcal{M}$$

3. Vyšetříme situaci na hraniční kružnici $x^2 + y^2 = 1$.

3.1. Polokružnice $y = \sqrt{1 - x^2} \;\wedge\; x \in \langle -1\,;1\rangle$ je ohraničena $A = [-1\,;0]$ a $B = [1\,;0]$

$$f(x, y = \sqrt{1-x^2}) : z = x^2 - 4x + \underbrace{(1 - x^2)}_{y^2} - 4\sqrt{1-x^2} - 1 = -4x - 4\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{D}(z') : x \in (-1\,;1) \qquad z' = -4 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = 0 \qquad |:4$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \qquad |^2$$

$$\frac{x^2}{1-x^2} = 1$$

$$x^2 = 1 - x^2$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x_{1;2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Našli jsme další dva body $C = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a $D = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

3.2. Polokružnice $y = -\sqrt{1 - x^2} \;\wedge\; x \in \langle -1\,;1\rangle$ je také ohraničena body A a B .

$$f(x, y = -\sqrt{1-x^2}) : z = -4x + 4\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{D}(z') : x \in (-1\,;1) \qquad z' = -4 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = 0 \qquad |:4$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \qquad |^2$$

$$\frac{x^2}{1-x^2} = 1$$

$$x^2 = 1 - x^2$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x_{1;2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Našli jsme další dva body $E = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a $F = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Všechny červeně označené body jsou jediné, ve kterých může nastat globální extrém.

4. V každém bodě podezřelém z extrému určíme funkční hodnotu a …

$$f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - 4y - 1$$

$A = [-1\,;0]$ $\quad f(A) = (-1)^2 - 4\cdot(-1) + (0)^2 - 4\cdot(0) - 1 = 4$

$B = [1\,;0]$ $\quad f(B) = (1)^2 - 4\cdot(1) + (0)^2 - 4\cdot(0) - 1 = -4$

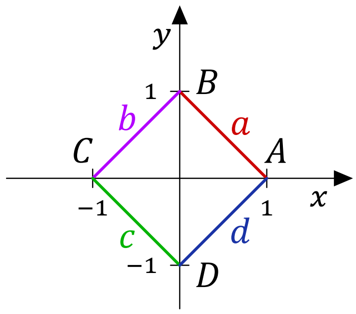
$C = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ $\quad f(C) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = \underline{\underline{\frac{-8}{\sqrt{2}}}} \doteq -5{,}7$ abs. min.

$D = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ $\quad f(D) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = 0$

$E = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ $\quad f(E) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = 0$

$F = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ $\quad f(F) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = \underline{\underline{\frac{8}{\sqrt{2}}}}$ abs. MAX

5. Určete absolutní extrémy funkce: $f(x,y) : z = xy$
na množině $\mathcal{M} : |x| + |y| \le 1$.



1. Definiční obor funkce $\mathcal{D}(z) = \mathbb{R}^2$

Výše zmíněná množina $\mathcal{M}$ (uzavřená ohraničená rovinná oblast) je čtverec $ABCD$, protože:

$$\mathcal{M} : |x| + |y| \le 1$$

1. kvadrant: $x \ge 0 \wedge y \ge 0 \quad \Rightarrow \quad a : x + y \le 1$
2. kvadrant: $x \le 0 \wedge y \ge 0 \quad \Rightarrow \quad b : -x + y \le 1$
3. kvadrant: $x \le 0 \wedge y \le 0 \quad \Rightarrow \quad c : -x - y \le 1$
4. kvadrant: $x \ge 0 \wedge y \le 0 \quad \Rightarrow \quad d : x - y \le 1$

2. Určíme první parciální derivace funkce z **a** …

$\mathcal{D}(z_x) = \mathbb{R}^2 \qquad z_x = \quad y = 0$

$\mathcal{D}(z_y) = \mathbb{R}^2 \qquad z_y = \quad x = 0$

Našli jsme jediný bod $E = [0\,;0] \in \mathcal{M}$ …

3. Vyšetříme situaci na hranici $\mathcal{M}$

3.1. Hraniční úsečka $a : y = 1 - x \quad \wedge \quad x \in \langle 0 ; 1 \rangle$

je ohraničena body $A = [1 ; 0]$ a $B = [0 ; 1]$.

$$f(x, y = 1 - x) : z = x \cdot (1 - x)$$
$$z = x - x^2$$
$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R}; \quad z' = 1 - 2x \quad = 0$$
$$x = \frac{1}{2}$$

A máme další bod $F = \left[\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right] \in \mathcal{M}$ ...

3.2. Hraniční úsečka $b : y = x + 1 \quad \wedge \quad x \in \langle -1 ; 0 \rangle$

je ohraničena body B a $C = [-1 ; 0]$.

$$f(x, y = x + 1) : z = x \cdot (x + 1)$$
$$z = x^2 + x$$
$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R}; \quad z' = 2x + 1 \quad = 0$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

A máme další bod $G = \left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right] \in \mathcal{M}$ ...

3.3. Hraniční úsečka $c : y = -x - 1 \quad \wedge \quad x \in \langle -1 ; 0 \rangle$

je ohraničena body C a $D = [0 ; -1]$.

$$f(x, y = -x - 1) : z = x \cdot (-x - 1)$$
$$z = -x^2 - x$$
$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R}; \quad z' = -2x - 1 \quad = 0$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

A máme další bod $H = \left[-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right] \in \mathcal{M}$ ...

3.4. Hraniční úsečka $d : y = x - 1 \quad \wedge \quad x \in \langle 0 ; 1 \rangle$

je ohraničena body A a D.

$$f(x, y = x - 1) : z = x \cdot (x - 1)$$
$$z = x^2 - x$$
$$\mathcal{D}(z') = \mathbb{R}; \quad z' = 2x - 1 \quad = 0$$
$$x = \frac{1}{2}$$

A máme další bod $J = \left[\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right] \in \mathcal{M}$ ...

4. V každém bodě podezřelém z extrému určíme funkční hodnotu a …

$$f(x,y) = xy$$

$A = [1\,;0]$ $\quad f(A) = (1)\cdot(0) = 0$

$B = [0\,;1]$ $\quad f(B) = (0)\cdot(1) = 0$

$C = [-1\,;0]$ $\quad f(C) = (-1)\cdot(0) = 0$

$D = [0\,;-1]$ $\quad f(D) = (0)\cdot(-1) = 0$

$E = [0\,;0]$ $\quad f(E) = (0)\cdot(0) = 0$

$F = \left[\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$ $\quad f(F) = (\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2}) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$ globální maximum v F

$G = \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$ $\quad f(G) = (-\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2}) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$ globální minimum v G

$H = \left[-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right]$ $\quad f(H) = (-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2}) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$ globální maximum v H

$J = \left[\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right]$ $\quad f(J) = (\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2}) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$ globální minimum v J