



# Reálná funkce více proměnných

(Lokální extrémy funkce dvou proměnných)

Studijní materiály

Při určování lokálních extrémů reálné funkce dvou reálných proměnných  $f(x; y)$  postupujeme zpravidla takto:

1. určíme definiční obor  $D(f)$  funkce;
2. vypočteme první parciální derivace  $f_x$ ,  $f_y$  a určíme jejich definiční obory;
3. určíme **stacionární body** (v nich jsou obě **první parciální derivace rovny NULE**);
4. vypočteme druhé parciální derivace  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$ ,  $f_{yx}$  a  $f_{yy}$   
— pokud jsou v bodě  $\mathcal{S}$  spojité, platí:  $f_{xy}(\mathcal{S}) = f_{yx}(\mathcal{S})$ ;
5. pro každý stacionární bod  $\mathcal{S}$  určíme znaménko determinantu

$$D(\mathcal{S}) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\mathcal{S}) & f_{xy}(\mathcal{S}) \\ f_{yx}(\mathcal{S}) & f_{yy}(\mathcal{S}) \end{vmatrix} \quad \text{Když} \quad \begin{array}{ll} D(\mathcal{A}) > 0 & \mathcal{A} \text{ je lokální extrém;} \\ D(\mathcal{B}) < 0 & \text{pak } \mathcal{B} \text{ není lokální extrém;} \\ D(\mathcal{C}) = 0 & \text{o } \mathcal{C} \text{ nelze rozhodnout;} \end{array}$$

6. ze znaménka druhé derivace  $f_{xx}(\mathcal{E})$  určíme druh extrému v daném bodě  
když  $f_{xx}(\mathcal{M}) < 0$  pak v bodě  $\mathcal{M}$  je (ostré) lokální **MAXIMUM**;  
 $f_{xx}(m) > 0$  pak v bodě  $m$  je (ostré) lokální **minimum**;
7. vyšetříme chování funkce ve stacionárních bodech, pro které má výše uvedený determinant nulovou hodnotu  $D(\mathcal{S}) = 0$   
a v bodech, v nichž první parciální derivace  $f_x$  a  $f_y$  **neexistují**.

**Nutná** podmínka existence lokálních extrémů pro funkci více proměnných:

- první parciální derivace jsou rovny NULE  
*nebo*
- první parciální derivace neexistují

**Dostatečná** podmínka existence lokálního extrému v bodě  $\mathcal{S}$  pro funkci

DVOU proměnných (determinant je kladný):  $D(\mathcal{S}) = \begin{vmatrix} f_{xx}(\mathcal{S}) & f_{xy}(\mathcal{S}) \\ f_{yx}(\mathcal{S}) & f_{yy}(\mathcal{S}) \end{vmatrix} > 0$

**Poznámka** Reálná funkce více reálných proměnných může mít (*ale také nemusí*) **lokální extrém pouze** ve svém stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje.

1. Určete lokální extrémy funkce:  $f(x, y) : z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$ .

1. definiční obor funkce  $D(z)$ :  $x > 0$ ;  $y > 0$

2. první parciální derivace:  $z_x = 2x + y - \frac{4}{x}$      $z_y = x + 2y - \frac{10}{y}$

$$\Rightarrow D(z_x) : x \neq 0, y \in \mathbb{R} \quad D(z_y) : y \neq 0, x \in \mathbb{R}$$

3. stacionární body:  $2x + y - \frac{4}{x} = 0 \quad | \cdot x \quad (\text{pro } x > 0)$

$$x + 2y - \frac{10}{y} = 0 \quad | \cdot y \quad (\text{pro } y > 0)$$

$$\begin{array}{l} 2x^2 + xy - 4 = 0 \\ xy + 2y^2 - 10 = 0 \end{array} \Rightarrow y = \frac{4 - 2x^2}{x}$$

a po dosazení do druhé rovnice

$$x \cdot \frac{4 - 2x^2}{x} + 2 \cdot \left( \frac{4 - 2x^2}{x} \right)^2 - 10 = 0 \quad | \cdot x^2 \quad (\text{pro } x > 0)$$

