FAKULTA STAVEBNÍ
ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Reálná funkce více proměnných

(Vázané extrémy funkce dvou proměnných)

Studijní materiály

Brno 2023 RNDr. Rudolf SCHWARZ, CSc., RNDr. Karel LEPKA, Dr.

Říkáme, že funkce $f(x\,;y)$ má v bodě $[x_o\,;y_o]$, pro který $\varphi(x_o\,;y_o)=0$, **vázaný lokální extrém** na vazbě $\varphi(x;y)=0$. Platí-li pro všechny body $[x\,;y]$ z určitého okolí bodu $[x_o\,;y_o]$

$f(x_o\,;y_o)\geq f(x\,;y)$ jedná se o lokální MAXIMUM,

$f(x_o\,;y_o)\leq f(x\,;y)$ jedná se o lokální minimum.

Jestliže pro uvažované body platí znaménko rovnosti jen v bodě $[x_o\,;y_o]$, mluvíme o **ostrém** lokálním vázaném extrému. Funkce $\varphi(x\,;y)$ se často nazývá **vazba**.

Prakticky hledáme vázané extrémy buď tak, že [alespoň v určité části funkce $\varphi(x\,;y)$] dovedeme explicitně vyjádřit jednu proměnou, a tu dosadíme do funkce $f(x\,;y)$. Tím problém redukujeme na hledání extrému jedné proměnné. Nebo použijeme Lagrangeovu metodu.

Příklad 1.

Určete lokální extrémy funkce $f(x\,;y)=xy-x+y-1$

vázané vedlejší **podmínkou** $\varphi(x\,;y):x+y-1=0$.

$[x\in\mathbb{R}\,;y\in\mathbb{R}]$

Řešení

1. způsob: Z vazby lze **explicitně** vyjádřit například proměnná y a tuto pak dosadíme do funkce f.

Po dosazení vazby pak následně hledáme (*volné* ⟸ nejsou vázány již žádnou podmínkou) lokální extrémy.

V našem případě:

$$\varphi: y=1-x$$

$$f=x(1-x)-x+(1-x)-1$$

$$f=-x^2-x$$

$$f_x=-2x-1$$

Víme (z 1. semestru), že lokální extrém může nastat pouze v bodech, ve kterých je funkce definována a první derivace mění své znaménko. Z průběhu funkce pak určíme, o jaký typ extrému se případně jedná.

Stacionární body

$$f_x: -2x-1=0$$

$$x=-\frac{1}{2}\quad\Longrightarrow\quad y=\frac{3}{2}$$

Existence a druh extrému

$$\begin{array}{lccc} \text{monotonie funkce } f(x) & \nearrow & & \searrow \\ \text{znaménko } f_x & (-\infty) + + + + & \left[x = -\frac{1}{2}\right] & - - - - (\infty) \end{array}$$

Tedy funkce $f = xy - x + y - 1$ má v bodě $\left[-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right]$ (ostré) vázané lokální MAXIMUM.

Hodnota tohoto **maxima** je $f\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{4}$.

2. způsob – Lagrangeova metoda: Sestavíme Lagrangeovu funkci $\mathcal{L}$ (λ se nazývá ***Lagrangeův multiplikátor***), určíme její gradient a ten položíme roven nulovému vektoru (tzn. hledáme stacionární body), což je **nutná** [1)] **podmínka pro existenci extrému** funkce $\mathcal{L}$ v kořenech $[x_i ; y_i ; \lambda_i]$ takto sestavené soustavy rovnic (viz např. WikipediE).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x ; y ; \lambda) &= f(x ; y) + \lambda\varphi(x ; y) \\ &= xy - x + y - 1 + \lambda(x + y - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \mathcal{L}_{x;y;\lambda} &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} ; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} ; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}\right) \\ (0 ; 0 ; 0) &= (y - 1 + \lambda ; x + 1 + \lambda ; x + y - 1) \end{aligned}$$

Stacionární body

Protože se musejí rovnat všechny souřadnice zmíněných vektorů, tak vlastně řešíme následující systém rovnic

$$\begin{aligned} y - 1 + \lambda &= 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 - y && (1) \\ x + 1 + \lambda &= 0 && (2) \\ x + y - 1 &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Z první rovnice (1) vyjádříme neznámou λ , dosadíme do druhé rovnice (2) a následně budeme pracovat jen s rovnicemi (2) a (3).

---

[1] **Postačující podmínkou** pro existenci extrému je, že pro všechny body $[x_o + \mathrm{d}x ; y_o + \mathrm{d}y]$ z určitého okolí bodu $[x_o ; y_o]$, takové, že $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$ nejsou současně rovny nule (tedy: $|\,\mathrm{d}x| + |\,\mathrm{d}y| > 0$) platí, že **totální diferenciál druhého řádu Lagrangeovy funkce $\mathcal{L}$ je nenulový**. To znamená, že plocha (graf funkce $\mathcal{L}$) je pořád NAD (nebo pod) tečnou rovinou v daném bodě.
Viz například strana 391 knihy REKTORYS, K. & KOL.: *Přehled užité matematiky* 2. opravené vydání. Praha : SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1968, 1140 s.
Pokud platí, že $\mathrm{d}^2\mathcal{L}(x_o ; y_o) > 0$, má funkce v daném bodě vázané lokální *minimum*;
pokud je $\mathrm{d}^2\mathcal{L}(x_o ; y_o) < 0$ (plocha je pod tečnou rovinou), jedná se o vázané lokální *MAXIMUM*;
Někdy je přitom zapotřebí ze vztahu $\varphi_x(x_o ; y_o)\,\mathrm{d}x + \varphi_y(x_o ; y_o)\,\mathrm{d}y = 0$ (který obdržíme diferencováním vedlejší podmínky) vyjádřit jeden z diferenciálů pomocí druhého a následně dosadit do $\mathrm{d}^2\mathcal{L}(x_o ; y_o)$ *viz například strana 48* knihy TOMICA, R.: *Cvičení z matematiky II.* 2. rozšířené vydání. Praha : 1969, 293 s.

$$\begin{array}{r} x + 1 + (1 - y) = 0 \\ x + y - 1 = 0 \\ \hline x - y + 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \\ \hline 2x + 1 = 0 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad x = -\frac{1}{2}$$

a po dosazení do (3) $\quad y = \dfrac{3}{2} \quad$ což dosadíme do (1)

$$\lambda = -\frac{1}{2}$$

Jediný stacionární bod funkce $\mathcal{L}$ má souřadnice $\mathcal{A}_\lambda = \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\right]$ a proto má

funkce $\boldsymbol{f} = xy - x + y - 1$ v bodě $\mathcal{A} = \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right]$ také **stacionární bod**.

