Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \;\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \;\mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct;$ (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x) \;\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x) \Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \;\mathrm{d}x.$ (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \ \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$

Řešení. Označme $F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln x \ \mathrm{d}y.$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \ \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct;$ (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x) \ \mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \ \mathrm{d}x.$ (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$

Řešení. Označme $F(x) = \int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y$. Protože funkce $g(y) \equiv \ln x$ je konstantní vůči y, s použitím vzorce (1), ve kterém klademe $c := \ln x$ a $t := y$, máme

$$F(x) \overset{(1)}{=} \ln x \int_0^x \mathrm{d}y =$$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \, \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct$; (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x) \Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x.$ (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$.

Řešení. Označme $F(x) = \int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y$. Protože funkce $g(y) \equiv \ln x$ je konstantní vůči y, s použitím vzorce (1), ve kterém klademe $c := \ln x$ a $t := y$, máme

$$F(x) \overset{(1)}{=} \ln x \int_0^x \mathrm{d}y = \ln x \, \Big[y \Big]_0^x =$$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \, \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct$; (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x) \Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x$. (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \ \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$

Řešení. Označme $F(x) = \int_0^x \ln x \ \mathrm{d}y$. Protože funkce $g(y) \equiv \ln x$ je konstantní vůči y, s použitím vzorce (1), ve kterém klademe $c := \ln x$ a $t := y$, máme

$$F(x) \overset{(1)}{=} \ln x \int_0^x \mathrm{d}y = \ln x \ \Big[y \Big]_0^x = x \ln x.$$

Potom s použitím metody per partes pro určitý integrál (viz vzorec (2)) dostáváme

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \ \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct$; (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\int_a^b u(x)v'(x) \ \mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x) \Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \ \mathrm{d}x.$ (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \; \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$.

Řešení. Označme $F(x) = \int_0^x \ln x \; \mathrm{d}y$. Protože funkce $g(y) \equiv \ln x$ je konstantní vůči y, s použitím vzorce (1), ve kterém klademe $c := \ln x$ a $t := y$, máme

$$F(x) \overset{(1)}{=} \ln x \int_0^x \mathrm{d}y = \ln x \left[y\right]_0^x = x \ln x.$$

Potom s použitím metody per partes pro určitý integrál (viz vzorec (2)) dostáváme

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} F(x) \; \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \; \mathrm{d}x \overset{(2)}{=}$$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \; \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct$; (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\int_a^b u(x)v'(x) \; \mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \; \mathrm{d}x$. (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$

Řešení. Označme $F(x) = \int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y$. Protože funkce $g(y) \equiv \ln x$ je konstantní vůči y, s použitím vzorce (1), ve kterém klademe $c := \ln x$ a $t := y$, máme

$$F(x) \overset{(1)}{=} \ln x \int_0^x \mathrm{d}y = \ln x \left[y \right]_0^x = x \ln x.$$

Potom s použitím metody per partes pro určitý integrál (viz vzorec (2)) dostáváme

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} F(x) \, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \left| \, u = \right.$$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \, \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct$; (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x.$ (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$.

Řešení. Označme $F(x) = \int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y$. Protože funkce $g(y) \equiv \ln x$ je konstantní vůči y, s použitím vzorce (1), ve kterém klademe $c := \ln x$ a $t := y$, máme

$$F(x) \overset{(1)}{=} \ln x \int_0^x \mathrm{d}y = \ln x \left[y\right]_0^x = x \ln x.$$

Potom s použitím metody per partes pro určitý integrál (viz vzorec (2)) dostáváme

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} F(x) \, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \left| \begin{array}{l} u = \ln x; \quad u' = \\ \\ \end{array} \right.$$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \, \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct$; (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x.$ (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$

Řešení. Označme $F(x) = \int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y$. Protože funkce $g(y) \equiv \ln x$ je konstantní vůči y, s použitím vzorce (1), ve kterém klademe $c := \ln x$ a $t := y$, máme

$$F(x) \overset{(1)}{=} \ln x \int_0^x \mathrm{d}y = \ln x \, \Big[y \Big]_0^x = x \ln x.$$

Potom s použitím metody per partes pro určitý integrál (viz vzorec (2)) dostáváme

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} F(x) \, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & u' = \frac{1}{x} \\ v' = & \end{array} \right.$$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \, \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct$; (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x) \Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x.$ (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \; \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$

Řešení. Označme $F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln x \; \mathrm{d}y$. Protože funkce $g(y) \equiv \ln x$ je konstantní vůči y, s použitím vzorce (1), ve kterém klademe $c := \ln x$ a $t := y$, máme

$$F(x) \overset{(1)}{=} \ln x \int_0^x \mathrm{d}y = \ln x \left[y\right]_0^x = x \ln x.$$