$$x^2 \cdot (4 - 2x^2) + 2 \cdot (16 - 16x^2 + 4x^4) - 10x^2 = 0$$

$$4x^2 - 2x^4 + 32 - 32x^2 + 8x^4 - 10x^2 = 0$$

$$6x^4 - 38x^2 + 32 = 0 \quad | : 2$$

$$3x^4 - 19x^2 + 16 = 0 \quad \text{substituce } s = x^2$$

$$3s^2 - 19s + 16 = 0$$

$$s_{1;2} = \frac{19 \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16}}{2 \cdot 3} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 192}}{6} = \frac{19 \pm 13}{6} \quad \begin{array}{l} s_1 = \frac{16}{3} \\ s_2 = 1 \end{array}$$

$$x_{1;1} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$x_{1;2} = -\sqrt{\frac{16}{3}} \notin D(z)$$

$$x_{2;1} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_{2;2} = -\sqrt{1} \notin D(z) \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$$

$$y_1 = \frac{4 - 2 \cdot \left( \frac{4}{\sqrt{3}} \right)^2}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{4 - 2 \cdot \frac{16}{3}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{12 - 32}{\frac{4}{\sqrt{3}}} \notin D(z)$$

$$y_2 = \frac{4 - 2 \cdot 1^2}{1} = 2$$

Funkce má jediný stacionární bod  $\mathcal{A} = [1; 2]$ .

4. druhé parciální derivace:  $z_{xx} = 2 + \frac{4}{x^2}$   $z_{xx}(\mathcal{A}) = 6$   
 $z_{xy} = 1$   
 $z_{yx} = 1$   
 $z_{yy} = 2 + \frac{10}{y^2}$   $z_{yy}(\mathcal{A}) = \frac{9}{2}$

5. determinant:  $D(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & \frac{9}{2} \end{vmatrix} = 27 - 1 > 0$

V bodě  $\mathcal{A}$  je lokální extrém.

6. druh extrému:  $z_{xx}(\mathcal{A}) = 6 > 0 \Rightarrow$  v bodě  $\mathcal{A}$  je (ostré) lokální **minimum**.

7. všude v  $D(z)$  první parciální derivace existují.

Našli jsme jediný lokální extrém dané funkce, a to lokální minimum ve stacionárním bodě  $\mathcal{A} = [1; 2]$ , které má hodnotu  $f(1; 2) = 7 - 10 \cdot \ln 2 \doteq 0,07$ .

2. Určete lokální extrémy funkce:  $f(x, y) : z = 1 + 6y - y^2 - xy - x^2$ .

1. **definiční obor funkce**  $D(z)$ :  $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

2. **první parciální derivace**:  $z_x = -y - 2x$        $z_y = 6 - 2y - x$

$$\Rightarrow D(z_x) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad D(z_y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

3. **stacionární body**:  $-2x - y = 0 \quad | \cdot (-2)$

$$-x - 2y + 6 = 0$$

$$\begin{array}{r} 4x + 2y = 0 \\ -x - 2y = -6 \\ \hline 3x = -6 \\ x = -2 \end{array}$$

a po dosazení do první rovnice

$$\begin{array}{r} -2 \cdot (-2) - y = 0 \\ 4 = y \end{array}$$

Funkce má jediný stacionární bod  $\mathcal{B} = [-2; 4]$ .

4. **druhé parciální derivace**:  $z_{xx} = -2$

$$z_{xy} = -1$$

$$z_{yx} = -1$$

$$z_{yy} = -2$$

5. **determinant**:  $D(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 > 0$

V bodě  $\mathcal{B}$  je lokální extrém.

6. **druh extrému**:  $z_{xx}(\mathcal{B}) = -2 < 0 \Rightarrow$  v bodě  $\mathcal{B}$  je (ostré) lokální **MAXIMUM**.

7. **všude v  $\mathbb{R}^2$**  první parciální derivace existují.

Našli jsme jediný lokální extrém dané funkce, a to lokální maximum ve stacionárním bodě  $\mathcal{B} = [-2; 4]$ , které má hodnotu  $f(-2; 4) = 13$ .

