Funkce více proměnných

 RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Existuje-li limita

$$\lim_{\mathcal{A}\to M} \frac{f(\mathcal{A}) - f(M)}{|\mathcal{A} - M|} = \frac{\partial f(M)}{\partial \vec{s}}$$

nazýváme ji **derivací** (skalární) **funkce** f **ve směru** $\vec{s}$ v bodě M .

V dalším se omezíme na třírozměrný **prostor** či dvourozměrnou **rovinu**. Tedy na funkce dvou a tří proměnných. Má-li funkce f v bodě M spojité parciální derivace 1. řádu, platí:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial f(M)}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial f(M)}{\partial z} \cdot \cos\gamma$$

kde $\cos\alpha$, $\cos\beta$ a $\cos\gamma$ jsou souřadnice jednotkového vektoru směru $\vec{s}$. Tedy

$$\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \vec{s^o} = (\underbrace{\cos\alpha}_{s_x^o};\ \underbrace{\cos\beta}_{s_y^o};\ \underbrace{\cos\gamma}_{s_z^o})$$

Gradient (skalární) funkce f v bodě M , je vektor o souřadnicích[1)]

$$\operatorname{grad} f(M) = \big(f_x(M)\,;f_y(M)\,;f_z(M)\big)$$

a vyjadřuje směr a velikost největší změny (skalárního) pole.

Nabla ∇ (operátor) je pohodlnou notací pro zkrácený zápis

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,;\frac{\partial f}{\partial y}\,;\frac{\partial f}{\partial z}\right) = f_x \cdot \vec{i} + f_y \cdot \vec{j} + f_z \cdot \vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory na souřadných osách.

Příklad 1. Stanovte derivaci (skalární) funkce $f : z = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)$ v bodě $M = [x_o\,; y_o]$ ve směru ***osy prvního kvadrantu***.

Řešení: $[M \in \mathcal{D}(f)]$ $\vec{s} = (1\,;1)$ a tedy

$$\vec{s^o} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{(1\,;1)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \vec{s}} = f_x(M)\cdot s_x^o + f_y(M)\cdot s_y^o = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\cdot \mathrm{e}^x & f_x(M) = \dfrac{\mathrm{e}^{x_o}}{\mathrm{e}^{x_o}+\mathrm{e}^{y_o}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\cdot \mathrm{e}^y & f_y(M) = \dfrac{\mathrm{e}^{y_o}}{\mathrm{e}^{x_o}+\mathrm{e}^{y_o}} \end{array}\right|$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{x_o}}{\mathrm{e}^{x_o}+\mathrm{e}^{y_o}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{e}^{y_o}}{\mathrm{e}^{x_o}+\mathrm{e}^{y_o}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{e}^{x_o}+\mathrm{e}^{y_o}}{\mathrm{e}^{x_o}+\mathrm{e}^{y_o}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

[1] Tryhuk, V., Dlouhý, O.: *Matematika I* Diferenciální počet funkcí více reálných proměnných. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s. r. o., 2004, 85 s. ISBN 80–214–2776–525–0

Příklad 2. Stanovte derivaci (skalární) funkce $f : u = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4}$
v bodě $M = [1 ; 2 ; 2]$ ve směru **rádius**vektoru bodu M.

Řešení: $[M \in \mathcal{D}(f)]$ $\vec{s} = (1 ; 2 ;\ 2)$ a tedy

$$\vec{s^o} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{(1 ; 2 ; 2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \vec{s}} = f_x(M) \cdot s_x^o + f_y(M) \cdot s_y^o + f_z(M) \cdot s_z^o = \quad \left| \begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x & f_x(M) = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{4} & f_y(M) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{4} & f_z(M) = 1 \end{array} \right|$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = \underline{\underline{2}}$$

Příklad 3. Stanovte derivaci (skalární) funkce $f : z = x^4 + x^2y^2 + y^4$
v bodě $M = [1 ; 1]$ ve směru, který svírá s kladnou poloosou x úhel $+\frac{\pi}{4}$.

Řešení: $[M \in \mathcal{D}(f)]$ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{s} = (1 ; 1)$ a tedy

$$\vec{s^o} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{(1 ; 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \vec{s}} = f_x(M) \cdot s_x^o + f_y(M) \cdot s_y^o = \quad \left| \begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2xy^2 & f_x(M) = 6 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 4y^3 & f_y(M) = 6 \end{array} \right|$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{6\sqrt{2}}}$$

Příklad 4. Stanovte derivaci (skalární) funkce $f : u = xyz$ v bodě $M = [5\,;1\,;2]$ ve směru $\overrightarrow{MA}$, kde $A = [9\,;4\,;14]$.