Existence a druh extrému

Pro ověření existence extrému funkce $\mathcal{L}$ v bodu $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ můžeme použít hodnoty následujícího determinantu (tzv. Sylvestrovo rozhodovací kritérium) [2]:

$$D(\mathcal{A}_\lambda) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{xy}(\mathcal{A}_\lambda) \\ \mathcal{L}_{yx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{yy}(\mathcal{A}_\lambda) \end{vmatrix}$$

a to proto, že platí [3]:

- **Má-li Lagrangeova funkce** $\mathcal{L}$ příslušná k funkci f s vazbou $\mathcal{V}$ v bodě $\mathcal{A}_\lambda$ lokální extrém, **pak má funkce $\boldsymbol{f}$** v bodě $\mathcal{A}$ **vázaný lokální extrém téhož typu** s vazbou $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$.
- **Nemá-li Lagrangeova funkce** $\mathcal{L}$ v bodě $\mathcal{A}_\lambda$ lokální extrém, **neplyne** odtud, že funkce f nemá v bodě $\mathcal{A}$ vázaný lokální extrém.

  Tedy **funkce $\boldsymbol{f}$** přesto **může mít** v bodě $\mathcal{A}$ vázaný lokální extrém.

Určíme příslušné parciální derivace:

$$\mathcal{L} = xy - x + y - 1 + \lambda(x + y - 1) \qquad \begin{array}{ll} \mathcal{L}_x = y - 1 + \lambda & \begin{array}{l} \mathcal{L}_{xx} = 0 \\ \mathcal{L}_{xy} = 1 \end{array} \\ \mathcal{L}_y = x + 1 + \lambda & \begin{array}{l} \mathcal{L}_{yx} = 1 \\ \mathcal{L}_{yy} = 0 \end{array} \end{array}$$

V našem případě

$$D(\mathcal{A}_\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

[2] Pokud průnik funkcí $f \cap \varphi$ je omezenou a uzavřenou (tedy kompaktní) množinou, stačí se orientovat podle funkčních hodnot.

[3] Např. str. 19 učebních textů 5. Lokální, vázané a globální extrémy ÚM FSI VUT v Brně.

tedy podle předchozí odrážky jsme o existenci vázaného extrému funkce f nic nezjistili.
Využijeme proto, podle předchozí poznámky pod čarou (1), hodnoty druhého diferenciálu funkce $\mathcal{L}$ ve stacionárním bodu.

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{A}_\lambda) = 0\,\mathrm{d}x^2 + 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + 0\,\mathrm{d}y^2 \;=\; 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{4}$$

Diferencováním vedlejší podmínky dostaneme

$$\frac{\partial(x+y-1)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial(x+y-1)}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0$$

$$1\,\mathrm{d}x + 1\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}x$$

což dosadíme do (4) $\Longrightarrow$ $\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{A}) = 2\,\mathrm{d}x(-\,\mathrm{d}x) = -2\,\mathrm{d}x^2$

V okolí bodu $\mathcal{A}_\lambda$, tedy pro **dostatečně malé** $(|\,\mathrm{d}x| + |\,\mathrm{d}y| > 0))$ **hodnoty** $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ platí: $\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{A}_\lambda) \neq 0$, proto má funkce $\mathcal{L}$ v bodě $\mathcal{A}_\lambda$ lokální extrém (viz zmíněná poznámka pod čarou). A jelikož v okolí bodu $\mathcal{A}_\lambda$ platí: $\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{A}_\lambda) = -2\,\mathrm{d}x^2 < 0$, je tento extrém lokální MAXIMUM. viz (1)

Proto podle ***odrážky*** má i funkce $f = xy - x + y - 1$ v bodě $\mathcal{A} = \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right]$ lokální MAXIMUM vázané podmínkou $x + y - 1 = 0$.

Hodnota tohoto **maxima** je $f\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{4}$.

Příklad 2.

Určete lokální extrémy funkce $f(x\,;y) = x + y$

vázané vedlejší **podmínkou** $\varphi(x\,;y) : x^2 + y^2 - 1 = 0$.

$[x \in \mathbb{R}\,;\; y \in \mathbb{R}]$

Řešení Lagrangeovou metodou

- Sestavíme **Lagrangeovu** funkci $\mathcal{L}(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda\varphi(x;y)$

$$\mathcal{L}(x\,;y\,;\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

- určíme její gradient $\quad \operatorname{grad}\mathcal{L}_{x;y;\lambda} = \left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\,;\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\,;\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}\right)$

- gradient položíme roven nulovému vektoru.

$$(0\,;0\,;0) = \left(1 + 2\lambda x\,; 1 + 2\lambda y\,; x^2 + y^2 - 1\right)$$

Stacionární body

Řešíme následující systém rovnic

$$1 + 2\lambda x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{-1}{2x} \quad \text{pro} \quad x \neq 0 \tag{5}$$

$$1 + 2\lambda y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{-1}{2y} \quad \text{pro} \quad y \neq 0 \tag{6}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{7}$$

Porovnáme λ, které jsme získali z rovnic (5) a (6) a tím dostaneme $y = x$, což dosadíme do rovnice (7).

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ x^2 + x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Dostáváme dva stacionární body $\mathcal{A}_\lambda = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$ a $\mathcal{B}_\lambda = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\,;\frac{-1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Existence a druh extrému

Ověření existence extrému funkce $\mathcal{L}$ ve stacionárním bodu $\mathcal{A}_\lambda$ (Sylvestrovo rozhodovací kritérium – a stejně tak pro bod $\mathcal{B}_\lambda$):

$$D(\mathcal{A}_\lambda) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{xy}(\mathcal{A}_\lambda) \\ \mathcal{L}_{yx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{yy}(\mathcal{A}_\lambda) \end{vmatrix}$$

Určíme příslušné parciální derivace:

$$\mathcal{L} = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \qquad \begin{aligned} \mathcal{L}_x &= 1 + 2\lambda x & \mathcal{L}_{xx} &= 2\lambda \\ & & \mathcal{L}_{xy} &= 0 \\ \mathcal{L}_y &= 1 + 2\lambda y & \mathcal{L}_{yx} &= 0 \\ & & \mathcal{L}_{yy} &= 2\lambda \end{aligned}$$

Sestavíme požadovaný determinant:

$$D = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 \geq 0$$

$$\mathcal{A}_\lambda = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{-1}{\sqrt{2}}\right] \quad \Longrightarrow \quad D(\mathcal{A}_\lambda) = 4\lambda^2 > 0 \ \wedge \ \mathcal{L}_{xx}(\mathcal{A}_\lambda) = 2\lambda < 0$$

A proto v bodě $\mathcal{A}_\lambda$ má funkce $\mathcal{L}$ extrém $(D > 0)$, a je to (ostré) lokální MAXIMUM.

Tedy funkce f má v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ také vázané lokální MAXIMUM, jehož hodnota je:

$$f(\mathcal{A}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$\mathcal{B}_\lambda = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}} ; \frac{-1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad \Longrightarrow \quad D(\mathcal{B}_\lambda) = 4\lambda^2 > 0 \ \wedge \ \mathcal{L}_{xx}(\mathcal{B}_\lambda) = 2\lambda > 0$

A proto v bodě $\mathcal{B}_\lambda$ má funkce $\mathcal{L}$ extrém $(D > 0)$, a je to (ostré) lokální minimum.

Tedy funkce f má v bodě $\left[\frac{-1}{\sqrt{2}} ; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$ také vázané lokální minimum, jehož hodnota je:

$$f(\mathcal{B}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Příklad 3.

Určete lokální extrémy funkce $f(x ; y) = xy$

vázané vedlejší **podmínkou** $\varphi(x ; y) : x^2 + y^2 - 2 = 0$.