3. Určete lokální extrémy funkce:  $f(x, y) : z = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$ .

1. **definiční obor funkce**  $D(z)$ :  $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

2. **první parciální derivace**:  $z_x = 2x - y - 1$        $z_y = 2y - x - 1$   
 $\Rightarrow$        $D(z_x) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$        $D(z_y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

3. **stacionární body**:  $2x - y - 1 = 0$   
 $2y - x - 1 = 0 \quad | \cdot 2$   


---

 $2x - y = 1$   
 $-2x + 4y = 2$   


---

 $3y = 3$   
 $y = 1$

a po dosazení do první rovnice

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 1 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Funkce má jediný stacionární bod  $C = [1; 1]$ .

4. **druhé parciální derivace**:  $z_{xx} = 2$   
 $z_{xy} = -1$   
 $z_{yx} = -1$   
 $z_{yy} = 2$

5. **determinant**:  $D(C) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 > 0$

V bodě  $C$  je lokální extrém.

6. **druh extrému**:  $z_{xx}(C) = 2 > 0 \Rightarrow$  v bodě  $C$  je (ostré) lokální **minimum**.

7. **všude v  $\mathbb{R}^2$**  první parciální derivace existují.

Našli jsme jediný lokální extrém dané funkce, a to lokální minimum ve stacionárním bodě  $C = [1; 1]$ , které má hodnotu  $f(1; 1) = 1$ .

4. Určete lokální extrémy funkce:  $f(x, y) : z = x^3 + y^3 - 18xy$ .

1. **definiční obor funkce**  $D(z)$ :  $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

2. **první parciální derivace**:  $z_x = 3x^2 - 18y$      $z_y = 3y^2 - 18x$   
 $\Rightarrow$      $D(z_x) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$      $D(z_y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

3. **stacionární body**:  $3x^2 - 18y = 0$      $\Rightarrow y = \frac{x^2}{6}$   
 $3y^2 - 18x = 0$

a po dosazení do druhé rovnice

$$\begin{aligned} 3 \cdot \left(\frac{x^2}{6}\right)^2 - 18x &= 0 \\ x \cdot (x^3 - 12 \cdot 18) &= 0 \\ x \cdot [x^3 - (6 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 6)] &= 0 \\ x \cdot (x^3 - 6^3) &= 0 \\ x_1 = 0 &\Rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 = 6 &\Rightarrow y_2 = 6 \end{aligned}$$

Funkce má dva stacionární body  $\mathcal{D} = [0; 0]$  a  $\mathcal{E} = [6; 6]$ .

4. **druhé parciální derivace**:  $z_{xx} = 6x$      $z_{xx}(\mathcal{D}) = 0$      $z_{xx}(\mathcal{E}) = 36$   
 $z_{xy} = -18$   
 $z_{yx} = -18$   
 $z_{yy} = 6y$      $z_{yy}(\mathcal{D}) = 0$      $z_{yy}(\mathcal{E}) = 36$

5. **determinanty**:  $D(\mathcal{D}) = \begin{vmatrix} 0 & -18 \\ -18 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-18)^2 < 0$

V bodě  $\mathcal{D}$  není lokální extrém.

$$D(\mathcal{E}) = \begin{vmatrix} 36 & -18 \\ -18 & 36 \end{vmatrix} = 36^2 - (-18)^2 > 0$$

V bodě  $\mathcal{E}$  je lokální extrém.

6. **druh extrému**:  $z_{xx}(\mathcal{E}) = 36 > 0$      $\Rightarrow$  v bodě  $\mathcal{E}$  je (ostré) lokální **minimum**.

7. **všude v  $\mathbb{R}^2$**  první parciální derivace existují.

Našli jsme jediný lokální extrém dané funkce, a to  
**lokální minimum** ve stacionárním bodě  $\mathcal{E} = [6; 6]$ ,  
které má hodnotu  $f(6; 6) = -216$ .