Řešení: $[M \in \mathcal{D}(f)]$ $\vec{s} = (4\,;3\,;12)$ a tedy

$$\vec{s^o} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{(4\,;3\,;12)}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}} = \left(\frac{4}{13}\,;\frac{3}{13}\,;\frac{12}{13}\right)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \vec{s}} = f_x(M)\cdot s_x^o + f_y(M)\cdot s_y^o + f_z(M)\cdot s_z^o = \qquad \left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = yz & f_x(M) = 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz & f_y(M) = 10 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy & f_z(M) = 5 \end{array}\right|$$

$$= 2\cdot\frac{4}{13} + 10\cdot\frac{3}{13} + 5\cdot\frac{12}{13} = \frac{8+30+60}{13} = \underline{\underline{\frac{98}{13}}}$$

Příklad 5. Stanovte derivaci (skalární) funkce $f : z = \sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $M = [3\,;4]$ ve směru $\vec{s} = (4\,;-3)$.

Řešení: $[M \in \mathcal{D}(f)]$ Jednotkový vektor daného směru

$$\vec{s^o} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{(4\,;-3)}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \left(\frac{4}{5}\,;\frac{-3}{5}\right)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \vec{s}} = f_x(M)\cdot s_x^o + f_y(M)\cdot s_y^o = \qquad \left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x & f_x(M) = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y & f_y(M) = \dfrac{4}{5} \end{array}\right|$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{-3}{5} = \frac{12-12}{25} = \underline{\underline{0}}$$

Příklad 6. Stanovte derivaci (skalární) funkce $f : u = x^2 - 3xy - 4y^2 - 5x - 4z^2$ v bodě $M = [1 ; 0 ; 3]$ ve směru $\vec{s} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Řešení: $[M \in \mathcal{D}(f)]$ $\vec{s} = (1 ; 1 ; 2)$ a tedy

$$\vec{s^o} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{(1 ; 1 ; 2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} ; \frac{1}{\sqrt{6}} ; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \vec{s}} = f_x(M) \cdot s_x^o + f_y(M) \cdot s_y^o + f_z(M) \cdot s_z^o = \quad \left| \begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y - 5 & f_x(M) = -3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -3x - 8y & f_y(M) = -3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -8z & f_z(M) = -24 \end{array} \right|$$

$$-3 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - 24 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{-3 - 3 - 48}{\sqrt{6}} = -\frac{54}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{-9\sqrt{6}}}$$

Příklad 7. Stanovte gradient (skalární) funkce $f : u = x^2 + y^2 - 2z$ v bodě $M = [2 ; 0 ; 0]$.

Řešení: $[M \in \mathcal{D}(f)]$

$$\operatorname{grad} f(M) = \left(\frac{\partial f(M)}{\partial x} ; \frac{\partial f(M)}{\partial y} ; \frac{\partial f(M)}{\partial z}\right) = f_x(M) \cdot \vec{i} + f_y(M) \cdot \vec{j} + f_z(M) \cdot \vec{k}$$

a tedy

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x & f_x(M) = 4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y & f_y(M) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -2 & f_z(M) = -2 \end{array} \right| \qquad \operatorname{grad} f(M) = (4 ; 0 ; -2) = \underline{\underline{4\vec{i} - 2\vec{k}}}$$

Příklad 8. Stanovte gradient (skalární) funkce $f : x^2 + 2y$
v bodě $M = [1\,;-1]$.

Řešení: [$M \in \mathcal{D}(f)$]

$$\operatorname{grad} f(M) = \left(\frac{\partial f(M)}{\partial x}\,;\frac{\partial f(M)}{\partial y} \right) = f_x(M)\cdot\vec{\imath} + f_y(M)\cdot\vec{\jmath}$$

a tedy

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x & f_x(M) = 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2 & f_y(M) = 2 \end{array} \right| \qquad \operatorname{grad} f(M) = (2\,;2) = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} = \underline{\underline{2(\vec{\imath} + \vec{\jmath})}}$$

Příklad 9. Stanovte gradient (skalární) funkce
$f : u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 4x + 2y - 4z$ v bodě $M = [1\,;1\,;1]$.

Řešení: [$M \in \mathcal{D}(f)$]

$$\operatorname{grad} f(M) = \left(\frac{\partial f(M)}{\partial x}\,;\frac{\partial f(M)}{\partial y}\,;\frac{\partial f(M)}{\partial z} \right) = f_x(M)\cdot\vec{\imath} + f_y(M)\cdot\vec{\jmath} + f_z(M)\cdot\vec{k}$$

a tedy

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y - 4 & f_x(M) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y + 2x + 2 & f_y(M) = 8 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 6z - 4 & f_z(M) = 2 \end{array} \right| \qquad \operatorname{grad} f(M) = (0\,;8\,;2) = 8\vec{\jmath} + 2\vec{k} = \underline{\underline{2(4\vec{\jmath} + \vec{k})}}$$

Příklad 10. Stanovte směr $\vec{s}$, ve kterém je derivace funkce $f : u = x^2 + y^2 + z^2 - 16$
v bodě $M = [0\,;-2\,;1]$ maximální .