$[x \in \mathbb{R} ; \ y \in \mathbb{R}]$

Řešení Lagrangeovou metodou

- Sestavíme **Lagrangeovu** funkci $\mathcal{L}(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)$

$$\mathcal{L}(x ; y ; \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

- určíme její gradient $\operatorname{grad} \mathcal{L}_{x;y;\lambda} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} ; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} ; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)$
- gradient položíme roven nulovému vektoru.

$$(0 ; 0 ; 0) = \left(y + 2\lambda x ; x + 2\lambda y ; x^2 + y^2 - 2\right)$$

Stacionární body

Řešíme následující systém rovnic

$$y + 2\lambda x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{-y}{2x} \quad \text{pro} \quad x \neq 0 \tag{8}$$

$$x + 2\lambda y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{-x}{2y} \quad \text{pro} \quad y \neq 0 \tag{9}$$

$$x^2 + y^2 - 2 = 0 \tag{10}$$

Porovnáme λ , které jsme získali z rovnic (8) a (9) a tím dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{-y}{2x} &= \frac{-x}{2y} \\ y^2 &= x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \pm x \end{aligned}$$

což dosadíme do rovnice (10).

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2 &= 0 \\ x^2 + x^2 &= 2 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Dostáváme čtyři stacionární body (tj. body *podezřelé* z extrému):

$\mathcal{A}_\lambda = \left[1\,;1\,;-\frac{1}{2}\right]$; $\mathcal{B}_\lambda = \left[1\,;-1\,;\frac{1}{2}\right]$; $\mathcal{C}_\lambda = \left[-1\,;1\,;\frac{1}{2}\right]$; $\mathcal{D}_\lambda = \left[-1\,;-1\,;-\frac{1}{2}\right]$

Existence a druh extrému

Ověření existence extrému funkce $\mathcal{L}$ ve stacionárním bodu $\mathcal{A}_\lambda$ (Sylvestrovo rozhodovací kritérium – a stejně tak pro body $\mathcal{B}_\lambda$, $\mathcal{C}_\lambda$ a $\mathcal{D}_\lambda$):

$$D(\mathcal{A}_\lambda) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{xy}(\mathcal{A}_\lambda) \\ \mathcal{L}_{yx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{yy}(\mathcal{A}_\lambda) \end{vmatrix}$$

Určíme příslušné parciální derivace:

$$\mathcal{L} = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2) \qquad \begin{aligned} \mathcal{L}_x &= y + 2\lambda x \qquad & \mathcal{L}_{xx} &= 2\lambda \\ & & \mathcal{L}_{xy} &= 1 \\ \mathcal{L}_y &= x + 2\lambda y \qquad & \mathcal{L}_{yx} &= 1 \\ & & \mathcal{L}_{yy} &= 2\lambda \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - 1$$

$\mathcal{A}_\lambda = \left[1\,;1\,;-\frac{1}{2}\right]$ $\qquad D(\mathcal{A}_\lambda) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$

Tedy o extrému Lagrangeova funkce $\mathcal{L}$ v bodě $\mathcal{A}_\lambda$ neumíme tímto způsobem rozhodnout, proto o extrému funkce f v bodě $\mathcal{A}$ nevíme naprosto nic. Stejně tak nic nevíme i o ostatních třech stacionárních bodech.

Proto pro Lagrangeovu funkci $\mathcal{L}$ určíme podle poznámky pod čarou (1) hodnotu druhého totálního diferenciálu v každém stacionárním bodě, ve které jsme nerozhodli předchozím determinantem.

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L} = 2\lambda\,\mathrm{d}x^2 + 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + 2\lambda\,\mathrm{d}y^2 \quad \wedge \quad \underline{|\,\mathrm{d}x| + |\,\mathrm{d}y| > 0}$$

a dále z vazby

$$\begin{aligned}
\varphi_x\,\mathrm{d}x + \varphi_y\,\mathrm{d}y &= 0\\
2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y &= 0\\
\mathrm{d}x &= -\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y\\
\mathrm{d}^2\mathcal{L} &= 2\lambda\left(-\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y\right)^2 + 2\left(-\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y + 2\lambda\,\mathrm{d}y^2\\
\mathrm{d}^2\mathcal{L} &= 2\,\mathrm{d}y^2\left(\frac{\lambda y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + \lambda\right)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_\lambda = \left[1\,;1\,;-\tfrac{1}{2}\right] \;;\; \mathcal{B}_\lambda = \left[1\,;-1\,;\tfrac{1}{2}\right] \;;\; \mathcal{C}_\lambda = \left[-1\,;1\,;\tfrac{1}{2}\right] \;;\; \mathcal{D}_\lambda = \left[-1\,;-1\,;-\tfrac{1}{2}\right]$$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}(\mathcal{A}_\lambda) = 2\,\mathrm{d}y^2\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(1)^2}{(1)^2} - \frac{(1)}{(1)} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -4\,\mathrm{d}y^2 < 0 \qquad \text{za } \underline{\text{podmínky}}$$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}(\mathcal{B}_\lambda) = 2\,\mathrm{d}y^2\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)^2}{(1)^2} - \frac{(-1)}{(1)} + \left(\frac{1}{2}\right)\right] = +4\,\mathrm{d}y^2 > 0$$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}(\mathcal{C}_\lambda) = 2\,\mathrm{d}y^2\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(1)^2}{(-1)^2} - \frac{(1)}{(-1)} + \left(\frac{1}{2}\right)\right] = +4\,\mathrm{d}y^2 > 0$$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda) = 2\,\mathrm{d}y^2\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right).(-1)^2}{(-1)^2} - \frac{(-1)}{(-1)} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -4\,\mathrm{d}y^2 < 0$$

Tedy podle poznámky pod čarou (1) má Lagrangeova funkce $\mathcal{L}$ v bodech $\mathcal{A}_\lambda$ a $\mathcal{D}_\lambda$ lokální MAXIMUM a v bodech $\mathcal{B}_\lambda$ a $\mathcal{C}_\lambda$ lokální minimum. Proto podle ***odrážky*** má funkce $f(x\,;y) = xy$ vázaná podmínkou $\varphi(x\,;y) : x^2 + y^2 - 2 = 0$ v bodech $\mathcal{A} = [1\,;1]$ a $\mathcal{D} = [-1\,;-1]$ lokální MAXIMUM a v bodech $\mathcal{B} = [1\,;-1]$ a $\mathcal{C} = [-1\,;1]$ lokální minimum.

Hodnota MAXIMA je

$$f(1;1) = f(-1;-1) = 1$$

a minima

$$f(1;-1) = f(-1;1) = -1$$

Příklad 4.

Určete lokální extrémy funkce $f(x\,;y) = x + y + 2$

vázané vedlejší **podmínkou** $\varphi(x\,;y) : 2x^2 - x^2y^2 + 2y^2 = 0\,.$

$[x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}]$

Řešení Lagrangeovou metodou.