5. Určete lokální extrémy funkce:  $f(x, y) : z = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x$ .

1. definiční obor funkce  $D(z)$ :  $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

2. první parciální derivace:  $z_x = 54xy - 54$        $z_y = 27x^2 + 42y^2 - 69$

$$\Rightarrow D(z_x) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad D(z_y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

3. stacionární body:  $54xy - 54 = 0 \quad | : 54$

$$27x^2 + 42y^2 - 69 = 0 \quad | : 3$$

$$\frac{\quad}{xy - 1 = 0} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \quad \text{pro } y \neq 0 \text{ (což je splněno)}$$

$$\frac{\quad}{9x^2 + 14y^2 - 23 = 0}$$

a po dosazení do druhé rovnice

$$9 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^2 + 14y^2 - 23 = 0 \quad | \cdot y^2 \text{ (pro } y \neq 0)$$

$$9 + 14y^4 - 23y^2 = 0 \quad \text{substituce } s = y^2$$

$$14s^2 - 23s + 9 = 0$$

$$s_{1;2} = \frac{23 \pm \sqrt{(-23)^2 - 4 \cdot 14 \cdot 9}}{2 \cdot 14} = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 504}}{28} = \frac{23 \pm 5}{28} \quad \begin{matrix} s_1 = 1 \\ s_2 = \frac{9}{14} \end{matrix}$$

$$y_{1;1} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1;1} = 1$$

$$y_{1;2} = -1 \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} = -1$$

$$y_{2;1} = \sqrt{\frac{9}{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14} \quad \Rightarrow \quad x_{2;1} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

$$y_{2;2} = -\sqrt{\frac{9}{14}} = -\frac{3}{\sqrt{14}} = -\frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14} \quad \Rightarrow \quad x_{2;2} = -\frac{\sqrt{14}}{3}$$

Funkce má čtyři stacionární body  $\mathcal{G} = [1; 1]$ ,  $\mathcal{J} = [-1; -1]$ ,  $\mathcal{K} = \left[\frac{\sqrt{14}}{3}; \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14}\right]$

a  $\mathcal{L} = \left[-\frac{\sqrt{14}}{3}; -\frac{3 \cdot \sqrt{14}}{14}\right]$ .

4. druhé parciální derivace:  $z_{xx} = 54y$

$$z_{xy} = 54x$$

$$z_{yx} = 54x$$

$$z_{yy} = 84y$$



$$\begin{array}{llll}
z_{xx}(\mathcal{G}) = 54 & z_{xx}(\mathcal{J}) = -54 & z_{xx}(\mathcal{K}) = \frac{81 \cdot \sqrt{14}}{7} & z_{xx}(\mathcal{L}) = -\frac{81 \cdot \sqrt{14}}{7} \\
z_{xy}(\mathcal{G}) = 54 & z_{xy}(\mathcal{J}) = -54 & z_{xy}(\mathcal{K}) = 18 \cdot \sqrt{14} & z_{xy}(\mathcal{L}) = -18 \cdot \sqrt{14} \\
z_{yx}(\mathcal{G}) = 54 & z_{yx}(\mathcal{J}) = -54 & z_{yx}(\mathcal{K}) = 18 \cdot \sqrt{14} & z_{yx}(\mathcal{L}) = -18 \cdot \sqrt{14} \\
z_{yy}(\mathcal{G}) = 84 & z_{yy}(\mathcal{J}) = -84 & z_{yy}(\mathcal{K}) = 18 \cdot \sqrt{14} & z_{yy}(\mathcal{L}) = -18 \cdot \sqrt{14}
\end{array}$$

**5. determinanty:**  $D(\mathcal{G}) = \begin{vmatrix} 54 & 54 \\ 54 & 84 \end{vmatrix} = 54 \cdot 84 - 54 \cdot 54 = 54 \cdot (84 - 54) > 0$

V bodě  $\mathcal{G}$  je lokální extrém.

$$D(\mathcal{J}) = \begin{vmatrix} -54 & -54 \\ -54 & -84 \end{vmatrix} = (-54) \cdot (-84) - (-54) \cdot (-54) = 54(84 - 54) > 0$$

V bodě  $\mathcal{J}$  je lokální extrém.