Řešení: [$M \in \mathcal{D}(f)$] Hledáme vlastně směr gradientu funkce:

$$\operatorname{grad} f(M) = \left(\frac{\partial f(M)}{\partial x}\,;\frac{\partial f(M)}{\partial y}\,;\frac{\partial f(M)}{\partial z} \right) = f_x(M)\cdot\vec{\imath} + f_y(M)\cdot\vec{\jmath} + f_z(M)\cdot\vec{k}$$

a tedy

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x & f_x(M) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y & f_y(M) = -4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z & f_z(M) = 2 \end{array} \right| \qquad \vec{s} = (0\,;-4\,;2) = -4\vec{\jmath} + 2\vec{k} = 2\cdot\underline{\underline{(\vec{k} - 2\vec{\jmath})}}$$

Příklad 11. Stanovte směr $\vec{s}$, ve kterém je derivace funkce $f : u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$ v bodě $M = [-1\,;1\,;-1]$ maximální.

Řešení: $[M \in \mathcal{D}(f)]$ Hledáme vlastně směr gradientu funkce:

$$\operatorname{grad} f(M) = \left(\frac{\partial f(M)}{\partial x}\,;\frac{\partial f(M)}{\partial y}\,;\frac{\partial f(M)}{\partial z} \right) = f_x(M)\cdot\vec{i} + f_y(M)\cdot\vec{j} + f_z(M)\cdot\vec{k}$$

a tedy

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{z}{x^2} & f_x(M) = 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{z} & f_y(M) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -\dfrac{y}{z^2} + \dfrac{1}{x} & f_z(M) = -2 \end{array}\right| \qquad \vec{s} = (2\,;0\,;-2) = 2\vec{i} - 2\vec{k} = 2\cdot\underline{\underline{(\vec{i} - \vec{k})}}$$

Příklad 12. Stanovte body, ve kterých je gradient funkce $f : z = xy + \dfrac{x}{y}$ dán $\operatorname{grad} f(\mathcal{A}) = 2\vec{i}$.

Řešení obecný bod má souřadnice $\mathcal{A} = [x_o\,;y_o]$, kde $y_o \neq 0$.

$$\operatorname{grad} f(\mathcal{A}) = \left(\frac{\partial f(\mathcal{A})}{\partial x}\,;\frac{\partial f(\mathcal{A})}{\partial y} \right) = f_x(\mathcal{A})\cdot\vec{i} + f_y(\mathcal{A})\cdot\vec{j}$$

a tedy

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y + \dfrac{1}{y} & f_x(\mathcal{A}) = y_o + \dfrac{1}{y_o} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - \dfrac{x}{y^2} & f_y(\mathcal{A}) = x_o - \dfrac{x_o}{y_o^2} \end{array}\right| \qquad \operatorname{grad} f(\mathcal{A}) = \left(y_o + \frac{1}{y_o}\,;x_o - \frac{x_o}{y_o^2} \right) = (2\,;0)$$

Řešíme soustavu

$$y_o + \frac{1}{y_o} = 2 \quad\Longrightarrow\quad y_o^2 + 1 = 2y_o \quad\Longrightarrow\quad y_{1;2} = 1$$

$$x_o - \frac{x_o}{y_o^2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \text{pro} \quad y_o = 1 \quad \text{vždy platí}$$

Hledané body mají souřadnice: $\mathcal{A} = [x\,;1]$.

Příklad 13. Stanovte derivaci (skalární) funkce $f : u = xy^2 + z^3 - xyz$ v bodě $M = [1\,;1\,;2]$ ve směru $\vec{s} = \vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + \vec{k}$ a určete odchylku příslušného gradientu v bodě M a daného směru $\vec{s}$.

$[M \in \mathcal{D}(f)]$ $\vec{s} = (1\,;\ \sqrt{2}\,;1)$ a tedy

$$\overrightarrow{s^o} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{(1\,;\ \sqrt{2}\,;1)}{\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \vec{s}} = f_x(M)\cdot s_x^o + f_y(M)\cdot s_y^o + f_z(M)\cdot s_z^o = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 - yz & f_x(M) = -1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy - xz & f_y(M) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - xy & f_z(M) = 11 \end{array}\right|$$

$$= -1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 11\cdot\frac{1}{2} = \frac{-1+0+11}{2} = \underline{\underline{5}}$$

$$\operatorname{grad} f(M) = \left(\frac{\partial f(M)}{\partial x}\,;\frac{\partial f(M)}{\partial y}\,;\frac{\partial f(M)}{\partial z}\right) = (-1\,;0\,;11)$$

$\vec{s} = (1\,;\ \sqrt{2}\,;1)$ a tedy

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}\cdot \operatorname{grad} f(M)}{|\vec{s}|\,.\,|\operatorname{grad} f(M)|} = \frac{-1+0+11}{\sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + (1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2 + 0^0 + 11^2}} = \frac{10}{2\cdot\sqrt{122}} = \underline{\underline{\frac{5}{\sqrt{122}}}}$$

$$\varphi = \arccos\frac{5\sqrt{122}}{122} \doteq 1{,}101 \text{ rad} \doteq 63^\circ$$