- Sestavíme **Lagrangeovu** funkci $\mathcal{L}(x\,;y\,;\lambda) = f(x\,;y) + \lambda\varphi(x\,;y)$

$$\mathcal{L}(x\,;y\,;\lambda) = x + y + 2 + \lambda(2x^2 - x^2y^2 + 2y^2)$$

- určíme její gradient $\operatorname{grad} \mathcal{L}_{x;y;\lambda} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\,;\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\,;\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}\right)$
- gradient položíme roven nulovému vektoru.

$$(0\,;0\,;0) = \left(1 + \lambda[4x - 2xy^2]\,;1 + \lambda[-2x^2y + 4y]\,;2x^2 - x^2y^2 + 2y^2\right)$$

Stacionární body

Řešíme následující systém rovnic

$$\begin{aligned}
1 + \lambda(4x - 2xy^2) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{-1}{2x(2 - y^2)} \quad \text{když} \quad x \neq 0 \wedge y \neq \pm\sqrt{2} && (11)\\
1 + \lambda(4y - 2x^2y) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{-1}{2y(2 - x^2)} \quad \text{když} \quad y \neq 0 \wedge x \neq \pm\sqrt{2} && (12)\\
2x^2 - x^2y^2 + 2y^2 &= 0 && (13)
\end{aligned}$$

Z první rovnice (11) a druhé rovnice (12) vyjádříme neznámou λ a porovnáme je:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x(y^2 - 2)} &= \frac{1}{2y(x^2 - 2)}\\
y(x^2 - 2) &= x(y^2 - 2)\\
x^2y + 2x - 2y - xy^2 &= 0\\
x(xy + 2) - y(2 + xy) &= 0\\
(x - y)(xy + 2) &= 0
\end{aligned}$$

což může nastat pouze když:

$$\begin{aligned}
x - y = 0 \quad &\vee \quad xy + 2 = 0\\
x = y \quad &\vee \quad x = -\frac{2}{y} && (14)
\end{aligned}$$

Vztahy uvedené v (14) postupně dosadíme do (13).

Levý (14) do (13)

$$2(y)^2 - (y)^2 y^2 + 2y^2 = 0$$
$$y^2(4 - y^2) = 0$$

tedy **buď** $y = 0$, což ovšem odporuje podmínce v rovnici (12), **nebo** $y = \pm 2$. Dostáváme

tedy dva stacionární body $\mathcal{A} = [2\,;2]$ pro $\lambda = \frac{1}{8}$ a $\mathcal{B} = [-2\,;-2]$ pro $\lambda = -\frac{1}{8}$.

Pravý (14) do (13)

$$2\left(-\frac{2}{y}\right)^2 - \left(-\frac{2}{y}\right)^2 y^2 + 2y^2 = 0 \quad | : 2$$
$$\frac{4}{y^2} + y^2 - 2 = 0$$
$$y^4 - 2y^2 + 4 = 0$$
$$y_{1;2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

což nemá v oboru reálných čísel řešení.

Existence a druh extrému

Ověření existence extrému funkce $\mathcal{L}$ v bodu $\mathcal{A}_\lambda$ (Sylvestrovo rozhodovací kritérium [4)]) a stejně tak pro bod $\mathcal{B}_\lambda$:

$$D(\mathcal{A}_\lambda) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{xy}(\mathcal{A}_\lambda) \\ \mathcal{L}_{yx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{yy}(\mathcal{A}_\lambda) \end{vmatrix}$$

Určíme příslušné parciální derivace:

$$\mathcal{L} = x + y + 2 + \lambda(2x^2 - x^2y^2 + 2y^2)$$

$$\mathcal{L}_x = 1 + \lambda(4x - 2xy^2) \qquad \mathcal{L}_{xx} = \lambda(4 - 2y^2), \quad \mathcal{L}_{xy} = -4\lambda xy$$

$$\mathcal{L}_y = 1 + \lambda(-2x^2y + 4y) \qquad \mathcal{L}_{yx} = -4\lambda xy, \quad \mathcal{L}_{yy} = \lambda(-2x^2 + 4)$$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda(4 - 2y^2) & -4\lambda xy \\ -4\lambda xy & \lambda(-2x^2 + 4) \end{vmatrix} = \lambda^2\left[(4 - 2y^2)(-2x^2 + 4) - 16x^2y^2\right]$$

$$D = \lambda^2\left(16 - 8x^2 - 8y^2 - 12x^2y^2\right)$$

---

4 Lze také rozhodovat pomocí rozšířené Hessovy matice H_r , která je používána na straně 10 a následujících v diplomové práci: VAVREČKOVÁ, N.: *Vázané extrémy a jejich využití v ekonomii.* Brno : Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Ústav matematiky a statistiky, 2014, 62 s.

$$H_r = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_x & \varphi_y \\ \varphi_x & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ \varphi_y & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}_\lambda = \left[2\,;2\,;\tfrac{1}{8}\right]$

$$D\,(\mathcal{A}_\lambda) = \lambda^2\left[16 - 8(2)^2 - 8(2)^2 - 12(2)^2(2)^2\right] = -240\lambda^2 < 0$$

tedy o případném extrému funkce f v bodu $\mathcal{A}$ nevíme naprosto nic.

$\mathcal{B}_\lambda = \left[-2\,;-2\,;-\tfrac{1}{8}\right]$

$$D(\mathcal{B}_\lambda) = \lambda^2\left[16 - 8(-2)^2 - 8(-2)^2 - 12(-2)^2(-2)^2\right] = -240\lambda^2 < 0$$

tedy o případném extrému funkce f v bodu $\mathcal{B}$ nevíme také nic.

Využijeme proto opět, podle poznámky pod čarou (1), hodnoty druhého diferenciálu funkce $\mathcal{L}$ ve všech stacionárních bodech, ve kterých jsme zatím nerozhodli.

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{A}_\lambda) = \frac{1}{8}\left[4 - 2(2)^2\right]\,\mathrm{d}x^2 - 4\frac{1}{8}(2)(2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 4\frac{1}{8}(2)(2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\left[-2(2)^2 + 4\right]\,\mathrm{d}y^2$$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{A}_\lambda) \;=\; -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x^2 - 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y^2 \qquad (15)$$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{B}_\lambda) = \frac{-1}{8}\left[4 - 2(-2)^2\right]\,\mathrm{d}x^2 - 4\frac{-1}{8}(-2)(-2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y -$$
$$-4\frac{-1}{8}(-2)(-2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \frac{-1}{8}\left[-2(-2)^2 + 4\right]\,\mathrm{d}y^2$$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{B}_\lambda) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x^2 + 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y^2 \qquad (16)$$

Diferencováním vedlejší podmínky dostaneme

$$\frac{\partial(2x^2 - x^2y^2 + 2y^2)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial(2x^2 - x^2y^2 + 2y^2)}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0$$

$$(4x - 2xy^2)\,\mathrm{d}x + (-2x^2y + 4y)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$x(2 - y^2)\,\mathrm{d}x = y(x^2 - 2)\,\mathrm{d}y$$

$$\frac{x(2 - y^2)}{y(x^2 - 2)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$$

což dosadíme do (15) a (16).