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{K}) &= \begin{vmatrix} \frac{81 \cdot \sqrt{14}}{7} & 18 \cdot \sqrt{14} \\ 18 \cdot \sqrt{14} & 18 \cdot \sqrt{14} \end{vmatrix} = \frac{81}{7} \cdot 18 \cdot 14 - 18 \cdot 18 \cdot 14 = 18 \cdot 14 \cdot \left(\frac{81}{7} - 18\right) = \\
&= 18 \cdot 14 \cdot \left(\frac{81 - 18 \cdot 7}{7}\right) = 18 \cdot 14 \cdot \left(\frac{81 - 126}{7}\right) < 0
\end{aligned}$$

V bodě  $\mathcal{K}$  NENÍ lokální extrém.

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{L}) &= \begin{vmatrix} -\frac{81 \cdot \sqrt{14}}{7} & -18 \cdot \sqrt{14} \\ -18 \cdot \sqrt{14} & -18 \cdot \sqrt{14} \end{vmatrix} = \frac{81}{7} \cdot 18 \cdot 14 - 18 \cdot 18 \cdot 14 = 18 \cdot 14 \cdot \left(\frac{81}{7} - 18\right) = \\
&= 18 \cdot 14 \cdot \left(\frac{81 - 18 \cdot 7}{7}\right) = 18 \cdot 14 \cdot \left(\frac{81 - 126}{7}\right) < 0
\end{aligned}$$

V bodě  $\mathcal{L}$  NENÍ lokální extrém.

**6. druh extrému:**  $z_{xx}(\mathcal{G}) = 54 > 0 \Rightarrow$  v bodě  $\mathcal{G}$  je (ostré) lokální **minimum**.

$z_{xx}(\mathcal{J}) = -54 < 0 \Rightarrow$  v bodě  $\mathcal{J}$  je (ostré) lokální **MAXIMUM**.

**7. všude v**  $D(z)$  první parciální derivace existují.

Našli jsme jediné dva lokální extrémy dané funkce, a to lokální minimum ve stacionárním bodě  $\mathcal{G} = [1; 1]$ ,

kteřé má hodnotu  $f(1; 1) = -82$  a

lokální maximum ve stacionárním bodě  $\mathcal{J} = [-1; -1]$ ,

kteřé má hodnotu  $f(-1; -1) = 82$ .

6. Určete lokální extrémy funkce:  $f(x, y) : z = x^2 - 2y^2 - 3x + 5y - 1$ .

1. definiční obor funkce  $D(z)$ :  $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

2. první parciální derivace:  $z_x = 2x - 3$      $z_y = -4y + 5$

$$\Rightarrow D(z_x) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad D(z_y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

3. stacionární body:  $2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$$-4y + 5 = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{5}{4}$$

Funkce má jeden stacionární bod  $\mathcal{M} = \left[ \frac{3}{2}; \frac{5}{4} \right]$ .

4. druhé parciální derivace:  $z_{xx} = 2$   
 $z_{xy} = 0$   
 $z_{yx} = 0$   
 $z_{yy} = -4$

5. determinant:  $D(\mathcal{M}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 < 0$

V bodě  $\mathcal{M}$  není lokální extrém.

6. druh extrému ...

7. všude v  $\mathbb{R}^2$  první parciální derivace existují.

Funkce nemá lokální extrém.

7. Určete lokální extrémy funkce:  $f(x, y) : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ .

1. definiční obor funkce  $D(z)$ :  $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

2. první parciální derivace:  $z_x = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x$      $z_y = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y$

$$\Rightarrow D(z_x) : \mathbb{R}^2 \setminus [0; 0] \quad D(z_y) : \mathbb{R}^2 \setminus [0; 0]$$

3. stacionární body:  $-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y \neq 0$

$$-\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \Rightarrow y = 0 \wedge x \neq 0$$

Funkce NEmá stacionární bod (v bodě  $\mathcal{N} = [0; 0]$  první parciální derivace NExistují).

4. druhé parciální derivace ...

5. determinant ...

6. druh extrému ...

7. první parciální derivace NExistují v bodě  $\mathcal{N} = [0; 0]$ .

$$f(0; 0) = 1$$

$$f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \quad \forall x \neq 0 \vee \forall y \neq 0$$

Našli jsme jediný lokální extrém dané funkce, a to

lokální MAXIMUM v bodě  $\mathcal{N} = [0; 0]$ ,

které má hodnotu  $f(0; 0) = 1$ .