Potom s použitím metody per partes pro určitý integrál (viz vzorec (2)) dostáváme

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} F(x) \; \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \; \mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x; & v = \end{array} \right.$$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \; \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct;$ (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x) \; \mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \; \mathrm{d}x.$ (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$

Řešení. Označme $F(x) = \int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y$. Protože funkce $g(y) \equiv \ln x$ je konstantní vůči y, s použitím vzorce (1), ve kterém klademe $c := \ln x$ a $t := y$, máme

$$F(x) \overset{(1)}{=} \ln x \int_0^x \mathrm{d}y = \ln x \left[y \right]_0^x = x \ln x.$$

Potom s použitím metody per partes pro určitý integrál (viz vzorec (2)) dostáváme

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} F(x) \, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x; & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \, \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct$; (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x.$ (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$.

Řešení. Označme $F(x) = \int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y$. Protože funkce $g(y) \equiv \ln x$ je konstantní vůči y, s použitím vzorce (1), ve kterém klademe $c := \ln x$ a $t := y$, máme

$$F(x) \overset{(1)}{=} \ln x \int_0^x \mathrm{d}y = \ln x \, \Big[y \Big]_0^x = x \ln x.$$

Potom s použitím metody per partes pro určitý integrál (viz vzorec (2)) dostáváme

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} F(x) \, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x; & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, \mathrm{d}x =$$

$$=$$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \, \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct$; (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x) \Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x.$ (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \; \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$.

Řešení. Označme $F(x) = \int_0^x \ln x \; \mathrm{d}y$. Protože funkce $g(y) \equiv \ln x$ je konstantní vůči y, s použitím vzorce (1), ve kterém klademe $c := \ln x$ a $t := y$, máme

$$F(x) \overset{(1)}{=} \ln x \int_0^x \mathrm{d}y = \ln x \left[y \right]_0^x = x \ln x.$$

Potom s použitím metody per partes pro určitý integrál (viz vzorec (2)) dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\mathrm{e}} F(x) \; \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \; \mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x; & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \; \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^2 \ln \mathrm{e} - \ln 1 \right) - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2} \; \mathrm{d}x = \end{aligned}$$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \; \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct;$ (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\int_a^b u(x)v'(x) \; \mathrm{d}x = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \; \mathrm{d}x.$ (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$

Řešení. Označme $F(x) = \int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y$. Protože funkce $g(y) \equiv \ln x$ je konstantní vůči y, s použitím vzorce (1), ve kterém klademe $c := \ln x$ a $t := y$, máme

$$F(x) \overset{(1)}{=} \ln x \int_0^x \mathrm{d}y = \ln x \, \Big[y \Big]_0^x = x \ln x.$$

Potom s použitím metody per partes pro určitý integrál (viz vzorec (2)) dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\mathrm{e}} F(x)\, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x; & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2} \Big(\mathrm{e}^2 \ln \mathrm{e} - \ln 1 \Big) - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^{\mathrm{e}} = \end{aligned}$$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \, \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct;$ (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\int_a^b u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x) \Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x.$ (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$

Řešení. Označme $F(x) = \int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y$. Protože funkce $g(y) \equiv \ln x$ je konstantní vůči y, s použitím vzorce (1), ve kterém klademe $c := \ln x$ a $t := y$, máme

$$F(x) \overset{(1)}{=} \ln x \int_0^x \mathrm{d}y = \ln x \, \Big[y \Big]_0^x = x \ln x.$$

Potom s použitím metody per partes pro určitý integrál (viz vzorec (2)) dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\mathrm{e}} F(x) \, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x; & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2} \Big(\mathrm{e}^2 \ln \mathrm{e} - \ln 1 \Big) - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \end{aligned}$$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \, \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct;$ (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x) \Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x.$ (2)

Příklad. Určete hodnotu dvojnásobného integrálu integrálu $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$.

Řešení. Označme $F(x) = \int_0^x \ln x \, \mathrm{d}y$. Protože funkce $g(y) \equiv \ln x$ je konstantní vůči y, s použitím vzorce (1), ve kterém klademe $c := \ln x$ a $t := y$, máme

$$F(x) \stackrel{(1)}{=} \ln x \int_0^x \mathrm{d}y = \ln x \left[y\right]_0^x = x \ln x.$$

Potom s použitím metody per partes pro určitý integrál (viz vzorec (2)) dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\mathrm{e}} F(x) \, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x \stackrel{(2)}{=} \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x; & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 \ln \mathrm{e} - \ln 1\right) - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4}}}. \end{aligned}$$

Použité vzorce a dílčí úpravy.

- *Pravidlo pro integrování konstanty:* $\int c \, \mathrm{d}t = c \int \mathrm{d}t = ct$; (1)
- *Metoda per partes pro určitý integrál:* $\int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x$. (2)