$\mathcal{A}_\lambda = \left[2\,;2\,;\tfrac{1}{8}\right]$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{A}_\lambda) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x^2 - 4\,\mathrm{d}x\frac{(2)\left[2 - (2)^2\right]}{(2)\left[(2)^2 - 2\right]}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left\{\frac{(2)\left[2 - (2)^2\right]}{(2)\left[(2)^2 - 2\right]}\,\mathrm{d}x\right\}^2 =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 4 - \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x^2 = 3\,\mathrm{d}x^2$$

V okolí bodu $\mathcal{A}_\lambda$ je $\mathrm{d}^2\mathcal{L}(\mathcal{A}_\lambda) \neq 0$, tedy funkce f má v bodu $\mathcal{A}$ vázaný lokální extrém. Navíc v okolí tohoto bodu platí, že $\mathrm{d}^2\mathcal{L}(\mathcal{A}_\lambda) > 0$, proto jde o vázané lokální minimum, jehož hodnota je

$$f(2\,;2) = (2) + (2) + 2 = 6$$

$\mathcal{B}_\lambda = \left[-2\,;-2\,;-\frac{1}{8}\right]$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}(\mathcal{B}_\lambda) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x^2 + 4\,\mathrm{d}x\frac{(-2)\left[2-(-2)^2\right]}{(-2)\left[(-2)^2-2\right]}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left\{\frac{(-2)\left[2-(-2)^2\right]}{(-2)\left[(-2)^2-2\right]}\,\mathrm{d}x\right\}^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 4 + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x^2 = -3\,\mathrm{d}x^2$$

V okolí bodu $\mathcal{B}_\lambda$ je $\mathrm{d}^2\mathcal{L}(\mathcal{B}_\lambda) \neq 0$, tedy funkce f má v bodu $\mathcal{B}$ vázaný lokální extrém. Navíc v okolí tohoto bodu platí, že $\mathrm{d}^2\mathcal{L}(\mathcal{B}_\lambda) < 0$, proto jde o vázané lokální MAXIMUM, jehož hodnota je

$$f(-2\,;-2) = (-2) + (-2) + 2 = -2$$

Příklad 5.

Určete lokální extrémy funkce $f(x\,;y) = x^2 + y^2$

vázané vedlejší **podmínkou** $\varphi(x\,;y) : x^2 + 4y^2 - 1 = 0\,.$

$[x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}]$

Řešení Lagrangeovou metodou.

- Sestavíme **Lagrangeovu** funkci $\mathcal{L}(x\,;y\,;\lambda) = f(x\,;y) + \lambda\varphi(x\,;y)$

$$\mathcal{L}(x\,;y\,;\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 1)$$

- určíme její gradient $\operatorname{grad}\mathcal{L}_{x;y;\lambda} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\,;\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\,;\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}\right)$

- gradient položíme roven nulovému vektoru.

$$(0\,;0\,;0) = \left(2x + 2\lambda x\,;2y + 8\lambda y\,;x^2 + 4y^2 - 1\right)$$

Stacionární body

Řešíme následující systém rovnic

$$2x(1+\lambda) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad \lambda = -1 \tag{17}$$

$$2y(1+4\lambda) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad \lambda = -\frac{1}{4} \tag{18}$$

$$x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \tag{19}$$

1. $x = 0$ dosadíme do druhé rovnice (18) a třetí rovnice (19)

$$2y(1+4\lambda) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad \lambda = -\frac{1}{4}$$

$$4y^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{2} \tag{20}$$

Pokud bude $y = 0$, neplatí rovnost (20). Dostáváme tedy dva **stacionární** body $\mathcal{A} = \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ a $\mathcal{B} = \left[0\,;-\frac{1}{2}\right]$, oba pro $\lambda = -\frac{1}{4}$.

2. $\lambda = -1$ dosadíme do druhé rovnice (18) a třetí rovnice (19)

$$2y(1-4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

$$4y^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{2}$$

což evidentně nemá řešení.

3. $y = 0$ dosadíme do první rovnice (17) a třetí rovnice (19)

$$2x(1+\lambda) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad \lambda = -1$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1 \tag{21}$$

Pokud bude $x = 0$, neplatí rovnost (21). Dostáváme tedy další dva **stacionární** body $\mathcal{C} = [1\,;0]$ a $\mathcal{D} = [-1\,;0]$, oba pro $\lambda = -1$.

4. $\lambda = -\frac{1}{4}$ dosadíme do první rovnice (17) a třetí rovnice (19)

$$2x(1-\frac{1}{4}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1$$

což evidentně nemá řešení.

Existence a druh extrému

Ověření existence extrému funkce $\mathcal{L}$ **ve stacionárním bodu** $\mathcal{A}_\lambda$ (Sylvestrovo rozhodovací kritérium). Stejně tak pro body $\mathcal{B}_\lambda$, $\mathcal{C}_\lambda$, $\mathcal{D}_\lambda$:

$$D(\mathcal{A}_\lambda) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{xy}(\mathcal{A}_\lambda) \\ \mathcal{L}_{yx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{yy}(\mathcal{A}_\lambda) \end{vmatrix}$$

Určíme příslušné parciální derivace:

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 1) \qquad \begin{matrix} \mathcal{L}_x = 2x + \lambda(2x) & \begin{matrix} \mathcal{L}_{xx} = 2 + 2\lambda \\ \mathcal{L}_{xy} = 0 \end{matrix} \\ \mathcal{L}_y = 2y + \lambda(8y) & \begin{matrix} \mathcal{L}_{yx} = 0 \\ \mathcal{L}_{yy} = 2 + 8\lambda \end{matrix} \end{matrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 8\lambda \end{vmatrix} = (2 + 2\lambda)(2 + 8\lambda) = 4 + 20\lambda + 16\lambda^2$$

$$\mathcal{A}_\lambda = \left[0\,; \frac{1}{2}\,; -\frac{1}{4}\right] \qquad D\,(\mathcal{A}_\lambda) = 4 + 20\left(-\frac{1}{4}\right) + 16\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 4 - 5 + 1 = 0$$

tedy o případném extrému funkce f v bodu $\mathcal{A}$ nevíme naprosto nic.

$$\mathcal{B}_\lambda = \left[0\,; -\frac{1}{2}\,; -\frac{1}{4}\right] \qquad D(\mathcal{B}_\lambda) = 4 + 20\left(-\frac{1}{4}\right) + 16\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 4 - 5 + 1 = 0$$

tedy o případném extrému funkce f v bodu $\mathcal{B}$ nevíme také nic.

$$\mathcal{C}_\lambda = [1\,; 0\,; -1] \qquad D(\mathcal{C}_\lambda) = 4 + 20\,(-1) + 16\,(-1)^2 = 4 - 20 + 16 = 0$$

tedy o případném extrému funkce f v bodu $\mathcal{C}$ nevíme také nic.

$$\mathcal{D}_\lambda = [-1\,; 0\,; -1] \qquad D(\mathcal{D}_\lambda) = 4 + 20\,(-1) + 16\,(-1)^2 = 4 - 20 + 16 = 0$$

tedy o případném extrému funkce f v bodu $\mathcal{D}$ nevíme také nic.

Využijeme proto opět, podle poznámky pod čarou (1), hodnoty druhého diferenciálu Lagrangeovy funkce $\mathcal{L}$ ve všech stacionárních bodech, ve kterých jsme prozatím extrém neprokázali.

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 1) \qquad \begin{matrix} \mathcal{L}_x = 2x + 2\lambda x & \begin{matrix} \mathcal{L}_{xx} = 2 + 2\lambda \\ \mathcal{L}_{xy} = 0 \end{matrix} \\ \mathcal{L}_y = 2y + 8\lambda y & \begin{matrix} \mathcal{L}_{yx} = 0 \\ \mathcal{L}_{yy} = 2 + 8\lambda \end{matrix} \end{matrix}$$

$\mathcal{A}_\lambda = \left[0\,;\tfrac{1}{2}\,;-\tfrac{1}{4}\right]$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{A}_\lambda) = \left(2 - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x^2 + 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 0\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + (2-2)\,\mathrm{d}y^2 = \frac{3}{2}\,\mathrm{d}x^2$$

V okolí bodu $\mathcal{A}_\lambda$ je $\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{A}_\lambda) \neq 0$, tedy funkce f má v bodu $\mathcal{A}$ vázaný lokální extrém. Navíc v okolí tohoto bodu platí, že $\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{A}_\lambda) > 0$, proto jde o vázané lokální minimum, jehož hodnota je

$$f\left(0\,;\frac{1}{2}\right) = (0)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$\mathcal{B}_\lambda = \left[0\,;-\tfrac{1}{2}\,;-\tfrac{1}{4}\right]$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{B}_\lambda) = \left(2 - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x^2 + 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 0\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + (2-2)\,\mathrm{d}y^2 = \frac{3}{2}\,\mathrm{d}x^2$$

V okolí bodu $\mathcal{B}_\lambda$ je $\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{B}_\lambda) \neq 0$, tedy funkce f má v bodu $\mathcal{B}$ vázaný lokální extrém. Navíc v okolí tohoto bodu platí, že $\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{B}_\lambda) > 0$, proto jde o vázané lokální minimum, jehož hodnota je

$$f\left(0\,;-\frac{1}{2}\right) = (0)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$\mathcal{C}_\lambda = [1\,;0\,;-1]$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{C}_\lambda) = (2-2)\,\mathrm{d}x^2 + 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 0\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + (2-8)\,\mathrm{d}y^2 = -6\,\mathrm{d}y^2$$

V okolí bodu $\mathcal{C}_\lambda$ je $\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{C}_\lambda) \neq 0$, tedy funkce f má v bodu $\mathcal{C}$ vázaný lokální extrém. Navíc v okolí tohoto bodu platí, že $\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{C}_\lambda) < 0$, proto jde o vázané lokální MAXIMUM, jehož hodnota je

$$f\,(1\,;0) = (1)^2 + (0)^2 = 1$$

$\mathcal{D}_\lambda = [-1\,;0\,;-1]$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{D}_\lambda) = (2-2)\,\mathrm{d}x^2 + 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 0\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + (2-8)\,\mathrm{d}y^2 = -6\,\mathrm{d}y^2$$

V okolí bodu $\mathcal{D}_\lambda$ je $\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{D}_\lambda) \neq 0$, tedy funkce f má v bodu $\mathcal{D}$ vázaný lokální extrém. Navíc v okolí tohoto bodu platí, že $\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{D}_\lambda) < 0$, proto jde o vázané lokální MAXIMUM, jehož hodnota je

$$f\,(-1\,;0) = (1)^2 + (0)^2 = 1$$

Příklad 6.

Určete lokální extrémy funkce $f(x\,;y) = x^3 + y^3$

vázané vedlejší **podmínkou** $\varphi(x\,;y) : x + y - 3 = 0\,.$

$[x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}]$

Řešení

1. způsob: Lagrangeova metoda.

- Sestavíme **Lagrangeovu** funkci $\mathcal{L}(x\,;y\,;\lambda) = f(x\,;y) + \lambda\varphi(x\,;y)$

$$\mathcal{L}(x\,;y\,;\lambda) = x^3 + y^3 + \lambda(x + y - 3)$$

- určíme její gradient $\operatorname{grad} \mathcal{L}_{x;y;\lambda} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\,;\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\,;\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)$
- gradient položíme roven nulovému vektoru.

$$(0\,;0\,;0) = \left(3x^2 + \lambda\,;3y^2 + \lambda\,;x + y - 3\right)$$

Stacionární body

Řešíme následující systém rovnic

$$\begin{aligned} 3x^2 + \lambda &= 0 && && (22)\\ 3y^2 + \lambda &= 0 && && (23)\\ x + y - 3 &= 0 && \Longrightarrow \quad x = 3 - y && (24) \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice (24) osamostatníme proměnnou x a dosadíme ji do první rovnice (22)

$$\begin{array}{lrl} (22) & 3(3-y)^2 + \lambda = 0 & \\ (23) & 3y^2 + \lambda = 0 & \\ \hline & 3(9 - 6y + y^2) + \lambda = 0 & \\ & 3y^2 + \lambda = 0 & \\ \hline & 3y^2 - 18y + 27 + \lambda = 0 & |\cdot(-1) \\ & 3y^2 + \lambda = 0 & \\ \hline & 18y - 27 = 0 & |:9 \\ \hline & 2y - 3 = 0 & \Longrightarrow\ y = \frac{3}{2} \end{array}$$

Dostáváme jeden stacionární bod (tj. bod *podezřelý* z extrému) $\mathcal{A}_\lambda = \left[\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\,;-\frac{27}{4}\right]$

Existence a druh extrému

Ověření existence extrému funkce $\mathcal{L}$ **ve stacionárním bodu** $\mathcal{A}_\lambda$ (Sylvestrovo rozhodovací kritérium):

$$D(\mathcal{A}_\lambda) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{xy}(\mathcal{A}_\lambda) \\ \mathcal{L}_{yx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{yy}(\mathcal{A}_\lambda) \end{vmatrix}$$

Určíme příslušné parciální derivace:

$$\mathcal{L} = x^3 + y^3 + \lambda(x + y - 3) \qquad \mathcal{L}_x = 3x^2 + \lambda \qquad \begin{matrix} \mathcal{L}_{xx} = 6x \\ \mathcal{L}_{xy} = 0 \end{matrix}$$

$$\mathcal{L}_y = 3y^2 + \lambda \qquad \begin{matrix} \mathcal{L}_{yx} = 0 \\ \mathcal{L}_{yy} = 6y \end{matrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy$$

$$D\left(\tfrac{3}{2}; \tfrac{3}{2}; -\tfrac{27}{4}\right) = 36 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{3}{2} = 81 > 0 \ \wedge \ \mathcal{L}_{xx}\left(\tfrac{3}{2}; \tfrac{3}{2}; -\tfrac{27}{4}\right) = 6 \cdot \tfrac{3}{2} = 9 > 0$$

Tedy v bodě $\mathcal{A}$ je pro funkci f vázané lokální minimum, které má hodnotu

$$f\left(\tfrac{3}{2}; \tfrac{3}{2}\right) = \left(\tfrac{3}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^3 = \frac{54}{8}$$

2. způsob: Z **vazby** lze explicitně vyjádřit $y = 3 - x$. Dosadíme do funkce f a hledáme extrémy funkce jedné proměnné. Tedy

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + (3 - x)^3 \\ &= x^3 + 27 - 27x + 9x^2 - x^3 \\ &= 9x^2 - 27x + 27 \end{aligned}$$

Stacionární body

$$f_x : 18x - 27 = 0$$
$$x = \tfrac{3}{2}$$

Existence a druh extrému

$$\begin{array}{ll} \text{funkce } f(x) & \qquad\searrow \qquad\qquad\qquad \nearrow \\ \text{znaménko } f_x & (-\infty) - - - - \left[x = \tfrac{3}{2}\right] + + + + (\infty) \end{array}$$

Tedy zadaná funkce $f(x; y)$ má v bodě

$\mathcal{A} = \left[\tfrac{3}{2}; \tfrac{3}{2}\right]$ vázané lokální minimum $f(\mathcal{A}) = \left(\tfrac{3}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{54}{8}$

Příklad 7.

Určete lokální extrémy funkce $f(x\,;y) = xy$

vázané vedlejší **podmínkou** $\varphi(x\,;y) : x + y - 1 = 0$.

[$x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}$]

Řešení

1. způsob: Lagrangeova metoda.

- Sestavíme **Lagrangeovu** funkci $\mathcal{L}(x\,;y\,;\lambda) = f(x\,;y) + \lambda\varphi(x\,;y)$

$$\mathcal{L}(x\,;y\,;\lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$$

- určíme její gradient $\operatorname{grad} \mathcal{L}_{x;y;\lambda} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\,;\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\,;\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)$
- gradient položíme roven nulovému vektoru.

$$(0\,;0\,;0) = (y + \lambda\,;x + \lambda\,;x + y - 1)$$

Stacionární body

Řešíme následující systém rovnic

$$\begin{aligned} x + \lambda &= 0 && && (25)\\ y + \lambda &= 0 && && (26)\\ x + y - 1 &= 0 && \Longrightarrow \quad x = 1 - y && (27) \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice (27) osamostatníme proměnnou x a dosadíme ji do zbylých dvou:

$$\begin{array}{ll} (25) & (1 - y) + \lambda = 0 \\ (26) & y + \lambda = 0 \\ \hline & 1 + 2\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \ \lambda = -\tfrac{1}{2} \end{array}$$

Pro $\lambda = -\frac{1}{2}$ dostáváme jeden stacionární bod $\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$.

Existence a druh extrému

Ověření existence extrému funkce $\mathcal{L}$ ve stacionárním bodu $\mathcal{A}_\lambda$ (Sylvestrovo rozhodovací kritérium):

$$D(\mathcal{A}_\lambda) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{xy}(\mathcal{A}_\lambda) \\ \mathcal{L}_{yx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{yy}(\mathcal{A}_\lambda) \end{vmatrix}$$

Určíme příslušné parciální derivace:

$$\mathcal{L} = xy + \lambda(x + y - 1) \qquad \begin{array}{ll} \mathcal{L}_x = y + \lambda & \begin{array}{l} \mathcal{L}_{xx} = 0 \\ \mathcal{L}_{xy} = 1 \end{array} \\[2ex] \mathcal{L}_y = x + \lambda & \begin{array}{l} \mathcal{L}_{yx} = 1 \\ \mathcal{L}_{yy} = 0 \end{array} \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

tedy v bodě $\mathcal{A}_\lambda$ Lagrangeova funkce $\mathcal{L}$ extrém nemá, ale funkce f může v bodě $\mathcal{A}$ mít vázaný lokální extrém.

Proto pro Lagrangeovu funkci $\mathcal{L}$ určíme podle poznámky pod čarou (1) hodnotu druhého totálního diferenciálu ve stacionárním bodě $\mathcal{A}_\lambda = \left[\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right]$, ve kterém jsme nerozhodli předchozím determinantem.

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}(\mathcal{A}_\lambda) = 0\,\mathrm{d}x^2 + 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + 0\,\mathrm{d}y^2 = 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{28}$$

Diferencováním vedlejší podmínky dostaneme

$$\frac{\partial(x+y-1)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial(x+y-1)}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0$$
$$1\,\mathrm{d}x + 1\,\mathrm{d}y = 0$$
$$\mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}x$$

což dosadíme do (28).

$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$ $\qquad \lambda = -\frac{1}{2}$

$$\mathrm{d}^2\mathcal{L}\,(\mathcal{A}_\lambda) = 2\,\mathrm{d}x(-\,\mathrm{d}x) = -2\,\mathrm{d}x^2$$

V okolí bodu $\mathcal{A}_\lambda$ (tedy pro **dostatečně malé hodnoty** $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$) platí:

$\mathrm{d}^2\mathcal{L}(\mathcal{A}_\lambda) \neq 0 \quad \Longrightarrow$ v tomto bodě extrém nastává;

$\mathrm{d}^2\mathcal{L}(\mathcal{A}_\lambda) < 0 \quad \Longrightarrow$ tedy funkce f má v bodě $\mathcal{A}$ vázané lokální MAXIMUM,

jehož hodnota je: $f\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

2. způsob: Z **vazby** lze explicitně vyjádřit $y = 1 - x$. Dosadíme do funkce f a hledáme extrémy funkce jedné proměnné. Tedy

$$f(x) = x(1-x)$$
$$= x - x^2$$

Stacionární body

$$f_x : 1 - 2x = 0$$
$$x = \tfrac{1}{2}$$

Existence a druh extrému

$$\begin{array}{ll} \text{funkce } f(x) & \qquad\nearrow \qquad\qquad\qquad \searrow \\ \text{znaménko } f_x & (-\infty) +++ \left[x = \frac{1}{2}\right] --- (\infty) \end{array}$$

Tedy zadaná funkce $f(x;y)$ má v bodě $\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$ vázané lokální MAXIMUM $f(\mathcal{A}) = \dfrac{1}{4}$.

Příklad 8.

Určete lokální extrémy funkce $f(x\,;y) = 2x^2 + 2y^2$
vázané vedlejší **podmínkou** $\varphi(x\,;y) : x + y - 2 = 0\,.$

$[x \in \mathbb{R}\,;\ y \in \mathbb{R}]$

Řešení

1. způsob: Lagrangeova metoda.

- Sestavíme **Lagrangeovu** funkci $\mathcal{L}(x\,;y\,;\lambda) = f(x\,;y) + \lambda\varphi(x\,;y)$

$$\mathcal{L}(x\,;y\,;\lambda) = 2x^2 + 2y^2 + \lambda(x + y - 2)$$

- určíme její gradient $\operatorname{grad} \mathcal{L}_{x;y;\lambda} = \left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\,;\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\,;\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}\right)$
- gradient položíme roven nulovému vektoru.

$$(0\,;0\,;0) = (4x + \lambda\,;4y + \lambda\,;x + y - 2)$$

Stacionární body

Řešíme následující systém rovnic

$$\begin{aligned} 4x + \lambda &= 0 && (29)\\ 4y + \lambda &= 0 && (30)\\ x + y - 2 &= 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 - y && (31) \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice (31) osamostatníme proměnnou x a dosadíme ji do zbylých dvou:

$$\begin{array}{lrl} (29) & 4(2-y)+\lambda=0 & \\ (30) & 4y+\lambda=0 & \\ \hline & 8-4y+\lambda=0 & \\ & 4y+\lambda=0 & |+ \\ \hline\hline & 8+2\lambda=0 & \Longrightarrow \quad \lambda=-4 \\ \hline \text{a po dosazení} & 4y-4=0 & \Longrightarrow \quad y=1 \end{array}$$

Pro $\lambda = -4$ dostáváme jeden stacionární bod (tj. bod *podezřelý* z extrému): $\mathcal{A} = [1\,;1]$

Existence a druh extrému

Ověření existence extrému funkce $\mathcal{L}$ ve stacionárním bodu $\mathcal{A}_\lambda$ (Sylvestrovo rozhodovací kritérium):

$$D(\mathcal{A}_\lambda) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{xy}(\mathcal{A}_\lambda) \\ \mathcal{L}_{yx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{yy}(\mathcal{A}_\lambda) \end{vmatrix}$$

Určíme příslušné parciální derivace:

$$\mathcal{L} = 2x^2 + 2y^2 + \lambda(x + y - 2) \qquad \begin{array}{ll} \mathcal{L}_x = 4x + \lambda & \begin{array}{l} \mathcal{L}_{xx} = 4 \\ \mathcal{L}_{xy} = 0 \end{array} \\ \mathcal{L}_y = 4y + \lambda & \begin{array}{l} \mathcal{L}_{yx} = 0 \\ \mathcal{L}_{yy} = 4 \end{array} \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16$$

$$D(1\,;1\,;-4) = 16 > 0 \ \wedge \ \mathcal{L}_{xx}(1\,;1\,;-4) = 4 > 0$$

V bodě $\mathcal{A}$ je lokální minimum jak pro funkci $\mathcal{L}$, tak vázané pro funkci f a má hodnotu

$$f(1\,;1) = 2(1)^2 + 2(1)^2 = 4$$

2. způsob: Z **vazby** lze explicitně vyjádřit $y = 2 - x$, což dosadíme do funkce f a hledáme extrémy funkce jedné proměnné. Tedy

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 2(2-x)^2 \\ &= 2x^2 + 2(4 - 4x + x^2) = 4x^2 - 8x + 8 \end{aligned}$$

Stacionární body

$$f_x : 8x - 8 = 0$$
$$x = 1$$

Existence a druh extrému

$$\begin{array}{ll} \text{funkce } f(x) & \qquad\quad \searrow \qquad\qquad\qquad \nearrow \\ \text{znaménko } f_x & (-\infty) - - - [x = 1] + + + (\infty) \end{array}$$

Tedy zadaná funkce $f(x; y)$ má v bodě $\mathcal{A} = [1 ; 1]$ vázané lokální minimum, které má hodnotu $f(\mathcal{A}) = 4$.

Příklad 9.

Určete lokální extrémy funkce $f(x ; y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

vázané vedlejší **podmínkou** $\varphi(x ; y) : x + y - 2 = 0$.

[$x \neq 0$; $y \neq 0$]

Řešení

1. způsob: Lagrangeova metoda.

- Sestavíme **Lagrangeovu** funkci $\mathcal{L}(x ; y ; \lambda) = f(x ; y) + \lambda\varphi(x ; y)$

$$\mathcal{L}(x ; y ; \lambda) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(x + y - 2)$$

- určíme její gradient $\operatorname{grad} \mathcal{L}_{x;y;\lambda} = \left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} ; \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} ; \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}\right)$

- gradient položíme roven nulovému vektoru.

$$(0 ; 0 ; 0) = \left(-\frac{1}{x^2} + \lambda ; -\frac{1}{y^2} + \lambda ; x + y - 2\right)$$

Stacionární body

Řešíme následující systém rovnic

$$-\frac{1}{x^2}+\lambda = 0 \tag{32}$$

$$-\frac{1}{y^2}+\lambda = 0 \tag{33}$$

$$x+y-2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2-y \tag{34}$$

Ze třetí rovnice (34) osamostatníme proměnnou x a dosadíme ji do zbylých dvou:

$$(32) \qquad -\frac{1}{(2-y)^2}+\lambda=0 \qquad\qquad y\neq 2$$

$$(33) \qquad -\frac{1}{y^2}+\lambda=0 \quad |\cdot(-1)$$

$$-\frac{1}{(2-y)^2}+\frac{1}{y^2}=0$$

$$\frac{1}{y^2}=\frac{1}{(2-y)^2}$$

$$(2-y)^2=y^2$$

$$4-4y+y^2=y^2$$

$$4-4y=0$$

$$y=1$$

Pro $\lambda=1$ dostáváme jeden stacionární bod (tj. bod *podezřelý* z extrému): $\mathcal{A}=[1\,;1]$

Existence a druh extrému

Ověření existence extrému funkce $\mathcal{L}$ ve stacionárním bodu $\mathcal{A}_\lambda$ (Sylvestrovo rozhodovací kritérium):

$$D(\mathcal{A}_\lambda)=\begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{xy}(\mathcal{A}_\lambda) \\ \mathcal{L}_{yx}(\mathcal{A}_\lambda) & \mathcal{L}_{yy}(\mathcal{A}_\lambda) \end{vmatrix}$$

Určíme příslušné parciální derivace:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda(x+y-2) \qquad \mathcal{L}_x=-\frac{1}{x^2}+\lambda \qquad \mathcal{L}_{xx}=\frac{2}{x^3} \qquad \mathcal{L}_{xy}=0$$

$$\mathcal{L}_y=-\frac{1}{y^2}+\lambda \qquad \mathcal{L}_{yx}=0 \qquad \mathcal{L}_{yy}=\frac{2}{y^3}$$

$$D=\begin{vmatrix} \frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{vmatrix}=\frac{4}{x^3y^3}$$

$$D(1\,;1\,;1) = 4 > 0 \;\;\wedge\;\; \mathcal{L}_{xx}(1\,;1\,;1) = 2 > 0$$

Tedy v bodě $\mathcal{A}$ je pro funkci f vázané lokální minimum, které má hodnotu

$$f(1\,;1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$$

2. způsob: Z **vazby** lze explicitně vyjádřit $y = 2 - x$, což dosadíme do funkce f a hledáme extrémy funkce jedné proměnné. Tedy

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} \qquad \text{pro} \qquad x \neq 2$$

Stacionární body

$$f_x : -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(2-x)^2} \cdot (-1) = 0 \;\;\Longrightarrow\;\; f_x = \frac{-(2-x)^2 + x^2}{x^2(2-x)^2} = \frac{-4+4x}{x^2(2-x)^2}$$

$$\frac{1}{(2-x)^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$x^2 = (2-x)^2$$

$$x^2 = 4 - 4x + x^2$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

Existence a druh extrému

funkce $f(x)$ ↘ ↘ ↗ ↗

znaménko f_x $(-\infty) - - - (x = 0) - - - [x = 1] + + + (x = 2) + + + (\infty)$

Tedy zadaná funkce $f(x;y)$ má v bodě $\mathcal{A} = [1\,;1]$ vázané lokální minimum, které má hodnotu $f(\mathcal{A}) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$.